
УДК 535.8 517.984.54 519.6

**Численное исследование параметров модели градиентного
оптического волновода с эквидистантным спектром
волноводных мод**

Т. П. Пузынина, Во Чонг Тхак

*Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д.6, г.Дубна, Московская область, 141980, Россия*

В работе на основе численного решения обратной параметрической задачи Штурма–Лиувилля выполнено исследование модели планарного оптического волновода с градиентным экспоненциальным профилем показателя преломления с целью определения параметров профиля, обеспечивающих близость спектра волноводных мод к эквидистантному.

Ключевые слова: волновое уравнение, модельный потенциал, параметры модели, спектр волноводных мод, квадратичный функционал, минимизация.

1. Введение

При изучении волноводной интегральной оптики используются устройства вывода сигналов, которые преобразуют координатное представление информации в спектральное. Спектральные линии подаются на регистрирующую линейку ФЭУ или других преобразователей. Чем более равномерно распределены спектральные линии градиентного волновода, тем проще изготовить разрешающую оптическую линейку. Поэтому задача изготовления волновода с эквидистантным спектром является актуальной.

Технологически эта задача решается методом имплантации ионного пучка в волноводный слой с первоначально постоянным показателем преломления. Поскольку процесс имплантации порождает процесс диффузии ионов в материал волноводного слоя, показатель преломления образованного слоя максимален на границе с воздухом и экспоненциально убывает вглубь слоя.

Для отработки методики вычисления параметров профиля показателя преломления волновода, обеспечивающих близость его спектра к эквидистантному, рассматривается следующая модельная структура. На диэлектрическую подложку с показателем преломления n_s нанесена пленка из другого диэлектрика с показателем преломления n_f ($n_f > n_s$). С помощью (ионной) имплантации частиц с более высоким показателем преломления в поверхность пленки получен новый слой, показатель преломления которого экспоненциально увеличивается от границы с пленкой до границы с окружающей средой (воздухом), имеющей показатель преломления n_c ($n_f > n_s > n_c$). Поскольку между слоями с показателями преломления n_s и n_c ($n_s > n_c$) находится слой с более высоким, плавно изменяющимся показателем преломления, эта система обеспечивает за счет полного внутреннего отражения волноводное распространение монохроматического поляризованного света вдоль слоев. Таким образом, рассматривается модель планарного оптического волновода с градиентным распределением показателя преломления [1]. С ним связана декартова система координат (x, y, z) , в которой уравнения Максвелла для монохроматического поляризованного света редуцируются к системе дифференциальных и алгебраических уравнений [1, 2], определяющих эволюцию ТЕ и ТМ — поляризаций независимо друг от друга.

Статья поступила в редакцию 27 июня 2012 г.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 10-01-00467-а и 12-01-00396-а. Авторы благодарят Л.А. Севастьянова за постановку задачи и И.В. Пузынина за помощь и поддержку.

В случае волноводных ТЕ — мод для компонент E_y и H_z , тангенциальных к границам разделов слоев волновода, справедливы спектральное уравнение для E_y и соотношение, связывающее E_y с H_z ,

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + (k_0^2 \varepsilon(x) \mu - k_z^2) E_y = 0, \quad H_z = \frac{i}{k_0 \mu} \frac{dE_y}{dx},$$

где $k_0^2 = \omega^2/c^2$, ω — частота колебаний поля, k_z — компонента волнового вектора, ε и μ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Здесь рассматривается спектральное уравнение для составляющей E_y , которое содержит все характерные черты изучаемой задачи.

На рис. 1 изображен профиль показателя преломления рассматриваемой модели $n^2(x) = \varepsilon(x)\mu$.

