«ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА»,
1989, ТОМ 20, ВЫП. 3

УДК 539.12.01+539.126.34

ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПИОНОВ. ТЕОРИЯ

М. И. Подгорецкий

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассмотрена элементарная теория парных интерференционных корреляций тождественных пионов, проанализированы особенности, возникающие в различных конкретных моделях множественных процессов (статистическая теория, независимые одночастичные источники, многочастичные источники, процессы с участием промежуточных резонансов). Обсуждается вопрос о связи углового распределения вектора разности импульсов пары пионов с формой области, в которой происходит генерация. Кратко рассмотрены свойства многочастичных корреляций. Обсуждаются условия, приводящие к появлению интерференционных корреляций пар нетождественных частиц.

The elementary theory of two-particle interference correlations for the identical pions is considered. The features arising in various concrete models of multiple processes (statistical theory, independent one-particle sources, multiparticle sources, processes with intermediate resonances) are analysed. The question on the connection of the angular distribution of the pion pair momentum difference vector with the shape of a region where generation occurs is under discussion. The properties of multiparticle correlations are briefly considered. The conditions leading to the appearence of the correlations of nonidentical particle pairs are treated.

ВВЕДЕНИЕ

Сейчас уже хорошо известно, что один из факторов, определяющих характер двухчастичных корреляций тождественных частиц при малых относительных импульсах, связан с размерами области их генерации. Впервые это было продемонстрировано в работе [1]; было показано, что в рамках статистической модели распределение углов между направлениями вылета двух тождественных пионов должно быть более узким, чем аналогичное распределение для пар нетождественных пионов. Поскольку указанное различие может быть связано с радиусом области генерации R, появилась экспериментальная возможность измерения этой величины*.

Впоследствии выяснилось, что сходные явления имеют общее значение, не ограниченное сравнительно узкими рамками статистической

* По фамилиям авторов [1] описанное ими явление часто называют эффектом GGLP. Работы, связанные с эффектом GGLP, в какой-то мере касаются и темы настоящего обзора; с их основными результатами можно познакомиться, например, по публикациям [12—16].

модели. Решающим здесь оказалось установление глубокой физической аналогии между парными корреляциями тождественных частиц, образующихся в ядерных взаимодействиях, и корреляциями фотонов, испускаемых оптическими источниками, в частности звездами (см. [2—6], а также [7—9]). Как известно, Ханбери — Браун и Твисс показали, что регистрация двухфотонных корреляций позволяет измерить угловые размеры звезды (см., например, [10, 11]). С другой строны, пионы распространяются в пространстве по таким же волновым законам, как и фотоны. Поэтому в принципиальном плане источник пионов аналогичен звезде, излучающей фотоны, а тогда должен существовать некоторый аналог астрономического метода Ханбери — Брауна и Твисса, позволяющий измерять размеры области генерации пионов. Выяснилось, что такой метод действительно существует, причем с его помощью оказалось возможным измерять не только размеры, но и форму области, из которой вылетают тождественные частицы, а также и длительность процесса их генерации*.

Сказанное выше явилось основой нового быстроразвивающегося направления в физике элементарных частиц и в ядерной физике. Появились уточняющие теоретические работы и очень большое число экспериментальных работ, в которых подтверждено фактическое существование обсуждаемых корреляций и получены сведения о пространственно-временны́х параметрах области генерации. Основной массив экспериментальных данных касается корреляций заряженных тождественных пионов, генерируемых при столкновениях самых различных элементарных частиц и ядер во всем энергетическом диапазоне, доступном современным ускорителям.

Обилие материала заставляет разбить настоящий обзор на две части: цель первой состоит в описании основных элементов теории пионных корреляций, во второй — предполагается провести анализ полученных экспериментальных результатов**. Протонные корреляции, за исключением нескольких отдельных замечаний, в обзоре не рассматриваются. Соответствующие эксперименты начались позже, и число их не так велико; к тому же анализ протонных корреляций существенно осложняется необходимостью учета влияния взаимодействий в конечном состоянии (см. по этому поводу теоретические работы [17—20]).

---

* Возможность единого подхода к измерению размеров звезд и размеров области генерации элементарных частиц в физике высоких энергий является еще одним впечатляющим примером поразительного единства физической картины мира, в рамках которой оказываются тесно связанными явления, не имеющие, на первый взгляд, между собой ничего общего.

** Из-за громадного и все увеличивающегося числа публикаций с частично перекрывающимся содержанием пришлось отказаться от ссылок на препринты, доклады на конференциях и рабочих совещаниях, тезисы и авторефераты диссертаций. «Правило отбора» касается и препринтов ОИЯИ, но не относится к сообщениям ОИЯИ, которые обладают статусом полноценных публикаций, не дублируемых статьями в научных журналах.

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Анализ экспериментальных данных по корреляциям тождественных пионов обычно проводится в терминах модели независимых одночастичных источников (см., например, [1, 3, 5, 9, 21—25]). Такой подход вполне естествен при столкновениях релятивистских ядер; при столкновениях элементарных частиц он также имеет смысл применительно к процессам генерации достаточно большого числа пионов, когда уместно воспользоваться каким-либо вариантом статистического описания (термодинамические модели, совокупность многих фейнмановских диаграмм и т. п.).

Рассмотрим два таких источника. Пусть для одного из них амплитуда образования пиона с 4-импульсом P равна $U(\alpha, p)$, для второго — $V(\beta, p)$, где α и β — случайные параметры, смысл которых пока что уточнять не будем; для независимых источников параметры α и β статистически независимы. Тогда симметризованная двухчастичная амплитуда генерации пионов с 4-импульсами p_1 и p_2:

$$A(\alpha, \beta; p_1, p_2) \backsim U(\alpha, p_1) V(\beta, p_2) + U(\alpha, p_2) V(\beta, p_1), \tag{1}$$

а усредненная по всем возможным значениям α и β вероятность процесса

$$\begin{aligned}\langle W(p_1, p_2)\rangle \backsim \langle | U(\alpha, p_1) V(\beta, p_2) |^2\rangle &+ \\ + \langle | U(\alpha, p_2) V(\beta, p_1) |^2\rangle &+ \\ + \langle U(\alpha, p_1) U^*(\alpha, p_2) V(\beta, p_2) V^*(\beta, p_1)\rangle &+ \\ + \langle U^*(\alpha, p_1) U(\alpha, p_2) V^*(\beta, p_2) V(\beta, p_1)\rangle&. \end{aligned} \tag{2}$$

Для независимых источников

$$\begin{aligned}\langle W(p_1, p_2)\rangle \backsim \langle | U(\alpha, p_1) |^2\rangle \langle | V(\beta, p_2) |^2\rangle &+ \\ + \langle | U(\alpha, p_2) |^2\rangle \langle | V(\beta, p_1) |^2\rangle &+ \\ + \langle U(\alpha, p_1) U^*(\alpha, p_2)\rangle \langle V(\beta, p_2) V^*(\beta, p_1)\rangle &+ \\ + \langle U(\alpha, p_2) U^*(\alpha, p_1)\rangle \langle V(\beta, p_1) V^*(\beta, p_2)\rangle&. \end{aligned} \tag{3}$$

Если $p_1 = p_2 = p$, то

$$\langle W(p, p)\rangle \backsim 4 \langle | U(\alpha, p) |^2\rangle \langle | V(\beta, p) |^2\rangle. \tag{4}$$

При анализе различных конкретных моделей обычно оказывается, что два последних слагаемых в формуле (3) стремятся к нулю, если разность импульсов $(p_1 - p_2)$ становится достаточно большой. Тогда остаются только первые слагаемые, т. е.

$$\begin{aligned}\langle W(p_1, p_2)\rangle \backsim \langle | U(\alpha, p_1) |^2\rangle \langle | V(\beta, p_2) |^2\rangle &+ \\ + \langle | U(\alpha, p_2)^2 | \rangle \langle | V(\beta, p_1) |^2\rangle&. \end{aligned} \tag{5}$$

Если к тому же величины $\langle | U(\alpha, p) |^2 \rangle$ и $\langle | V(\beta, p) |^2 \rangle$ слабо зависят от аргумента p, их можно заменить константами, и из сопоставления формул (4) и (5) следует, что вероятность процесса для совпадающих импульсов вдвое превышает уровень вероятности, соответствующий достаточно большой разности $(p_1 - p_2)$. Иными словами, при сближении импульсов p_1 и p_2 возникает интерференционный пик вероятности, причем его ширина определяется, как будет ясно из дальнейшего, пространственно-временны́ми характеристиками процесса генерации*. Если случайные параметры α и β не являются независимыми, то высота интерференционного пика изменяется. В частности, при $\alpha \equiv \beta$ интерференционный пик может даже полностью исчезнуть (см. разд. 9).

Физический смысл величин α и β может быть различным. Если источники могут находиться в разных точках пространства-времени, то роль случайных параметров играют координаты этих точек. Пусть одночастичный источник, находящийся в точке $\mathbf{r} = 0$, испускает пион в момент $t = 0$, причем зависимость амплитуды процесса от 4-импульса p задается функцией $U(p)$, вид которой определяется внутренней структурой источника. Если бы этот источник был смещен в 4-точку $r \equiv (\mathbf{r}, t)$, т. е. находился бы в точке $\mathbf{r}$ и излучал пион в момент t, соответствующая аплитуда была бы $U(p)\, e^{-ipr}$.

Рассмотрим теперь два независимых одночастичных источника, из которых один относится к точке $r_1 \equiv (\mathbf{r}_1, t_1)$, а другой — к точке $r_2 \equiv (\mathbf{r}_2, t_2)$. Тогда симметризованная двухчастичная амплитуда, отвечающая генерации двух тождественных пионов с 4-импульсами p_1 и p_2, имеет вид

$$A(p_1, p_2) \backsim U(p_1) V(p_2)\, e^{-i(p_1 r_1 + p_2 r_2)} + U(p_2) V(p_1)\, e^{-i(p_2 r_1 + p_1 r_2)}. \qquad (6)$$

Формула (6) содержит два слагаемых из-за наличия двух неразличимых путей реализации конечного состояния — «прямого» (пионы с испульсами p_1 и p_2 образованы соответственно в точках r_1 и r_2) и «перекрестного» (с точкой r_1 связан пион с импульсом p_2, с точкой r_2 — пион с импульсом p_1).

В общем случае $U(p) \neq V(p)$, поскольку внутренние структуры источников могут быть разными. Если же предположить, что пространственно-временны́е размеры источников очень малы по сравнению с величиной $| r_1 - r_2 |$, то амплитуды $U(p)$ и $V(p)$ можно считать достаточно плавными функциями и заменить их соответствующими константами. В этом предположении двухчастичная амплитуда

$$A(p_1, p_2) \backsim e^{-i(p_1 r_1 + p_2 r_2)} + e^{-i(p_2 r_1 + p_1 r_2)}, \qquad (7)$$

* Если оставить в стороне второстепенные детали, то фактически речь идет о следствиях, вытекающих из соотношений неопределенности «импульс — координата» и «энергия — время».

а вероятность процесса*

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + \cos(p_1 - p_2)(r_1 - r_2). \tag{8}$$

Если бы одночастичные источники испускали нетождественные пионы, интерференционный член $\cos(p_1 - p_2)(r_1 - r_2)$ отсутствовал бы и в рассматриваемых условиях вероятность процесса не зависила от импульсов p_1 и p_2.