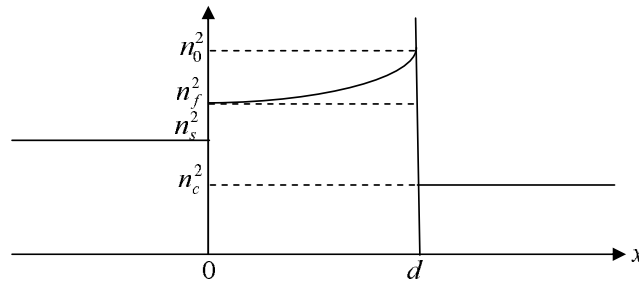


Рис. 1. Асимметричный экспоненциальный профиль показателя преломления, d — высота имплантированного слоя

В работе даны постановка обратной задачи Штурма–Лиувилля для определения параметров профиля показателя преломления $n^2(x)$, обеспечивающих эквидистантность спектра волноводных мод, и численный метод решения этой задачи. Выполнен численный анализ параметров рассматриваемой модели, а также предложена модификация профиля показателя преломления, повышающая точность приближения спектра волноводных мод к эквидистантному.

2. Постановка задачи и численный метод решения

Уравнение, определяющее спектр для компоненты E_y , в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{d^2 E_y(x)}{dx^2} + (n^2(x) - \beta^2) E_y(x) = 0, \quad (1)$$

где профиль показателя преломления $n^2(x)$ (потенциал) задан как

$$n^2(x) = \begin{cases} n_s^2, & x < 0, \\ n_f^2 \left(1 - \Delta \left(1 - \exp\left(\frac{x}{d}\right) \right) \right), & 0 \leq x \leq d, \\ n_c^2, & x > d. \end{cases} \quad (2)$$

Граничные условия

$$\left[\frac{d}{dx} E_y(x) - \sqrt{\beta^2 - n_s^2} E_y(x) \right]_{x=0} = 0, \quad (3)$$

$$\left[\frac{d}{dx} E_y(x) + \sqrt{\beta^2 - n_c^2} E_y(x) \right]_{x=d} = 0, \quad (4)$$

являются следствием условий равенства логарифмических производных при $x = 0$ и $x = d$ для $E_y(x)$ и экспоненциально убывающих асимптотик ($x < d$, $x > d$) решений уравнения (1), (2).

Таким образом, граничная задача (1)–(4) является задачей Штурма - Лиувилля на отрезке $0 \leq x \leq d$.

Значения показателей преломления заданы [3]:

$$n_s^2 = (1.47)^2, \quad n_f^2 = (1.565)^2, \quad n_c^2 = (1.0)^2. \quad (5)$$

Величины d и Δ определяют вектор параметров модели

$$\bar{p} = (d, \Delta), \quad d > 0, \quad \Delta > 0, \quad (6)$$

от которого зависит спектр решений задачи (1)–(4)

$$\{\beta_j^2(\bar{p}), E_y^{(j)}(\bar{p}, x)\}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N(\bar{p}), \quad (7)$$

где $\beta_j^2(\bar{p})$ — собственное значение, $E_y^{(j)}(\bar{p}, x)$ — соответствующая собственная функция. Собственные значения упорядочены

$$\beta_0^2(\bar{p}) > \beta_1^2(\bar{p}) > \beta_2^2(\bar{p}) > \dots > \beta_N^2(\bar{p}) > 0.$$

Введем обозначение

$$\rho_j(\bar{p}) = \beta_{j-1}^2(\bar{p}) - \beta_j^2(\bar{p}), \quad j = 1, 2, \dots, N(\bar{p}). \quad (8)$$

Тогда для эквидистантности спектра собственных значений требуется выполнение системы равенств

$$\rho_1(\bar{p}) = \rho_2(\bar{p}) = \dots = \rho_N(\bar{p}). \quad (9)$$

Следовательно, для исследуемой модели возникает обратная задача, в которой по заданной характеристике спектра собственных значений (9) требуется восстановить в параметрическом семействе $n^2(\bar{p}, x)$ (2) конкретный потенциал (то есть найти вектор параметров \bar{p}^*), с помощью которого можно наилучшим образом воспроизвести систему равенств (9). Приближенное решение этой задачи можно свести к минимизации функционала

$$\Phi(\bar{p}) = \sum_{j=2}^{N(\bar{p})} (\rho_1(\bar{p}) - \rho_j(\bar{p}))^2. \quad (10)$$

Для вычисления значения функционала (10) при заданном векторе параметров \bar{p} используется программа SLIPH4M [4], решающая разностную задачу Штурма-Лиувилля, аппроксимирующую задачу (1)–(4).