В соответствии с формулой (8) при жесткой фиксации точек r_1 и r_2 вероятность процесса испытывает осцилляции. Однако в реальных условиях надо еще усреднить (8) по различным возможным значениям координат $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ и моментов генерации $(t_1 - t_2)$. Тогда вероятность

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + \langle \cos\{\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - q_0(t_1 - t_2)\}\rangle, \tag{9}$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$, $q_0 = E_1 - E_2$.

Для независимых одночастичных источников можно от распределения разностей перейти к распределению по самим $\mathbf{r}$ и t. При таком подходе в формулу (9) входит формфактор $F(\mathbf{q}, q_0) = \langle e^{i(\mathbf{qr} - q_0 t)}\rangle$, и она принимает вид

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + |F(\mathbf{q}, q_0)|^2. \tag{9'}$$

При достаточно больших $|\mathbf{q}|$ и $|q_0|$ усредненное значение косинуса обычно стремится к нулю; в обратном пределе, когда $|\mathbf{q}|$ и $|q_0|$ очень малы, $\langle \cos\{\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - q_0(t_1 - t_2)\}\rangle \to 1$. Возникает, следовательно, корреляционный пик, ширина которого определяется пространственно-временны́ми размерами области генерации**. Вблизи «макушки» корреляционного пика последнее выражение можно разложить по малым значениям $\mathbf{q}$ и q_0; тогда оно принимает вид [25—30]:

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 - \frac{1}{4}\langle\{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\mathbf{q}\}^2\rangle - \frac{1}{4}\langle(t_1 - t_2)^2 q_0^2\rangle, \tag{10}$$

т. е. вероятность процесса оказывается связанной со среднеквадратичными значениями $\langle(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2\rangle$ и $\langle(t_1 - t_2)^2\rangle$. Если пространственное распределение источников обладает центральной симметрией, то $\langle(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2\rangle = 2\langle \mathbf{r}^2\rangle$, где вектор $\mathbf{r}$ отсчитывается от центра. Ана-

---

* Точнее, речь идет о двойном инклюзивном сечении $\dfrac{d^6\sigma}{d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2}$, пропорциональном плотности вероятности $(\partial^6 W/\partial^3\mathbf{p}_1\partial^3\mathbf{p}_2)$; сама вероятность пропорциональна $(\partial^6 W/\partial^3\mathbf{p}_1\partial^3\mathbf{p}_2)\, d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2$; вместо $d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2$ можно также взять $d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q}$, где $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/2$, $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$. Для сокращения записи в дальнейших формулах дифференциалы, как правило, будут опущены.

** Тем самым объясняются результаты многочисленных экспериментов по азимутальным корреляциям и по корреляциям поперечных импульсов: для пары тождественных пионов малые углы между направлениями поперечных импульсов встречаются чаще, чем большие, причем эффект заметно усиливается, если отбираются пионы с близкими продольными импульсами (см., например, [25, 32—38]).

логично при симметричном во времени распределении моментов излучения $\langle (t_1 - t_2)^2 \rangle = 2 \langle t^2 \rangle$.

Формулы (9) и (9′) означают, что в рамках модели независимых одночастичных источников обсуждаемые корреляции определяются фурье-образом распределения источников в пространстве-времени (см., например, [5, 30, 31]). Поэтому достаточно точные измерения парных корреляций позволяют, в принципе, получить детальные сведения об исследуемом распределении. К сожалению, для фактической реализации этой принципиальной возможности требуется накопление слишком большого статистического материала*. Более реальным кажется использование формулы (10) при измерениях среднеквадратичных значений $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ и $\langle t^2 \rangle$.

2. МОДЕЛЬ НЕПОДВИЖНЫХ ОДНОЧАСТИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

В настоящее время чаще всего детализируют формулу (9), задавая распределения величин $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ и $(t_1 - t_2)$, характерные для тех или иных конкретных моделей процесса генерации. Сопоставление с экспериментально измеренными корреляциями можно затем использовать как для определения параметров $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ и $\langle t^2 \rangle$, так и в качестве аргумента за или против обсуждаемых моделей**. Вначале корреляционные эксперименты анализировались в рамках модели, в которой предполагалось, что одночастичные источники равномерно заполняют диск радиуса R, причем все они возбуждаются одновременно и высвечиваются по экспоненциальному закону со средним временем τ. Тогда формула (9) принимает вид [3, 4, 6, 9]:

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + \frac{\{2J_1(q_\perp R)/q_\perp R\}^2}{1 + q_0^2\tau^2}, \tag{11}$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя, а $q_\perp$ — проекция вектора $\mathbf{q}$ на плоскость, перпендикулярную среднему импульсу пары пионов $\mathbf{p} = \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)}{2}$. С достаточным приближением можно записать [27, 39]:

* Количественная оценка возможностей такого подхода содержится в работе [31], в которой проведено статистическое моделирование фурье-преобразования выражения (9) по методу Монте-Карло.

** При этом надо иметь в виду, что корреляции тождественных частиц определяются не расстоянием между **любыми** парами источников, а только расстояниями между теми источниками, которые генерируют частицы с близкими импульсами. Поэтому в некоторых моделях параметры $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$ и $\langle t^2 \rangle$ могут отличаться от полных пространственно-временны́х размеров области генерации. Например, в моделях, описываемых с помощью так называемых «лестничных диаграмм», пионы с близкими импульсами испускаются в основном из смежных узлов диаграммы. Соответственно корреляционный метод дает информацию о расстоянии между соседними узлами, хотя при большом числе таких узлов полные размеры всей «лестницы» могут быть значительно бо́льшими. Аналогичное замечание относится к моделям, включающим множественную генерацию пионов в процессе адронизации «кварковых струй» высокой энергии.

$$W(p_1,\ p_2) \backsim 1 + \{\exp(-q_\perp^2 R^2/4)/(1+q_0^2\tau^2)\}. \tag{12}$$

Если вместо диска «светится» поверхность полусферы, излучающая пионы в соответствии с законом Ламберта, то формула (12) остается справедливой только при отборе событий с $q_0 = 0$. В противном случае (12) переходит в приближенную формулу [39]:

$$W(p_1,\ p_2) \backsim 1 + \frac{e^{-q_\perp^2 R^2/4 - q_0^2 R^2/18u^2}}{1+q_0^2\tau^2}, \tag{13}$$

в которой $\mathbf{u}$ — средняя скорость пары тождественных пионов. Заметим также, что при выполнении условия

$$R \ll u\tau \tag{14}$$

наличие в (13) дополнительного члена $q_0^2R^2/18u^2$ практически не сказываетси, им можно пренебречь по сравнению с $q_0^2\tau^2$.

В модели, в которой источники заполняют равномерно объем сферы радиуса R, корреляции тождественных пионов описываются выражениями [1,4]:

$$W(p_1,\ p_2) \backsim 1 + \frac{I^2(|\mathbf{q}|R)}{1+q_0^2\tau^2}, \quad I(x) = \frac{3(\sin x - x\cos x)}{x^3}. \tag{15}$$

Как показано в [1], формула (15) практически совпадает с

$$W(p_1,\ p_2) \backsim 1 + \frac{e^{-R^2|\mathbf{q}|^2/2,15}}{1+q_0^2\tau^2}. \tag{15$'$}$$

В непосредственной близости к максимуму интерференционного пика, когда $|\mathbf{q}|R \ll 1$, более точным является выражение [27]:

$$W(p_1,\ p_2) \backsim 1 + \frac{e^{-R^2|\mathbf{q}|^2/5}}{1+q_0^2\tau^2}. \tag{15$''$}$$

Если источники равномерно заполняют объем эллипсоида с полуосями A, B и C, ориентированными соответственно вдоль ортогональных направлений x, y и z, то в соответствии с [4] в формуле (15) аргумент $|\mathbf{q}|R$ надо заменить на $(q_x^2A^2 + q_y^2B^2 + q_z^2C^2)^{1/2}$, где q_x, q_y и q_z — соответствующие проекции вектора $\mathbf{q}$.

Часто применяется модель, в которой исходят из гауссова распределения координат источников (см., например, [1, 6, 9, 40—42]). Если предположить, что плотность источников

$$\rho \backsim \exp\left(-\left(\frac{x^2}{2A^2} + \frac{y^2}{2B^2} + \frac{z^2}{2C^2}\right)\right), \tag{16}$$

то при одновременном возбуждении и экспоненциальном распаде

$$W \backsim 1 + \frac{e^{-(q_x^2A^2+q_y^2B^2+q_z^2C^2)}}{1+q_0^2\tau^2}. \tag{17}$$

При $A = B = C = R_0$ формула (17) переходит в

$$W(p_1,\ p_2) \backsim 1 + \frac{e^{-R_0^2|\mathbf{q}|^2}}{1+q_0^2\tau^2}. \tag{18}$$

Если моменты высвечивания разных источников независимы и распределены по закону

$$P(t) \backsim e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}, \tag{19}$$

то выражение (17) следует заменить выражением

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + e^{-q_x^2 A^2 - q_y^2 B^2 - q_z^2 C^2 - q_0^2 \tau^2}. \tag{20}$$

В настоящее время точность измерения временно́го параметра τ невелика. Поэтому формулы (17) и (20) фактически эквивалентны. Обычно направление OZ выбирают параллельно оси симметрии реакции. Тогда в (17) и (20) следует положить $A = B$. Заметим еще, что, в отличие от (11) и (12), в последующих выражениях (15), (17), (18) и (20) не предлагается обязательное выполнение условия (14).

Разность импульсов $\mathbf{q}$ и разность энергий q_0 не являются независимыми величинами. В интересующих нас конфигурациях с близкими импульсами они, как известно, связаны равенством

$$q_0 = \mathbf{qu}, \tag{21}$$

где $\mathbf{u} = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)/(E_1 + E_2)$ — средняя скорость пары пионов. Если эта скорость направлена вдоль оси реакции OZ, то $q_0 = q_z u$. Тогда формула (20) принимает вид

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + e^{-B^2 (q_x^2 + q_y^2) - \left(\frac{C^2}{u^2} + \tau^2\right) q_0^2} \tag{22}$$

либо, в другой записи,

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + e^{-B^2 (q_x^2 + q_y^2) - (C^2 + \tau^2 u^2) q_z^2}. \tag{23}$$

Сопоставление формул (17), (20) и (22) показывает, что в общем случае «временна́я компонента» формируется тремя разными по своей природе факторами: длительностью высвечивания каждого из источников, разбросом моментов их «включения» и продольными размерами области генерации [39]. Если хотя бы один из указанных факторов приводит к очень большому временно́му параметру, интерференционный член оказывается отличным от нуля только в области очень малых q_0; наблюдение интерференции становится невозможным, когда эта область «замазывается» из-за конечного энергетического разрешения регистрирующей аппаратуры *.

* По сходным причинам практически невозможно наблюдать корреляции в излучении макроскопических радиоактивных источников. Несколько иначе обстоит дело с пионами, генерируемыми пучком первичных частиц в макроскопической мишени. Тогда тождественные пионы, образуемые в разных столкновениях, не дают наблюдаемого интерференционного пика, но такой пик возникает за счет совместной генерации в одном и том же акте. Поэтому, в принципе, все же возможно наблюдать интерференцию в экспериментах, в которых из-за недостаточного геометрического или временно́го разрешения нельзя определить, образовалась ли каждая пара пионов совместно или в разных актах. Однако высота пика соответственно падает, и при плохом разрешении он «поглощается» фоном.