Численное решение задачи минимизации функционала $\Phi(\bar{p})$ (10) в заданной области $G(\bar{p} \in G)$ реализуется с помощью известной процедуры покоординатного спуска [5], поскольку вектор \bar{p} содержит только две компоненты. Одномерная минимизация функционала при фиксированном значении одной из компонент вектора \bar{p} осуществляется с использованием процедуры, реализующей модификацию метода парабол [5]. Соответствующие программы: CDMIN - процедура покоординатного спуска и PARMIN — процедура одномерной минимизации с помощью модификации метода парабол, составлены в системе MAPLE [6]. Точность результатов оценивается численно.

Остановимся на методике задания области $G(\bar{p} \in G)$. Компоненты $\bar{p} = (d, \Delta)$ совместно влияют на характеристики спектра $N(\bar{p})$ и $\rho_j(\bar{p})$. Поэтому целесообразно разделить анализ зависимости спектра от \bar{p} покомпонентно. Это означает, что

необходимо выделить значение d такое, при котором число точек спектра $N(\bar{p})$ задачи (1)–(4) сохраняется на некотором интервале изменения параметра Δ . Это необходимо для корректного сравнения значений функционала $\Phi(\bar{p})$ (10). Для определения предварительного значения Δ , в окрестности которого будет выполняться численный анализ характеристик спектра, зададим наряду с выбранными реалистическими показателями преломления n_s^2, n_f^2, n_c^2 (5) также реалистическое значение показателя преломления $n_0^2 = (2.1)^2$ [3] (рис. 1). Тогда получим $\Delta \approx 0.46$. При $d = 3\pi$, $\Delta = 0.46$ вычисляются три решения (7) задачи (1)–(4). Графики собственных функций $E_y^{(j)}$, $j = 0, 1, 2$ представлены на рис. 2.

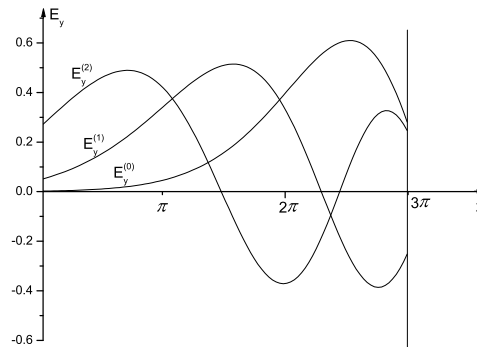


Рис. 2. Собственные функции $E_y^{(j)}(x)$ ($j = 0, 1, 2$) задачи (1)–(4), $d = 3\pi$, $\Delta = 0.46$

3. Зависимость спектра E_y от параметров модели

В расчетах положим $d = 3\pi$ и будем исследовать спектры, состоящие из трех точек.

Сначала исследуем зависимость характеристик спектра в окрестности точки $\Delta = 0.46$. Результаты расчетов представлены в табл. 1 (I).

Таблица 1
Характеристики спектра E_y в зависимости от Δ ($d = 3\pi$)

Характеристики	Серии экспериментов							
	I			II			III	
Δ	0.36	0.46	0.56	0.20	0.22	0.24	0.1810	0.1905
β_0^2	3.2425	3.5319	3.8296	2.8067	2.8585	2.9113	2.7584	2.7824
β_1^2	2.7129	2.8942	3.0899	2.4619	2.4904	2.5197	2.4356	2.4486
β_2^2	2.3273	2.4420	2.5678	2.1729	2.1881	2.2055	2.1625	2.1669
ρ_1	0.5295	0.6377	0.7397	0.3448	0.3681	0.3916	0.3228	0.3338
ρ_2	0.3857	0.4522	0.5221	0.2890	0.3023	0.3142	0.2731	0.2817
Φ	0.0207	0.0344	0.0474	0.0031	0.0043	0.0060	0.0025	0.0027

Из табл. 1 (I) видно, что минимальное значение функционала Φ (10) получено при $\Delta = 0.36$, то есть на левой границе рассматриваемой окрестности. Парабола

$p_2(\Delta)$, проходящая через три точки $(\Delta, \Phi(\Delta))$, имеет два корня

$$\Delta_1 \approx 0.22, \quad \Delta_2 \approx 4.10.$$

Оба корня выходят за пределы указанной окрестности. Отметим, что при $\Delta = 4.10$ задача (1)–(4) имеет 8 решений, поэтому окрестность этой точки в дальнейшем не рассматривается.

Рассмотрим окрестность $\Delta = 0.22$. Результаты расчетов характеристик спектра приведены в табл. 1 (II). Минимальное значение $\Phi(\Delta)$ (10) достигается при $\Delta = 0.20$, то есть снова на левой границе новой окрестности. Парабола, проходящая через три точки $(\Delta, \Phi(\Delta))$ рассматриваемой окрестности, имеет положительный минимум при $\Delta \approx 0.15$. Однако, при $\Delta = 0.15$ задача (1)–(4) имеет только два решения. При $\Delta = 0.18$ задача (1)–(4) также имеет два решения. Относительно малое увеличение параметра $\Delta = 0.181$ дает уже три решения задачи. Вычисленные характеристики спектра для $\Delta = 0.1810$ и для $\Delta = 0.1905$ приведены в табл. 1 (III).

Данные таблицы показывают, что минимум функционала $\Phi(\Delta)$ получен при $\Delta = 0.181$ вблизи точки бифуркации по параметру Δ , в окрестности которой меняется число $N(\Delta)$ решений задачи (1)–(4). На рис. 3 изображены графики собственных функций $E_y^{(j)}(x)$ для сравнения с рис. 2.

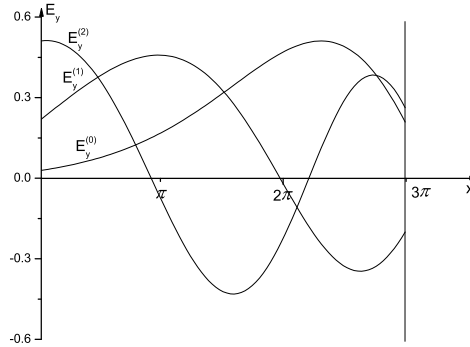


Рис. 3. Собственные функции $E_y^{(j)}(x)$ ($j = 0, 1, 2$) задачи (1)–(4), $d = 3\pi$, $\Delta = 0.181$

Таким образом, для изучаемой модели (1)–(4) с заданными параметрами (5) в области изменения параметров $\bar{p} = (d, \Delta) \in \{3\pi, 0.181 \leq \Delta \leq 0.560\}$ найден минимум функционала (10) $\Phi(\bar{p}) = 0.0025$, где $\bar{p} = (3\pi, 0.181)$, $N(\bar{p}) = 2$. Получен практически неулучшаемый дефект эквидистантности спектра

$$D_\rho = \sqrt{\min_{\bar{p}} \Phi(\bar{p})} = 0.05, \quad (11)$$

то есть $\rho_1 \approx \rho_2 \approx 0.3$. При этом $n_0^2 = (1.7919)^2$ (см. [3]).

4. Модификация профиля показателя преломления

Метод парабол [6] одномерной минимизации функционала в модели (1)–(5) давал при $d = 3\pi$ в окрестности $\Delta = 0.46$ для $\Phi(\Delta)$ (10) интерполяционную параболу $p_2(\Delta)$ с двумя корнями Δ_1, Δ_2 , причем $p_2''(\Delta) < 0$. Поэтому минимум

функционала находился на границе окрестности, и для дальнейшего его уточнения требовался переход к другой области по Δ . Такая нерегулярная зависимость квадратичного функционала (10) от варьируемого параметра Δ , возможно, вызвана неудачной оценкой параметра $\Delta \approx 0.46$, в окрестности которой предполагалось существование минимума. Но с другой стороны, возможно, что при заданном экспоненциальном профиле показателя преломления (2) и заданных значениях n_s, n_f, n_c (5) и $n_0 \approx 2.1$ задача вычисления эквидистантного спектра для E_y с высокой точностью не имеет решения.