На первый взгляд, это противоречит упомянутой выше аналогии с измерением угловых размеров звезд в астрономии. Действительно, как продольные размеры звезд, так и разброс моментов возбуждения различных атомов звездной хромосферы чрезвычайно велики. Почему же интерференционный эффект все же наблюдается, несмотря на конечную точность измерения частоты регистрируемых фотонов? Противоречие, разумеется, только кажущееся. Дело в том, что принципиальная общность между процессами генерации пионов в физике высоких энергий и испусканием фотонов звездами не исключает и наличия существенных различий. В физике высоких энергий экспериментатор «работает» в импульсно-энергетическом представлении (т. е. измеряет импульсы и энергии частиц), в то время как в астрономическом методе Ханбери — Брауна и Твисса речь идет о пространственно-временно́м представлении (когда фиксируются моменты регистрации фотонов в определенных точках пространства). В [42] показано, что в последнем случае интерференционный эффект перестает зависеть от продольных размеров области генерации и от временного разброса моментов включения источников *. Там же показано, что оба рассматриваемых подхода являются предельными случаями более общей промежуточной ситуации.

3. ДВЕ ОБЛАСТИ ГЕНЕРАЦИИ С РАЗЛИЧНЫМИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В рассмотренных ранее моделях предполагалось, что генерация происходит в пределах какой-то одной пространственно-временно́й области, единой для всех регистрируемых событий и для всех образующихся пионов. Это предположение не является обязательным, таких областей может быть несколько, в частности две. Один из примеров — столкновение быстрого антипротона с протоном, в котором размеры области генерации могут зависеть от того, произошла ли аннигиляция либо не произошла. Другой пример — столкновение релятивистских ядер. Размеры области генерации зависят здесь от параметра удара: при периферических ударах размеры могут быть примерно такими, как в нуклон-нуклонных взаимодействиях, при центральных ударах определяющую роль играют размеры ядер.

В указанных примерах несколько размеров появляется вследствие наличия нескольких различных процессов, в то время как каждое конкретное событие по-прежнему характеризуется каким-то одним характерным размером. Мыслимы и более сложные случаи, когда разные размеры приходится вводить для описания единого процесса

* Несколько условно можно сказать, что при регистрации координат тождественных частиц интерференционный эффект «реализуется вблизи детекторов», а при регистрации импульсов — вблизи источников [43].

генерации пионов. Предположим, например, что в каждом столкновении возникает несколько пионов, причем некоторые из них образуются непосредственно, другие — после распада промежуточных резонансов. Тогда одни пространственно-временны́е параметры связаны с областью генерации первой группы пионов, другие — с распадным пробегом резонансов. Существуют, конечно, и другие модели, в рамках которых естественным образом возникает несколько различных типов пространственно-временны́х параметров.

В работах [27, 44, 45] подробно проанализированы особенности парных корреляций тождественных пионов, связанных с наличием двух или нескольких разных размеров области генерации (см. также [46]). В частности, были рассмотрены крайние случаи, когда один из двух размеров очень велик или, наоборот, слишком мал. Очень большому размеру соответствует очень узкий интерференционный пик; поскольку регистрирующие устройства всегда обладают конечной разрешающей способностью, чрезмерно узкий пик оказывается ненаблюдаемым, и тогда в эксперименте обнаруживается только второй не слишком большой размер. Если один из размеров очень мал, соответствующий ему интерференционный пик очень широк. Тогда нарушаются предположения, приводящие к исходной формуле (9), одночастичные функции $U(p)$ и $V(p)$ в формуле (6) нельзя уже заменить константами. В этом случае в эксперименте также обнаруживается с достаточной четкостью только один интерференционный пик, связанный со вторым, не слишком малым размером.

Исходя из приведенных соображений, можно показать [27, 44], что в обеих крайних ситуациях вместо (9) возникает несколько более сложная формула

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + \lambda \langle \cos \{\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - q_0(t_1 - t_2)\}\rangle, \qquad (24)$$

в которой константа $\lambda < 1$, а усреднение ведется по пространственно-временно́й области, характеризуемой промежуточными параметрами R и τ, не слишком большими и не слишком малыми. Из (24) следует, что во всех последующих соотношениях, соответствующих различным конкретным моделям, перед интерференционным членом также может появиться множитель λ *. В принципе не исключена еще более сложная ситуация, когда имеется непрерывное множество возможных размеров области генерации (разброс параметров удара в ядерных столкновениях, непрерывный спектр энергий промежуточных резонансов и т. п.). Тогда введение только одной дополнительной величины λ оказывается недостаточным, поскольку может измениться даже форма резонансного пика [45].

* В дальнейшем мы еще раз вернемся к обсуждению различных обстоятельств, приводящих к формулам типа (24).

4. ДВИЖУЩИЕСЯ ИСТОЧНИКИ

В отличие от общих формул (9) и (10), бо́льшая часть последующих корреляционных соотношений относится к моделям, в которых пространственные и временны́е распределения источников пионов предполагаются независимыми. В других случаях указанная независимость может не иметь места. В частности, связь между пространственными и временны́ми параметрами возникает для движущихся источников [4, 5]; следовательно, ее надо учитывать и тогда, когда желательно сопоставлять корреляционные явления в различных системах отсчета [3, 26, 29].

Особенности корреляций, вызванные движением источников, хорошо видны в модели так называемой «горячей трубки», создаваемой вдоль пути релятивистской «частицы-снаряда» внутри тяжелого «ядра-мишени» [3, 47]. Если время высвечивания «трубки» велико по сравнению с временем пролета снаряда через мишень, корреляцию тождественных пионов разумно описывать формулами (17) или (20). Мыслим, однако, и другой вариант, когда излучение происходит практически мгновенно из тех точек ядра-мишени, в которых в каждый данный момент находится снаряд. Если снаряд движется прямолинейно со скоростью $\mathbf{v}$, то момент излучения t однозначно связан с мгновенной координатой источника $\mathbf{r}$ очевидным соотношением $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$. Тогда, учитывая (21), можно переписать формулу (9) в виде

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + \langle \cos(\mathbf{u} - \mathbf{v})\,\mathbf{q}t \rangle, \tag{25}$$

причем усреднение ведется по распределению интервалов времени t между последовательными моментами генерации двух рассматриваемых пионов или по соответствующему распределению положений источников вдоль траектории снаряда [47].

Указанные распределения определяют форму интерференционного пика, в то время как его ширина зависит от модуля вектора $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ и от угла между векторами $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ и $\mathbf{q}$. В частности, при параллельных векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ пик становится более широким, чем при антипараллельных. При фиксированных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ ширина пика увеличивается по мере приближения угла между $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ и $\mathbf{q}$ к $\pi/2$. Наличие (или отсутствие) указанных характерных особенностей легко может быть установлено экспериментально, поскольку скорость $\mathbf{v}$ обычно близка к скорости снаряда (во всяком случае — по направлению), а векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{q}$ непосредственно измеряемы для каждой пары пионов *.

Модель можно немного усложнить [47], предполагая, что координаты источников $\mathbf{r}$ задаются равенством $\mathbf{r} = \mathbf{v}t + \boldsymbol{\rho}$, в котором для

---

* Описываемая модель является еще одним примером процесса генерации, характеризуемого непрерывным набором пространственно-временны́х параметров (см. также [45]).

вектора $\boldsymbol{\rho}$ принято какое-либо распределение, не зависящее от t. Тогда в интерференционном члене формулы (25) появляется дополнительный множитель, связанный с законом распределения $\boldsymbol{\rho}$, он зависит от разности импульсов и имеет такую же структуру, как в моделях с неподвижными источниками. В частности, при гауссовом распределении (16) вместо (25) получим

$$W(p_1,\ p_2) \backsim 1 + \langle \cos (\mathbf{u} - \mathbf{v})\, \mathbf{q}t \rangle\, e^{-q_x^2 A^2 - q_y^2 B^2 - q_z^2 C^2}. \qquad (26)$$

Отмеченные выше качественные особенности процесса, вытекающие из формулы (25), частично имеют место и в обсуждаемой более сложной модели. Для ультрарелятивистских снарядов и пионов $|\mathbf{u}| \approx \approx |\mathbf{v}| \approx 1$, поэтому для частиц, летящих вперед, $\langle \cos (\mathbf{u} - \mathbf{v})\, \mathbf{q}t \rangle \simeq \simeq 1$, т. е. движение снаряда перестает сказываться на двухчастичных корреляциях.

Корреляционные формулы типа (26) примерно соответствуют и несколько иной ситуации, когда нет никакой трубки, а речь идет о совокупности источников, движущихся совместно с постоянной общей скоростью [4, 26, 29]. В более сложных случаях разные источники (или группы источников) могут двигаться с разными скоростями [5]. В частности, именно так обстоит дело в любой коллективной модели, описывающей генерацию пионов с привлечением термодинамических или гидродинамических представлений; подробный анализ структуры парных корреляций, соответствующих таким моделям, приведен в [45, 48—54] *.

Ниже мы ограничимся в качестве простейшего примера кратким описанием $\pi\pi$-корреляций, возникающих в системе двух файрболов, движущихся вдоль оси реакции в противоположных направлениях со скоростями $\mathbf{v}$ и $-\mathbf{v}$; в частности, это может соответствовать двум областям фрагментации: мишени и снаряда [3, 4]. Одночастичный кинематический анализ выявит в таком процессе две почти изолированные группы частиц, импульсы которых концентрируются вблизи двух разных средних значений, но оставит открытым вопрос о пространственном расположении соответствующих источников. Недостающую информацию можно получить исследуя корреляции тождественных пионов: если в отобранных парах оба пиона относятся к одной и той же группе, ширина корреляционного пика определяется размерами соответствующего файрбола; для измерения расстояния между файрболами надо отбирать пары, составленные пионами из разных кинематических групп [4] **.

* В отличие от большинства предшествующих публикаций, авторы указанных работ отказались от упрощенного предположения о примерной независимости одночастичных спектров от импульсов π-мезонов.

** Импульсы таких пионов, как правило, сильно различаются; однако пионы, вылетающие почти перпендикулярно к оси реакции, могут обладать достаточно близкими импульсами.

5. КОРРЕЛЯЦИИ ПРИ РАСПАДЕ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ РЕЗОНАНСОВ

Генерация пионов часто происходит не непосредственно, а в результате распада промежуточных резонансов. Такие процессы отчасти аналогичны рассмотренной ранее модели «трубки с движущимся источником», поскольку, грубо говоря, расстояние от точки генерации резонанса до точки, в которой он распадается, пропорционально интервалу времени между моментами генерации и распада. Корреляции тождественных частиц в различных процессах с участием промежуточных резонансов первоначально были подробно проанализированы в работах [2, 26, 40, 55—58], а затем во многих последующих публикациях [27, 28, 45, 47, 59—64] *.