В связи с этим можно рассмотреть задачу о модификации профиля (2) таким образом, чтобы для заданных выше показателей преломления обеспечить регулярный поиск минимума функционала $\Phi(\bar{p})$ (10) в области $\{d = 3\pi, \Delta \in [\Delta_l, \Delta_r]\}$, где Δ_l, Δ_r — заданные границы отрезка предполагаемого изменения параметра Δ .

Отходя от классического определения экспоненциального профиля показателя преломления [1], рассмотрим модификацию экспоненциальной зависимости профиля (2) в виде

$$n^2(x) = n_f^2 \left(1 - \Delta \left(1 - \exp\left(\frac{x}{d}\right)^\alpha \right) \right), \quad 0 \leq x \leq d, \quad (12)$$

где $\alpha (0 < \alpha < 1)$ — параметр. Отметим, что в отличие от профиля (2) профиль (12) имеет вторую производную $\frac{d^2}{dx^2}(n^2(x)) < 0, 0 \leq x \leq d$.

Результаты минимизации функционала Φ (10) для различных значений α приведены в табл. 2. Процесс минимизации осуществляется для каждого значения α в пределах соответствующего отрезка с сохранением числа точки спектра $N(\bar{p}) = 2$. В таблице помимо вычисленных характеристик спектра: $\beta_i^2 (i = 0, 1, 2)$ — собственных значений и $\rho_i (i = 1, 2)$ — расстояний (8), приведены значения i — число итераций поиска $\min \Phi(\Delta)$, Δ_{\min} — точки, обеспечивающей $\min \Phi(\Delta)$, и $\Phi = \Phi(\Delta_{\min})$. Приведена также характеристика D_ρ — дефект эквидистантности (12).

Таблица 2

Результаты минимизации функционала $\Phi(\bar{p})$ (10) для модифицированного профиля показателя преломления (12). $\{d = 3\pi, \Delta \in [\Delta_l, \Delta_r]\}$

Характеристики	Серии экспериментов				
	I, $\alpha = 1/4$	II, $\alpha = 1/3$	III, $\alpha = 1/2$	IV, $\alpha = 2/3$	V, $\alpha = 5/6$
$\Delta \in$	[0.4, 0.7]	[0.4, 0.50]	[0.25, 0.50]	[0.15, 0.46]	[0.16, 0.46]
i	3	3	3	6	6
Δ_{\min}	0.625	0.4773	0.2607	0.15777	0.16656
Φ	1.42E-4	9.4E-12	3.9E-11	6.86E-6	7.44E-4
β_0^2	4.65283	3.95201	3.12569	2.76587	2.75393
β_1^2	4.05394	3.46839	2.74424	2.46658	2.44513
β_2^2	3.53314	2.98477	2.36279	2.16991	2.16360
ρ_1	0.50889	0.483617	0.381454	0.29929	0.30880
ρ_2	0.52080	0.483620	0.381448	0.29667	0.28153
D_ρ	0.01191	0.000003	0.000006	0.00262	0.02727

Из табл. 2 видно, что наилучшие результаты получены при $\alpha = 1/3$. Вычисленное значение $\Delta_{\min} = 0.4773$ довольно близко к прогнозируемому значению

$\Delta \approx 0.46$. Точность вычисления характеристик эквидистантности ρ_1 и ρ_2 составляет 5 дес. знаков после десятичной точки ($D_\rho = 3 \cdot 10^{-6}$). Значение $n_0^2 = 4.4579$, ($n_0 \approx 2.1$). На рис. 4 представлены графики собственных функций $E_y^{(j)}$ и профиля показателя преломления $n^2(x)$ (12), $0 \leq x \leq 3\pi$ для $\alpha = 1/3$.