Характерные особенности корреляций тождественных пионов, возникающие за счет промежуточных резонансов, видны уже в простейшем случае, когда один из пионов образуется в некоторой точке совместно с резонансом, а второй пион возникает в результате распада этого резонанса. Примером может служить совместная генерация системы $(\pi^+ + \rho^0)$ с последующим распадом $\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$. В конечном состоянии имеем два π^+-мезона с импульсами p_1 и p_2. Это состояние может быть реализовано двумя путями, в одном из них пион с импульсом p_1 генерируется непосредственно, в то время как пион с импульсом p_2 образуется в результате распада ρ-мезона, во втором случае ситуация обратная. Поэтому симметризованная амплитуда является суммой двух резонансных амплитуд, из-за чего в вероятности процесса появляется интерференционный член.

Можно показать, что соответствующее выражение имеет вид

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + \frac{1}{1+(\mathbf{qL}-q_0T)^2}. \tag{27}$$

Здесь T — среднее время жизни резонанса, $\mathbf{L} = \mathbf{v}T$ — средний распадный пробег резонанса, $\mathbf{v}$ — его скорость. Поскольку величина $(\mathbf{qL} - q_0T)$ является инвариантом, формула (27) справедлива в любой системе отсчета **. Таким образом, в рассматриваемой ситуации пространственно-временные параметры области генерации определяются свойствами промежуточного резонанса.

Пользуясь соотношением (21), можно переписать формулу (27) в виде

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + \frac{1}{1+\{\mathbf{q}(\mathbf{u}-\mathbf{v})T\}^2}, \tag{28}$$

---

* Некоторые качественные замечания, частично затрагивающие обсуждаемый вопрос, можно найти также в ранней публикации [65].

** При выводе (27) предполагается, что ширина резонанса Γ очень мала по сравнению с размерами кинематически допустимой области фазового пространства. Кроме того, в соответствии с общим подходом, изложенным в разд. 1, внутренняя энергия резонанса E_R считалась случайной величиной, изменяющейся от события к событию в пределах интервала, перекрывающего ширину Γ. Окончательное выражение (27) получается после усреднения по E_R.

сходном по своей структуре с (25). Поэтому, как и в модели «трубки», можно при желании «регулировать» ширину интерференционного пика, отбирая события с нужными направлениями векторов **u**, **v** и **q**. Это может пригодиться при работе с очень долгоживущими резонансами, когда ширина интерференционного пика мала по сравнению с ошибками измерений (в этой связи см. также [2, 55, 56, 58]).

Формула (27) выведена в предположении, что резонанс и один из двух тождественных пионов образуются одновременно в какой-то одной общей точке. Это предположение не всегда соответствует действительности. Примером может служить столкновение ядер, в котором пион и резонанс могут генерироваться за счет взаимодействий различных пар нуклонов, т. е. в разные моменты и в разных точках ядра-мишени. Тогда вместо (27) возникает более сложное выражение

$$W(p_1,\ p_2) \backsim 1 + \frac{\langle \cos(r_1 - r_2)(p_1 - p_2)\rangle}{1 + (\mathbf{q}\mathbf{L} - q_0 T)^2}, \qquad (29)$$

в котором усреднение ведется по распределениям 4-точек r_1 и r_2. Это еще один случай, когда процесс генерации нельзя описать только одним набором пространственно-временны́х параметров R и τ. Такого рода особенности корреляций тождественных пионов, связанные с наличием промежуточных резонансов, более детально рассмотрены в публикациях [27, 47, 59, 60, 63, 64].

6. ВЛИЯНИЕ КОРРЕЛЯЦИЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ МАСС СИСТЕМЫ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПИОНОВ

В отличие от формулы (27) и исходной формулы (9), справедливых в любой системе отсчета, соотношения типа (17) или (20) предполагают наличие некоторой выделенной системы отсчета, в которой все одночастичные источники пионов покоятся; они справедливы именно в этой системе отсчета и тем самым не являются лоренц-инвариантными. В принципе, от такого ограничения можно избавиться, если, следуя работе [66], записать пространственно-временно́е распределение источников в лоренц-инвариантном виде, переходящем в системе покоя источников в выражения (16) и (19). Подставляя затем указанное распределение в общее соотношение (9), можно получить конкретное выражение для вероятности $W(p_1, p_2)$, которое также оказывается лоренц-инвариантным и переходит в (20), если в качестве системы отсчета выбрана система покоя источников *.

Другие авторы поступают иначе. Уже в ранней работе [1], а затем и во многих последующих работах предлагалось исследовать корреляции в зависимости от эффективной массы M рассматриваемой системы тождественных пионов. Здесь мыслимы различные конкретные

---

* Для перевода формулы (20) в движущуюся систему отсчета можно, конечно, воспользоваться непосредственно и лоренцевыми преобразованиями величин q_x^2, q_y^2, q_z^2 и q_0^2.

параметризации, но обычно пользуются соотношением

$$W(Q_n) \backsim 1 + e^{-B^2Q_n^2}, \tag{30}$$

в котором в случае n-частичных корреляций $Q_n^2 = M^2 - n^2m_\pi^2$. Такой подход кажется привлекательным по нескольким причинам: он лоренц-инвариантен, связан только с одной кинематической переменной и позволяет рассматривать с единой точки зрения корреляции любой кратности.

С другой стороны, этот подход не всегда приводит к адекватному описанию реальных корреляций. Он очевидным образом непригоден для излучающей области, не обладающей сферической симметрией, но и при наличии такой симметрии даже в простейшем случае двухчастичных корреляций они (корреляции) могут зависеть не только от величины Q_2^2. Рассмотрим для примера случай, когда распределение моментов излучения задается гауссианом (19), а пространственное распределение источников — гауссианом (16), в котором параметры A, B и C считаются одинаковыми ($A^2 = B^2 = C^2 = R_0^2$). Тогда двухчастичные корреляции описываются выражением

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + e^{-R_0^2\mathbf{q}^2 - \tau^2 q_0^2}. \tag{31}$$

Легко убедиться, что

$$Q_2^2 = \mathbf{q}^2 - q_0^2. \tag{32}$$

Поэтому ясно, что формула (30) при $n = 2$ совпадает с формулой (31) не всегда, а только при отборе таких пар, в которых энергии пионов одинаковы (для этих пар параметр $B = R_0$). В общем же случае корреляции, зависящие от двух кинематических величин $\mathbf{q}^2$ и q_0^2, не могут быть описаны однопараметрическим выражением (30) *.

Заметим, впрочем, что формулу (31) можно при желании записать в виде, сходном с (30), но тогда в показателе экспоненты вместо константы B^2 будет стоять множитель, имеющий довольно сложную структуру [68]. Для этого в выражениях $R_0^2\mathbf{q}^2 - \tau^2 q_0^2$ и $\mathbf{q}^2 - q_0^2$ надо с помощью соотношения (21) заменить q_0^2 на $\mathbf{q}^2\mathbf{u}^2\cos^2\theta$, где θ — угол между $\mathbf{q}$ и $\mathbf{u}$, после чего (31) переходит в

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + e^{-\frac{R_0^2 + \tau^2\mathbf{u}^2\cos^2\theta}{1 - \mathbf{u}^2\cos^2\theta} Q_2^2}. \tag{33}$$

Из соотношения (33) следует, что если реальные корреляции описываются выражением типа (31), а экспериментальные данные обраба-

* Подчеркнем, что речь идет не о том, что формула (31) «лучше» формулы (30), а только о неэквивалентности этих выражений. Выбор подходящей параметризации экспериментальных данных диктуется физикой исследуемого процесса. Генерации пионов в столкновениях релятивистких ядер больше соответствуют соотношения типа (31) или (20), в то время как с помощью параметризации типа (30) предпочтительней описывать e^+e^--аннигиляцию (см., например, [67]).

тываются с помощью более компактного выражения

$$W(p_1,\ p_2) \backsim 1 + e^{-B^2Q_2^2}, \tag{30'}$$

то можно прийти к ошибочному заключению о зависимости пространственно-временно́й структуры процесса генерации от скорости пионов, хотя на самом деле такая зависимость отсутствует (см. также [27]).

7. ТРЕХЧАСТИЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ

Помимо двухчастичных корреляций тождественных пионов, изучаемых в большинстве экспериментальных работ, в последнее время все чаще дополнительно исследуются и трехчастичные корреляции. При проведении соответствующего теоретического анализа (см. [22, 46, 58, 68—80]) желательно помимо общих свойств трехпионных корреляций рассмотреть также вопрос о возможном их влиянии на двухпионные корреляции *. Кроме того, следует обсудить степень пригодности параметризации (30), чаще всего используемой в экспериментах по 3π-корреляциям.

Исходим из модели с тремя неподвижными независимыми одночастичными источниками, расположенными в точках $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ и генерирующих тождественные пионы с 4-импульсами p_α, p_β, p_γ в моменты t_1, t_2 и t_3. Соответствующая симметризованная амплитуда

$$\begin{aligned}A(p_\alpha,\ p_\beta,\ p_\gamma) \backsim\ & e^{-i(r_1p_\alpha+r_2p_\beta+r_3p_\gamma)} + e^{-i(r_1p_\beta+r_2p_\gamma+r_3p_\alpha)} + \\ & + e^{-i(r_1p_\gamma+r_2p_\alpha+r_3p_\beta)} + e^{-i(r_1p_\beta+r_2p_\alpha+r_3p_\gamma)} + e^{-i(r_1p_\alpha+r_2p_\gamma+r_3p_\beta)} + \\ & + e^{-i(r_1p_\gamma+r_2p_\beta+r_3p_\alpha)},\end{aligned} \tag{34}$$

где 4-точки $r_j \equiv (\mathbf{r}_j,\ t_j)$.

Плотность вероятности

$$W(p_\alpha,\ p_\beta,\ p_\gamma) \backsim |A(p_\alpha,\ p_\beta,\ p_\gamma)|^2$$

содержит 36 членов, которые надо еще усреднить по распределениям 4-точек r_j. Если предположить эти распределения независимыми и одинаковыми для всех источников, то

$$\begin{aligned}W(p_\alpha, p_\beta, p_\gamma) \backsim 1 & + \langle\cos\{r_1(p_\alpha - p_\beta) + r_2(p_\beta - p_\gamma) + r_3(p_\gamma - p_\alpha)\}\rangle + \\ & + \langle\cos\{r_1(p_\alpha - p_\gamma) + r_2(p_\beta - p_\alpha) + r_3(p_\gamma - p_\beta)\}\rangle + \\ & + \langle\cos(r_1 - r_2)(p_\alpha - p_\beta)\rangle + \langle\cos(r_2 - r_3)(p_\beta - p_\gamma)\rangle + \\ & + \langle\cos(r_3 - r_1)(p_\gamma - p_\alpha)\rangle.\end{aligned} \tag{35}$$

При совпадении 4-импульсов p_α, p_β и p_γ возникает интерференционный максимум, превышающий в 6 раз уровень вероятности, соот-

* В общем случае n-кратные корреляции могут влиять на корреляции кратности $(n - 1)$. Аналогично парные корреляции могут влиять на одночастичные импульсные распределения [77, 78].

ветствующий достаточно большим разностям всех парных комбинаций импульсов *.