При увеличении (и уменьшении) α относительно значения $\alpha = 1/3$ точность вычисления эквидистантности уменьшается, но она выше, чем для начального варианта профиля (2).

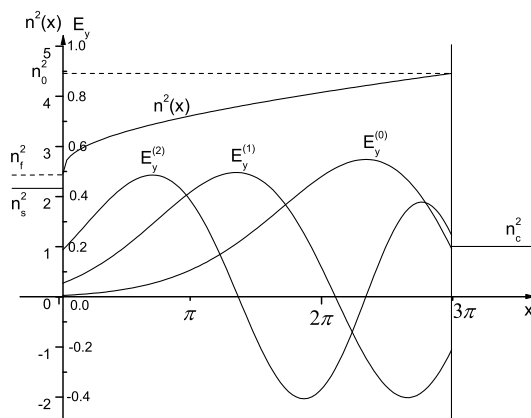


Рис. 4. Профиль показателя преломления с модификацией (12) ($\alpha = 1/3$) и собственные функции $E_y^{(j)}$ задачи (1), (12), (3), (4), $d = 3\pi$, $\Delta = 0.4773$

5. Заключение

Разработанная ранее схема численного решения обратной задачи на собственные значения для дифференциального оператора второго порядка с коэффициентом, зависящим от параметров [6], применена к задаче восстановления коэффициента, обеспечивающего эквидистантность собственных значений. Выполнен численный анализ параметров модели, описывающей спектр компоненты E_y для ТЕ — волноводной моды градиентного оптического волновода с асимметричным экспоненциальным профилем показателя преломления. Для реалистических значений показателей преломления вычислены параметры профиля, обеспечивающие приближение спектра к эквидистантному.

Предложена и исследована модификация профиля, обеспечивающая более высокую точность приближения спектра волноводной моды E_y к эквидистантному. Вопрос о технологической реализации предложенной модификации модели является открытым.

Литература

1. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. — М.: Мир, 1984. [Adams M. Vvedenie v teoriyu opticheskikh volnovodov. — М.: Mir, 1984.]
2. Маркузе Д. Оптические волноводы. — М.: Мир, 1974. [Markuze D. Opticheskie volnovodih. — М.: Mir, 1974.]
3. Refractive Index Database. — <http://refractiveindex.info/>.

4. Тхак В. Ч., Пузынина Т. П. SLIPH4M – программа для численного решения частичной проблемы Штурма–Лиувилля // Программные продукты и системы. — 2011. — № 3. — С. 75–80. [Vo Trong Thach, Puzynina T. P. SLIPH4M – programma dlya chislenного resheniya chastichnoy problemih Sturm–Liouville // Programmihe produktih i sistemih. — 2011. — No 3. — S. 75–80]
5. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978. [Kalitkin N. N. Chislennihe metodih. — M.: Nauka, 1978.]
6. Пузынина Т. П., Тхак В. Ч. Комплекс программ для решения обратной параметрической задачи уравнения Шрёдингера // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2012. — № 2. — С. 46–53. [Puzynina T. P., Vo Trong Thach. Kompleks programm dlya resheniya obratnoy parametricheskoy zadachi uravneniya Schrödinger // Informacionnihe tekhnologii i vihchisliteljnihe sistemih. — 2012. — No 2. — S. 46–53]

UDC 535.8 517.984.54 519.6

Numerical Investigation of Parameters in the Model of Gradient Optical Waveguide with Equidistant Spectrum of Waveguide Modes

T. P. Puzynina, Vo Trong Thach

*Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
Joliot-Curie, 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia*

By numerical solving of a parametric inverse Sturm-Liouville problem, investigation of the model of a planar optical waveguide with a gradient exponential profile of the refractive index has been done to determine the profile parameters providing proximity of the waveguide modes spectrum to an equidistant one.

Key words and phrases: wave equation, model potential, model parameters, waveguide modes spectrum, quadratic functional, minimization.