Если далее предположить, что моменты излучения распределены в соответствии с (19), а координаты источников — в соответствии с законом (16), в котором положено $A = B = C = R_0$, то формула (35) принимает вид

$$W(p_\alpha, p_\beta, p_\gamma) \backsim 1 + 2e^{-\frac{1}{2}R_0^2(\mathbf{q}_{\alpha\beta}^2+\mathbf{q}_{\beta\gamma}^2+\mathbf{q}_{\gamma\alpha}^2)-\frac{1}{2}\tau^2(q_{0,\alpha\beta}^2+q_{0,\beta\gamma}^2+q_{0,\gamma\alpha}^2)} + \\ + e^{-R_0^2\mathbf{q}_{\alpha\beta}^2-\tau^2q_{0,\alpha\beta}^2} + e^{-R_0^2\mathbf{q}_{\beta\gamma}^2-\tau^2q_{0,\beta\gamma}^2} + e^{-R_0^2\mathbf{q}_{\gamma\alpha}^2-\tau^2q_{0,\gamma\alpha}^2}, \tag{36}$$

где $\mathbf{q}_{ik} = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_k$; $q_{0,ik} = E_i - E_k$.

Таким образом, рассматриваемые корреляции имеют довольно сложную структуру и не сводятся ни к совокупности двухчастичных корреляций, ни к чисто трехчастичным [68, 75, 76]. Кроме того, интеграция (36) по p_γ, вообще говоря, не приводит для остальных двух импульсов p_α и p_β к выражению типа

$$W(p_\alpha, p_\beta) \backsim 1 + e^{-R_0^2\mathbf{q}_{\alpha\beta}^2-\tau^2q_{0,\alpha\beta}^2}, \tag{31'}$$

т. е. наличие трех тождественных пионов в принципе изменяет и форму двухчастичных корреляций.

Ситуация упрощается, если параметры R_0 и τ достаточно велики. Тогда события, в которых все три импульса относятся к единому интерференционному пику, встречаются очень редко, т. е. в большинстве событий по крайней мере для одной пары пионов разность 4-импульсов оказывается очень большой. Пусть, например, $|p_\alpha - p_\beta|^2 \gg \frac{1}{R_0^2}, \frac{1}{\tau^2}$. Тогда

$$W(p_\alpha, p_\beta, p_\gamma) \backsim 1 + e^{-R_0^2\mathbf{q}_{\alpha\gamma}^2-\tau^2q_{0,\alpha\gamma}^2} + e^{-R_0^2\mathbf{q}_{\beta\gamma}^2-\tau^2q_{0,\beta\gamma}^2}. \tag{37}$$

В этом случае формула (37) фактически совпадает с (31′), т. е. трехчастичные корреляции сводятся к совокупности двухчастичных. Действительно, при любом импульсе p_γ хотя бы одно из слагаемых в (37) близко к нулю: первая экспонента исчезает, если $|p_\beta - p_\gamma|^2 \leqslant 1/R_0^2, 1/\tau^2$, вторая — при $|p_\alpha - p_\gamma|^2 \leqslant 1/R_0^2, 1/\tau^2$. Ясно также, что в описываемых условиях влияние трехчастичных корреляций на двухчастичные полностью отсутствует (см. также [68, 69, 76]).

Как уже отмечалось, в настоящее время при экспериментальном исследовании трехпионных корреляций обычно используют распределение величины $Q_3^2 = M_{3\pi}^2 - 9m_\pi^2$. Выше было показано, что сходная параметризация не всегда пригодна даже для описания двухчастичных корреляций, при переходе к трехчастичным корреляциям ее недостатки проявляются еще более резко. Действительно, из оче-

---

* Этим же свойством обладает и приведенное в [46] более общее выражение, содержащее 36 слагаемых; оно переходит в (35), если предположить, что все одночастичные источники распределены одинаково.

видных четырехмерных соотношений

$$\left.\begin{aligned} M_{3\pi}^2 &= (p_\alpha + p_\beta + p_\gamma)^2 = 3m_\pi^2 + 2p_\alpha p_\beta + 2_\beta p_\gamma + 2p_\gamma p_\alpha; \\ q_{\alpha\beta}^2 &= (p_\alpha - p_\beta)^2 = 2m_\pi^2 - 2p_\alpha p_\beta; \\ q_{\beta\gamma}^2 &= (p_\beta - p_\gamma)^2 = 2m_\pi^2 - 2p_\beta p_\gamma; \\ q_{\gamma\alpha}^2 &= (p_\gamma - p_\alpha)^2 = 2m_\pi^2 - 2p_\gamma p_\alpha \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

следует:

$$Q_3^2 = -(q_{\alpha\beta}^2 + q_{\beta\gamma}^2 + q_{\gamma\alpha}^2) = (\mathbf{q}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{q}_{\beta\gamma}^2 + \mathbf{q}_{\gamma\alpha}^2) - (q_{0,\alpha\beta}^2 + q_{0,\beta\gamma}^2 + q_{0,\gamma\alpha}^2). \tag{39}$$

Сопоставление (36) и (39) ясно показывает, что выражение (36) нельзя выразить с помощью одной только кинематической величины (39).

Для двухчастичных корреляций выражения (30′) и (31) совпадают, если отбирать события, в которых пионы имеют одинаковые энергии. В случае трехчастичных корреляций аналогичная процедура переводит (39) и (36) соответственно в

$$Q_3^2 = \mathbf{q}_{\alpha\beta}^2 + \mathbf{q}_{\beta\gamma}^2 + \mathbf{q}_{\gamma\alpha}^2; \tag{39′}$$

$$W(p_\alpha, p_\beta, p_\gamma) \infty 1 + 2e^{-\frac{1}{2}R_0^2Q_3^2} + e^{-R_0^2Q_{2,\alpha\beta}^2} + e^{-R_0^2Q_{2,\beta\gamma}^2} + e^{-R_0^2Q_{2,\gamma\alpha}^2}. \tag{36′}$$

Видно, что даже в этом частном подходе трехчастичные корреляции имеют более сложную структуру, чем это следует из простой формулы (30).

В [75] подчеркивается, что совместное исследование двух- и трехпионных корреляций интересно с точки зрения сопоставления пространственно-временных параметров, получаемых двумя разными и в значительной степени независимыми способами. Из сказанного выше следует, что, имея в виду эту цель, не следует параметризовать экспериментальные данные с помощью выражения (30) с $n = 2$ и $n = 3$; более уместно использовать выражения типа (31) и (36).

Как уже отмечалось, при анализе двухчастичных корреляций в исходной формуле (9) перед интерференционным членом приходится вводить дополнительный множитель λ. Аналогичный множитель следует ввести и в формулу (36); не исключено, что потребуется даже два таких множителя, один перед первой экспонентой, второй — перед остальными тремя (см. также [68, 75]). В результате и без того сложное выражение (36) становится еще сложнее. Поэтому может оказаться целесообразным изменить сам подход к трехпионным корреляциям и перейти к моделированию с помощью Монте-Карло с последующей подгонкой под эксперимент и фитированием свободных параметров R_0 и τ. Вместо розыгрыша случайных событий можно в качестве исходного пункта использовать тройки некоррелированных пионов, взятых из троек различных реальных событий [75]. Аналогичные подходы возможны, конечно, и при исследовании корреляций другой кратности *.

8. КОРРЕЛЯЦИИ В СИСТЕМЕ МНОГИХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПИОНОВ

Поскольку в столкновениях ультрарелятивистских тяжелых ядер образуется большое число тождественных пионов, не исключено, что в дальнейшем будут поставлены эксперименты по изучению интерференционных корреляций пионов высокой кратности ($n \gg 1$). Поэтому имеет смысл остановиться кратко на некоторых общих свойствах таких корреляций [22—24, 46, 69, 76, 86]. Если имеются одночастичные источники, расположенные в 4-точках $r_1, r_2, \ldots, r_n$, то симметризованная амплитуда генерации n тождественных пионов содержит $n!$ слагаемых в соответствии с полным числом возможных перестановок 4-импульсов $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_n}$. Ее можно записать в виде

$$A(p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_n}) \backsim \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} e^{-i(r_1 p_{\alpha_1} + r_2 p_{\alpha_2} + \ldots + r_n p_{\alpha_n})}. \quad (40)$$

В выражении (40) индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ могут принимать любые целочисленные значения от 1 до n, причем для каждого отдельного слагаемого среди относящихся к нему индексов нет совпадающих. Соответствующая вероятность

$$W(p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_n}) \backsim |A(p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots, p_{\alpha_n})|^2$$

содержит $(n!)^2$ слагаемых, в том числе $n!$ диагональных членов, каждый из которых равен единице, и $(n! - 1)\, n!$ недиагональных членов, которые после усреднения по распределению координат $r_1, r_2, \ldots, r_n$ оказываются зависящими от разностей импульсов $(p_{\alpha_i} - p_{\alpha_k})$ при различных комбинациях индексов α_i и α_k. Если указанные разности достаточно велики, все недиагональные члены исчезают, и вероятность определяется только суммой диагональных членов, т. е. $W \backsim n!$. С другой стороны, при полном совпадении импульсов $(p_{\alpha_1} = p_{\alpha_2} = \ldots p_{\alpha_n})$ все $n!$ слагаемых в выражении (40) также равны друг другу, и тогда вероятность $W \backsim (n!)^2$. В результате оказывается, что вероятность в максимуме интерференционного пика превосходит в $n!$ раз ее значение вне области интерференции.

Другая важная особенность интерференционного пика связана с зависимостью его «ширины» в импульсном пространстве от параметров R, τ и n. Можно показать [76, 86, 87], что в пределах интерференционного пика энергии и импульсы пионов сближаются по ме-

---

* Тема моделирования, связанного с изучением корреляций тождественных пионов, выходит за рамки настоящего обзора. С некоторыми типичными примерами такого моделирования можно познакомиться в публикациях [31,48,52,57, 69,71,75,76,79—85].

ре увеличения кратности n. Для характерной разности импульсов имеет место соотношение типа

$$|\Delta \mathbf{p}| \backsim 1/R\sqrt{n}. \tag{41}$$

Значение импульса $\mathbf{p}_0$, определяющего положение интерференционного пика, остается произвольным. При отборе событий с фиксированным значением $\mathbf{p}_0$ возникает угловая коллимация с характерным углом раствора

$$|\Delta\theta| \backsim \frac{1}{R\,|\mathbf{p}_0|\,\sqrt{n}}. \tag{42}$$

Следовательно, при $n \gg 1$ происходят сильная монохроматизация и угловая коллимация пионов, образующих интерференционный максимум, возникают узкие «струи» частиц с примерно одинаковыми энергиями. *

Внешне это несколько напоминает явления, которые имели бы место в оптическом лазере, если бы из него был удален резонатор.

Сходство с оптическим лазером усиливается, если пионы генерируются не непосредственно, а в результате распада одинаковых промежуточных резонансов [89—91], поскольку такие резонансы являются аналогами возбужденных атомов в оптике. Вместе с тем их наличие не гарантирует появления «пионного лазера», так как вынужденное излучение может играть заметную роль только для покоящихся узких резонансов, когда образующиеся пионы имеют примерно одинаковые энергии. К сожалению, в реальных условиях рассматриваемые резонансы движутся с большими и сильно различающимися лоренц-факторами, из-за чего образующиеся при их распаде пионы обладают очень широким импульсным спектром (разброс энергий очень велик по сравнению с энергетической шириной резонанса Г). В таких условиях наличие промежуточных резонансов

* Следует, правда, иметь в виду, что при достаточно большой кратности одинаково заряженных пионов необходимо учитывать сильное влияние кулоновского отталкивания. К сожалению, пока этот вопрос рассмотрен только применительно к двухчастичным корреляциям (см., например, [30, 77]). Тогда учет кулоновского взаимодействия сводится к умножению измеряемой в эксперименте двухчастичной вероятности $W(p_1, p_2)$ на поправочный множитель

$$e^{2\pi\eta}-1)/2\pi\eta, \quad \eta = m_\pi e^2/g\hbar. \tag{43}$$

Здесь q — модуль разности импульсов пионов в системе центра генерации пары. Из (43) следует, что кулоновское отталкивание играет заметную роль только для пионов с близкими импульсами, когда

$$q \lesssim \tilde{q} = \pi m_\pi\, e^2/\hbar. \tag{44}$$

Отметим в этой связи странный результат, опубликованный в работе [88], согласно которому кулоновское взаимодействие следует учитывать и при $q > \tilde{q}$, а при $q < \tilde{q}$ оно приводит к поправкам, сильно превышающим тех, которые следуют из (43). Можно думать, что численные расчеты [88] содержат какую-то ошибку (см. [19]).

приводит в основном только к переопределению параметров R и τ, которые помимо пространственно-временны́х размеров области генерации самих резонансов включают также их пробеги и времена жизни.

В последнее время появились публикации, в которых обсуждаются различные возможности объяснения так называемых «кентавров» —загадочных событий, изредка наблюдаемых в экспериментах с космическими лучами [92]. В частности, высказывается предположение, что искомое объяснение может быть связано с идеей о реальном существовании «пионного лазера» [89—91, 93]. Изложенные выше качественные соображения свидетельствуют о том, что к такому подходу следует отнестись с большой осторожностью, тем более что само существование кентавров все еще не подтверждено экспериментами на ускорителях.

9. МНОГОЧАСТИЧНЫЕ ИСТОЧНИКИ

Использованное ранее предположение об одночастичности источников пионов не является обязательным. В принципе, не исключено, что какая-то группа пионов испускается одновременно из одной общей точки. Таких многочастичных источников может быть и несколько, причем в общем случае к ним могут добавляться несколько одночастичных источников. Следуя работам [46, 94], посмотрим, как сказывается это усложнение на корреляциях тождественных пионов.

Отметим прежде всего, что для тождественных пионов, относящихся к одному общему многочастичному источнику, симметризация влияет на импульсное распределение иначе, чем для пионов, образующихся в разных одночастичных источниках, удаленных друг от друга на расстояния, большие по сравнению с длиной волны излучаемых частиц *. Поясним это различие на примере двухчастичных источников. Когда оба пиона генерируются в одной точке и одновременно, экспоненциальные множители в выражении (6) совпадают. Поэтому двухчастичную амплитуду можно записать в виде

$$A\ (p_1,\ p_2) \backsim U\ (p_1)\ V\ (p_2) + U\ (p_2)\ V\ (p_1). \tag{45}$$

Если, как и раньше, считать одночастичные амплитуды $U\ (p)$ и $V\ (p)$ настолько плавными функциями, что их можно заменить константами, то двухчастичная амплитуда (45), а с нею и вероятность соответствующей конфигурации перестают зависеть от разности импульсов. Если же речь идет о пионах из двух разных одночастичных источников, то при $p_1 = p_2$ вероятность вдвое превосходит уровень, отвечающий достаточно большой разности импульсов.

* Если расстояния между источниками сопоставимы с длиной волны излучаемых пионов, то такие источники нельзя считать назависимыми, не влияющими друг на друга (см., например, [95]). Оставляя в стороне этот сложный вопрос, мы в дальнейшем будем рассматривать только два предельных случая, когда расстояния между источниками много меньше длины волны (многочастичный источник) либо много больше длины волны (независимые источники).

Нас будут интересовать парные корреляции в инклюзивном подходе, когда фиксируются импульсы каких-либо двух тождественных частиц и производится усреднение по всем остальным импульсам. Кроме того, импульсы всех частиц предполагаются настолько большими, что интерференционные максимумы занимают только очень малую часть фазового объема и можно пренебречь теми редкими событиями, в которых один и тот же максимум образуется более чем двумя частицами. В этих условиях каждая пара пионов может рассматриваться независимо от остальных пар. Следовательно, при вычислении вероятности процесса можно ограничиться простым суммированием двухчастичных вероятностей, связанных с различными парами пионов, помня, что для двух пионов из одного источника двухчастичная вероятность не зависит от разности импульсов, а для пионов из разных источников она в соответствии с (9) пропорциональна $(1 + \langle\cos \Delta p \cdot \Delta r\rangle)$.

Дальнейшее сводится к комбинаторике, учитывающей число независимых источников и кратность каждого из них. Для пояснения сказанного рассмотрим два примера. Пусть n пионов испускаются одновременно из какой-то одной точки $r_1 \equiv (\mathbf{r}_1,\ t_1)$, а другие m пионов генерируются во второй общей точке $r_2 \equiv (\mathbf{r}_2,\ t_2)$ также одновременно, но, вообще говоря, в другой момент времени. Обозначим W_0 вероятность процесса вне области интерференции, когда разности импульсов всех пар пионов достаточно велики. Как изменится вероятность, если сближать импульсы каких-то двух пионов, не изменяя существенно импульсы остальных $(n + m - 2)$ частиц? Ответ зависит от того, какая именно пара выбрана из общего числа $(n + m)(n + m - 1)/2$ пар. При сближении импульсов пионов, относящихся к одному и тому же источнику, вероятность не изменяется, а при сближении импульсов пионов из разных источников вероятность процесса увеличивается за счет появления дополнительного слагаемого $\langle\cos (p_1 - p_2)(r_1 - r_2)\rangle$. Число комбинаций первого типа равно $n(n - 1)/2 + m(m - 1)/2$, а во втором случае число комбинаций равно nm. Поэтому искомая вероятность

$$W = \frac{2W_0}{(n+m)(n+m-1)} \left\{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} + nm\,(1 + \langle\cos (p_1 - p_2)(r_1 - r_2)\rangle)\right\}$$

или

$$W = W_0 \{1 + \lambda \langle\cos (p_1 - p_2)(r_1 - r_2)\rangle\}, \qquad \lambda = 2nm/(n+m) \times (n + m - 1). \tag{46}$$

Множитель $\lambda = 0$ при $n = 0$ или $m = 0$, $\lambda = 1$ при $n = m = 1$, в остальных случаях $\lambda < 1$. Если считать n и m достаточно большими $(n,\ m \gg 1)$ и ввести $\gamma = n/m$, то (46) переходит в

$$W = W_0 \left\{1 + \frac{2\gamma}{(1+\gamma)^2} \langle\cos (p_1 - p_2)(r_1 - r_2)\rangle\right\}. \tag{47}$$

Кратности источников n и m могут флуктуировать, изменяясь при переходе от одного конкретного акта генерации к другому. Тогда в формуле (46) величины $2nm$ и $(n+m)(n+m-1)$ следует заменить их средними значениями. Если n и m флуктуируют независимо друг от друга и в соответствии с законами Пуассона, то формула (46) переходит в

$$W = W_0 \{1 + \lambda \langle\cos(p_1 - p_2)(r_1 - r_2)\rangle\}, \quad \lambda = 2\bar{n}\bar{m}/(\bar{n}+\bar{m})^2. \qquad (46')$$

В этом случае формула (47) оказывается справедливой и при малых кратностях, если положить в ней $\gamma = \bar{n}/\bar{m}$. Отметим еще, что соотношения (46) и (47) аналогичны по своей структуре с рассмотренной ранее формулой (24), описывающей парные корреляции тождественных пионов при наличии двух различающихся характерных размеров области генерации.

В качестве второго примера рассмотрим N многочастичных источников, расположенных в случайных точках, причем каждый из них мгновенно испускает по n тождественных пионов. Тогда число пар, относящихся к одному и тому же источнику, равно $Nn(n-1)/2$, а число пар из разных источников равно $n^2N(N-1)/2$. Это сразу приводит к формуле

$$W = W_0 \{1 + \lambda \langle\cos(p_1 - p_2)(r_1 - r_2)\rangle\}, \; \lambda = n(N-1)/(nN-1). \qquad (48)$$

Если $n \gg 1$, то в этой формуле множитель

$$\lambda = 1 - 1/N. \qquad (49)$$

Такой же результат получается, когда кратности всех источников независимо флуктуируют по закону Пуассона с совпадающими средними значениями $\bar{n}$, причем в этом случае не требуется выполнения условия $\bar{n} \gg 1$. Если к тому же величина N также флуктуирует, то

$$\lambda = 1 - \overline{N}/\overline{N^2}. \qquad (50)$$

10. КРИТИКА МОДЕЛЕЙ С УЧАСТИЕМ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Аналогичным способом можно легко получить выражения, описывающие парные корреляции тождественных пионов в самых разнообразных моделях с участием многочастичных источников [46]. Во всех таких моделях возникают соотношения типа (24), содержащие перед интерференционным членом множитель $\lambda < 1$. В этом пункте уместно указать на ряд публикаций, в которых введение величины λ связывается с предположением об излучении пионов в так называемых когерентных состояниях или в смеси когерентных и некогерентных состояний (см. [30, 45, 72—74, 96—101]). Суть дела состоит в том, что между частицами, относящимися к одному и тому же когерентному состоянию, отсутствуют корреляции. Считается, что отсюда следует принципиальная возможность определения фактической роли когерентных состояний путем измерения λ.

Нам кажется, что возможны сомнения в реалистичности такой программы, поскольку отличие λ от единицы может быть связано с более тривиальными факторами, например с наличием нескольких характерных пространственно-временных параметров области генерации. К тому же когерентные состояния, строго говоря, содержат с определенным весом сколь угодно большое число частиц. Поэтому конечность массы покоя пионов в совокупности с жесткой ограниченностью полной энергии изучаемых систем препятствует буквальному использованию аппарата когерентных состояний. Заметим еще, что из закона сохранения электрического заряда следует невозможность существования любых суперпозиций состояний с разными зарядами (так называемое правило суперотбора), тем самым — и невозможность существования когерентных состояний, если речь идет о заряженных тождественных пионах *.

Между тем хорошо известно, что отсутствие интерференционных корреляций характерно не только для частиц, относящихся к когерентному состоянию, но также и для любого фиксированного числа частиц, находящихся в одном и том же квантовом состоянии (это обстоятельство неоднократно отмечалось в литературе: см., например, [4, 7, 8, 23, 24, 30, 52, 88, 102, 103]). То же самое, как мы видели, справедливо и для пионов, образованных одним и тем же многочастичным источником *. Такой подход к «λ-проблеме», также приводящий к появлению множителя $\lambda < 1$, но не предполагающий наличия бесконечного числа частиц, кажется нам более соответствующим реальной ситуации. Кроме того, оказывается, что значения λ в формулах типа (47), (49) или (50), соответствующие достаточно большой кратности каждого из источников, в точности совпадают с теми значениями, которые следуют из построений с когерентными состояниями, и то же самое относится к любым другим моделям с участием многочастичных источников (более подробно см. в [46]) **. Следовательно, соотношения, связанные с когерентными состояниями, естественно рассматривать не буквально, а только в качестве предельных соотношений, вытекающих из более реалистических представлений о наличии многочастичных источников.

---

* В работе [30] предлагается обойти это затруднение введением когерентных состояний для групп частиц с нулевым суммарным зарядом (например, для пар $\pi^+\pi^-$). Однако такой прием не согласуется с экспериментальными условиями, при которых происходит фактическое исследование интерференционных корреляций.

** Это и не удивительно, поскольку тождественные пионы из одного и того же многочастичного источника «автоматически» оказываются в одинаковых квантовых состояниях.

*** Совпадение результатов обоих подходов имеет место и в случае, когда кратности источников флуктуируют по закону Пуассона [94]. Это естественно, поскольку именно такие флуктуации свойственны, как известно, когерентным состояниям.

11. СОПОСТАВЛЕНИЕ ДВУХПИОННЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Численные значения пространственно-временны́х параметров, измеряемых по корреляциям тождественных пионов, могут зависеть от выбора используемой системы отсчета *. Поэтому имеет смысл обсудить некоторые особенности, возникающие при сопоставлении явлений в разных системах отсчета, обладающих различными скоростями вдоль оси реакции [29]. Такое сопоставление позволяет, в частности, выделить ту специфическую систему, в которой процесс генерации пионов обладает кинематической симметрией по направлению оси реакции и против него.

Предполагается, что выделение кинематически симметричной системы, если таковая фактически существует, представляет определенный физический интерес, поскольку в различных моделях свойством симметрии обладают разные системы отсчета. Тем самым возникает дополнительная возможность выбора между различными подходами к описанию процесса множественной генерации. В качестве одного из примеров обратимся к механизму образования так называемой «области пионизации» в πN-столкновениях высокой энергии. Если бы был верен классический вариант статистической модели, то симметричная система совпадала бы с системой центра инерции исходных частиц. Иное ожидается с точки зрения более современных представлений, согласно которым «область пионизации» возникает в результате столкновения одного из кварков первичного пиона с одним из кварков нуклона. При буквальном понимании этой модели симметричная система совсем другая, она должна почти совпадать с системой центра инерции сталкивающихся кварков **.

Принцип выделения симметричной системы весьма прост: если двигаться относительно ее один раз со скоростью v в одном направлении вдоль оси реакции, а другой раз — с такой же скоростью, но в противоположном направлении, то все не зависящие от направления скорости кинематические характеристики, в том числе R и τ, могут измениться только одинаково; поэтому при $v = 0$ они должны достигать своих экстремальных значений. Следовательно, корреляционный метод измерения пространственно-временны́х параметров области генерации можно использовать для выделения искомой симметричной системы отсчета.

Рассмотрим этот вопрос более подробно, следуя работе [29]. Пусть имеются два одночастичных источника, которые в обсуждаемой симметричной системе излучают пионы в моменты t_1^* и t_2^*, находясь соответственно в точках $\mathbf{r}_1^*$ и $\mathbf{r}_2^*$. Поскольку при преобразованиях

---

* Такой зависимости, конечно, нет, если наблюдаемые корреляции хорошо описываются с помощью лоренц-инвариантных кинематических величин; примером могут служить выражения типа (30).

** Применительно к одночастичным распределениям вопрос о выделении симметричной системы ранее уже рассматривался в литературе (см., например, [104]).

Лоренца поперечные координаты не изменяются, в дальнейшем мы будем интересоваться только продольными координатами z_1^* и z_2^* вдоль оси реакции. Временны́е и продольные пространственные характеристики области генерации будем задавать величинами $\langle (t_1^* - t_2^*)^2 \rangle$ и $\langle (z_1^* - z_2^*)^2 \rangle$. Переход к системе отсчета, движущейся вдоль оси z со скоростью v, приводит к известным соотношениям

$$(z_1 - z_2) = \gamma \{(z_1^* - z_2^*) + v(t_1^* - t_2^*)\},$$
$$(t_1 - t_2) = \gamma \left\{(t_1^* - t_2^*) + \frac{v}{c^2}(z_1^* - z_2^*)\right\}, \tag{51}$$

из которых следует, что квадратичные величины $\langle (z_1 - z_2)^2 \rangle$ и $\langle (t_1 - t_2)^2 \rangle$ выражаются в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\langle (z_1 - z_2)^2 \rangle = \\
&= \gamma^2 \{\langle (z_1^* - z_2^*)^2 \rangle + v^2 \langle (t_1^* - t_2^*)\rangle^2 + 2v \langle (z_1^* - z_2^*)(t_1^* - t_2^*)\rangle\}; \\
&\langle (t_1 - t_2)^2 \rangle = \\
&= \gamma^2 \left\{\langle (t_1^* - t_2^*)^2 \rangle + \frac{v^2}{c^4}\langle (z_1^* - z_2^*)^2 \rangle + \frac{2v}{c^2}\langle (z_1^* - z_2^*)(t_1^* - t_2^*)\rangle\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Легко убедиться, что для симметричной системы $\langle (z_1^* - z_2^*) \times (t_1^* - t_2^*) \rangle = 0$. Действительно, из преобразований (51) вытекает соотношение

$$\langle (z_1 - z_2)(t_1 - t_2)\rangle =$$
$$= \gamma^2 \left\{\frac{v}{c^2}\langle (z_1^* - z_2^*)^2 \rangle + v\langle (t_1^* - t_2^*)^2 \rangle + (1 + \beta^2)\langle (z_1^* - z_2^*)(t_1^* - t_2^*)\rangle\right\}. \tag{53}$$

Если $\langle (z_1^* - z_2^*)(t_1^* - t_2^*) \rangle \neq 0$, то из (53) следует, что величина $|\langle (z_1 - z_2)(t_1 - t_2) \rangle|$ изменяется при замене знака скорости v, а это противоречит предположению о кинематической симметрии исходной системы. Следовательно, $\langle (z_1^* - z_2^*)(t_1^* - t_2^*) \rangle = 0$. Из (53) вытекает также, что система отсчета, в которой $\langle (z_1 - z_2)(t_1 - t_2) \rangle = 0$, всегда существует. Для доказательства будем теперь считать, что координаты, отмеченные «звездочкой», относятся к какой-то исходной системе, в которой $\langle (z_1^* - z_2^*)(t_1^* - t_2^*) \rangle \neq 0$. Тогда с помощью (53) можно так подобрать скорость v, чтобы было выполнено условие $\langle (z_1 - z_2)(t_1 - t_2) \rangle = 0$. Указанная скорость определяется равенством

$$v = -(1 + \beta^2)\langle (z_1^* - z_2^*)(t_1^* - t_2^*)\rangle \Big/ \left\{\frac{\langle (z_1^* - z_2^*)^2 \rangle}{c^2} + \langle (t_1^* - t_2^*)^2 \rangle\right\}, \tag{54}$$

которое всегда имеет физический смысл, так как из него следует $\beta^2 < 1$.

Итак, для кинематически симметричной системы с точечными излучателями всегда $\langle (z_1^* - z_2^*)(t_1^* - t_2^*) \rangle = 0$. Поэтому формулы (52) принимают вид

$$\langle (z_1 - z_2)^2 \rangle = \gamma^2 \{\langle (z_1^* - z_2^*)^2 \rangle + v^2 \langle (t_1^* - t_2^*)^2 \rangle\},$$
$$\langle (t_1 - t_2)^2 \rangle = \gamma^2 \left\{\langle (t_1^* - t_2^*)^2 \rangle + \frac{v^2}{c^4}\langle (z_1^* - z_2^*)^2 \rangle\right\}. \tag{55}$$

Следовательно, параметры $\langle (z_1 - z_2)^2 \rangle$ и $\langle (t_1 - t_2)^2 \rangle$, характеризующие продольные размеры области генерации и длительность этого процесса, оказываются минимальными при $v = 0$; соответствующие минимальные значения реализуются в искомой симметричной системе отсчета *. Сказанное естественно отражается на поведении корреляций пар тождественных пионов. Наиболее показательны в этом смысле корреляции между пионами, вылетающими перпендикулярно к оси реакции, поскольку в такой конфигурации для симметричной системы не нарушается равноправность переходов к системам, движущимся относительно ее со скоростями v и $-v$ вдоль оси реакции. Соответственно оказывается, что в этих условиях параметр, имеющий смысл продольных размеров области генерации, приобретает минимальное значение именно в симметричной системе; тем самым обеспечивается указанная выше возможность выделения самой симметричной системы (более подробно см. в [29] **).

12. СВЯЗЬ ФОРМЫ ОБЛАСТИ ГЕНЕРАЦИИ С УГЛОВЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕКТОРА $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$

Известно, что из парных корреляций тождественных пионов можно извлечь информацию не только о размерах области генерации, но также и о форме этой области. С учетом азимутальной симметрии относительно оси реакции (или оси «струи», если речь идет о четко выделенных «струях») форму области можно характеризовать заданием двух размеров, продольного и поперечного. Если пользоваться гауссовой параметризацией, то задача сводится к фитированию экспериментальных данных с помощью выражения

$$\frac{d^6\sigma}{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{q}} \backsim 1 + \lambda e^{-B^2(q_x^2+q_y^2)-C^2q_z^2-\tau^2q_0^2} \tag{56}$$

и определению величин B и C. К сожалению, реальная точность таких измерений обычно оказывается очень низкой, в частности, из-за того, что формула (56) содержит кроме B и C еще два свободных параметра. Между тем для определения степени «сплющенности» или «вытянутости» области генерации на самом деле нет необходимости знать обе величины B и C по отдельности, вполне достаточно иметь

---

* Во избежание возможных недоразумений подчеркнем, что в движущейся системе координат величина $(z_1 - z_2)$ определяется не так, как принято определять длину стержня в специальной теории относительности (координаты концов стержня измеряются в один и тот же момент времени в системе наблюдателя); соответственно она и преобразуется **иначе**, чем длина стержня. Если, например, $t_1^* = t_2^*$, то в движущейся системе отсчета $(z_1 - z_2) = \gamma\,(z_1^* - z_2^*)$, т. е. вместо привычного сокращения, следующего из условия $t_1 = t_2$, имеет место «удлинение».

** Описанная ситуация специально обсуждается также в цикле работ [105—109]. В этой связи надо подчеркнуть еще раз: увеличение продольных размеров, характерное для корреляционного метода, означает только то, что рассматриваемый параметр определяется не так, как обычно определяется длина в специальной теории относительности.

только их отношение $a = B/C$, которое, как станет ясно ниже, может быть измерено с большей точностью.

Для этого надо обратиться к анализу углового распределения вектора $\mathbf{q}$ в области интерференционнсго пика. Если источники пионов распределены в пространстве сферически-симметрично, без каких-либо выделенных направлений, то угловое распределение вектора $\mathbf{q}$ должно быть изотропным; отличие от изотропии свидетельствует о нарушении сферической симметрии в расположении источников. Эти качественные утверждения имеют общее значение, что же касается количественного анализа, то, следуя работе [110], мы проведем его, исходя из формулы (56), которую, во всяком случае, можно рассматривать как подходящую параметризацию, удобную для количественной обработки экспериментальных данных (в связи с угловым распределением $\mathbf{q}$ см. также [26, 40, 66, 111, 112]).

Начнем с наиболее прозрачного случая, когда по тем или иным причинам можно в показателе экспоненты пренебречь временны́м членом *. Тогда вместо (56) имеем более простое выражение

$$\frac{d^6\sigma}{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{q}} \backsim 1 + \lambda e^{-B^2(q_x^2+q_y^2)-C^2q_z^2} \tag{57}$$

и легко убедиться, что угловое распределение вектора $\mathbf{q}$ однозначно определяется величиной $a = B/C$. Действительно, показатель экспоненты в (57) можно переписать в виде

$$B^2(q_x^2+q_y^2) + C^2q_z^2 = B^2(q_x^2+q_y^2+q_z^2) + (C^2-B^2)\,q_z^2 =$$
$$= B^2\mathbf{q}^2 + (C^2-B^2)\,\mathbf{q}^2\cos^2\theta = \{B^2+(C^2-B^2)\cos^2\theta\}\,q^2,$$

где θ — угол между вектором $\mathbf{q}$ и осью симметрии, $q = |\mathbf{q}|$. Поэтому для пар пионов, относящихся к области интерференционного пика, угловое распределение направлений $\mathbf{q}$ задается выражением

$$\Phi(\cos\theta)\,d\cos\theta \backsim \int\limits_0^\infty e^{-\{B^2+(C^2-B^2)\cos^2\theta\}q^2} q^2\,dq\,d\cos\theta. \tag{58}$$

Замена переменных $x = \{B^2+(C^2-B^2)\cos^2\theta\}^{1/2}$ дает

$$\Phi(\cos\theta) \backsim \frac{1}{\{B^2+(C^2-B^2)\cos^2\theta\}^{3/2}} \int\limits_0^\infty e^{-x^2}x^2\,dx = \frac{\mathrm{const}}{\{B^2+(C^2-B^2)\cos^2\theta\}^{3/2}}.$$

Нормируя это распределение в интервале $(-1, +1)$, окончательно получаем

$$\Phi(\cos\theta) = \frac{a^2}{2\{a^2+(1-a^2)\cos^2\theta\}^{3/2}}, \quad a = B/C. \tag{59}$$

---

* Например, в системе центра инерции пары величина $q_0\tau = 0$ просто из-за того, что $q_0 = 0$. В лабораторной системе временно́й член также исчезает, если пионы генерируются движущимся источником и отбираются пары, скорость которых совпадает со скоростью источника [см. формулу (26) при $u = v$].

Поскольку эта формула содержит единственный параметр $a = B/C$, его значение можно определить, измеряя какую-либо интегральную характеристику углового распределения. Подходящей характеристикой является, например, величина

$$\Delta = (N_1 - N_2)/(N_1 + N_2), \tag{60}$$

где N_1 — число событий из области интерференционного пика, для которых $|\cos\theta| < 1/2$, N_2 — число событий, для которых $|\cos\theta| > 1/2$. Из (59) и (60) следует, что

$$\Delta = \frac{2}{\sqrt{3a^2+1}} - 1, \quad a^2 = \frac{1}{3}\left\{\frac{4}{(1+\Delta)^2} - 1\right\}. \tag{61}$$

Для изотропного углового распределения $a = 1$, $\Delta = 0$. Если $\Delta > 0$, угловое распределение «сплюснуто», при $\Delta < 0$ оно «вытянуто» вдоль оси реакции, соответственно область генерации имеет форму, вытянутую либо сжатую в том же направлении. Ясно также, что на качественном уровне аналогичное соотношение между пространственным распределением источников и угловым распределением вектора $\mathbf{q}$ имеет общее значение, не ограниченное рамками параметризации (57).

Если интересоваться только некоторой частью интерференционного пика и отбирать пары пионов, для которых $|\mathbf{q}| \leqslant D$, то угловое распределение изменяется и появляется зависимость от граничного значения D. В этом случае

$$\Phi(\cos\theta) \backsim \frac{1}{\{B^2 + (C^2 - B^2)\cos^2\theta\}^{3/2}} \int\limits_0^{D\sqrt{B^2+(C^2-B^2)\cos^2\theta}} e^{-x^2}x^2\,dx. \tag{62}$$

Соответственно и величина Δ зависит уже от двух параметров — от $a = B/C$ и D; двухпараметрические кривые $\Delta = \Delta(a, D)$ приведены в [110].

Из формулы (62) следует, что по мере уменьшения порога D степень анизотропии также уменьшается, и при достаточно малых D распределение, независимо от соотношения между B и C становится полностью изотропным (см. также [26]). Действительно, при DB, $DC \ll 1$

$$\int\limits_0^{D\sqrt{B^2+(C^2-B^2)\cos^2\theta}} e^{-x^2}x^2\,dx \simeq \int\limits_0^{D\sqrt{B^2+(C^2-B^2)\cos^2\theta}} x^2\,dx = \frac{D^3}{3}\{B^2 + (C^2 - B^2)\cos^2\theta\}^{3/2},$$

поэтому в формуле (62) члены, зависящие от $\cos\theta$, полностью сокращаются. Интересно, что учет следующих членов разложения правой части (62) по малым величинам DB и DC также приводит к универсальному угловому распределению, справедливому даже при отказе от параметризации (57). Чтобы показать это, будем исходить не из (57), а из более общего выражения

$$W(p_1,\ p_2) \backsim 1 + \lambda\ \langle\cos \mathbf{qr}\rangle,\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \tag{63}$$

Ограничиваясь в разложении косинуса квадратичными членами, имеем при достаточно малых $|\mathbf{q}|$

$$\langle\cos \mathbf{qr}\rangle = 1 - \frac{1}{2}\langle(q_x x + q_y y + q_z z)^2\rangle.$$

Поскольку из осевой симметрии следует

$$\langle r_x r_y\rangle = \langle r_x r_z\rangle = \langle r_y r_z\rangle = 0, \quad \langle r_x^2\rangle = \langle r_y^2\rangle,$$

можно также записать

$$\langle\cos \mathbf{qr}\rangle = 1 - \{B^2(q_x^2 + q_y^2) + C^2 q_z^2\}, \tag{64}$$

где $\langle r_x^2\rangle = \langle r_y^2\rangle = 2B^2$ и $\langle r_z^2\rangle = 2C^2$, причем величины B и C имеют тот же смысл, что и в формуле (57). Выражение (64) можно также переписать в виде

$$\langle\cos \mathbf{qr}\rangle = 1 - C^2q^2\ \{a^2 + (1 - a^2)\cos^2\theta\},$$

откуда для связанного с интерференционным слагаемым нормированного углового распределения получаем универсальное выражение

$$W(\cos\theta) = \frac{1 - C^2q^2\{a^2 + (1 - a^2)\cos^2\theta\}}{2\left(1 - \frac{1+2a^2}{3}C^2q^2\right)}. \tag{65}$$

При $Cq \to 0$ из (65) следует и упомянутая выше изотропия углового распределения.

Пока что предполагалась возможность пренебречь величиной $\tau^2q_0^2$ в формуле (56). Если этого сделать нельзя, возникает вопрос о соответствующем обобщении вида углового распределения (59). Проблема оказывается довольно сложной, поскольку появляется зависимость искомого углового распределения от значения и направления скорости $\mathbf{u}$ выделяемых пар пионов. Некоторое упрощение возможно при достаточно высоких энергиях, когда скорости большинства вторичных частиц близки к скорости света ($|\mathbf{u}| \simeq 1$) и составляют малый угол с направлением оси реакции. Если ограничиться только такими частицами, то наличие в показателе экспоненты (56) слагаемого $\tau^2q_0^2$ приводит лишь к изменению коэффициента при q_z^2, так как в рассматриваемых условиях соотношение (21) переходит в $q_0 = uq_z$, а тогда $\tau^2q_0^2 = \tau^2u^2q_z^2$. Следовательно, остается справедливой формула (57) с заменой C^2 на $\widetilde{C}^2 = C^2 + \tau^2u^2 \simeq C^2 + \tau^2$; справедливы также и последующие формулы, в которых надо положить $a = B/\widetilde{C}$.

В реакциях, в которых образуются «струи» [например, в процессе (e^+e^-)-аннигиляции при достаточно высокой энергии], парные корреляции пионов в первом приближении неплохо описываются лоренц-инвариантным выражением

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + \lambda e^{-B^2 Q_2^2}. \tag{30''}$$

Тогда угловое распределение вектора $\mathbf{q}$ имеет смысл «привязывать» к направлению скорости $\mathbf{u}$ пары, поскольку ни с какими другими выделенными направлениями величина Q^2 не связана. В системе центра инерции пары $\mathbf{u} = 0$ и угловое распределение оказывается изотропным, как для сферически-симметричного распределения источников.

В лабораторной системе $\mathbf{u} \neq 0$ и при достаточно высокой энергии струи почти для всех пар пионов скорость направлена вдоль ее оси. Тогда с помощью формулы (32) выражение (30″) можно переписать в виде

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 + e^{-B^2\{(q_x^2+q_y^2)+(1-u^2)q_z^2\}}, \tag{57'}$$

в котором продольное направление совпадает с осью струи. Сопоставление с (57) показывает, что угловое распределение вектора $\mathbf{q}$ снова описывается выражением (59), в котором следует положить $a = 1/(1 - u^2)$. Поскольку обычно скорость u близка к предельной, угловое распределение получается таким же, как для сильно сжатого эллипсоида, внутри которого все источники испускают пионы **одновременно** [то же самое следует, конечно, и непосредственно из (57′)]. С другой стороны, в связи с формулой (26) мы ранее уже видели, что сходная картина может соответствовать летящему диску, который **непрерывно** испускает пионы в направлении своего движения при $\mathbf{u} \simeq \mathbf{v}$. Такое описание кажется достаточно близким к представлениям о постепенной адронизации быстрого кварка, сопровождаемой последовательным рождением пар кварк-антикварк.

В заключение этого раздела напомним, что все сказанное об угловом распределении вектора $\mathbf{q}$ относится **только** к интерференционным членам в (56) и (57). Поэтому при обработке экспериментальных данных надо еще освободиться от влияния вклада, не связанного с интерференцией. Соответствующая процедура изложена в [110].

13. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ ПАР НЕТОЖДЕСТВЕННЫХ ПИОНОВ

Выражение (6) и все последующие выводы относятся к корреляциям тождественных пионов. Для пар нетождественных пионов ($\pi^+\pi^-$, $\pi^+\pi^0$, $\pi^-\pi^0$) в модели независимых одночастичных источников интерференционные корреляции очевидным образом отсутствуют, так как для каждого из таких источников изменение заряда испускаемого пиона приводит к другому конечному состоянию (разным зарядам соответствуют ортогональные конечные состояния). Статистическая модель в этом отношении аналогична модели независимых одночастичных источников, в ней также отсутствуют интерференционные корреляции для пар различающихся пионов. Однако в других моделях это не обязательно так, и такие корреляции, вообще говоря, **могут** иметь место *.

Рассмотрим в этой связи некоторые изотопические свойства системы двух пионов. Для пар $\pi^+\pi^+$ и $\pi^-\pi^-$ полный изотопический спин $I = 2$, для пар $\pi^+\pi^0$ и $\pi^-\pi^0$ изотопический спин $I = 1$ или $I = 2$, для пары $\pi^0\pi^0$ также возможны два значения $I = 0$ или $I = 2$, а для пары $\pi^+\pi^-$ возможны все три значения $I = 0, 1, 2$. Кроме того, четность внутреннего орбитального момента пары пионов совпадает с четностью ее полного изотопического спина, т. е. при $I = 0, 2$ орбитальный момент четен, а при $I = 1$ он нечетен. Пусть один из генерируемых пионов имеет импульс p_1, другой — p_2. В общем случае мало что можно сказать об изотопических соотношениях между двухчастичными вероятностями $W^{++}(p_1, p_2)$, $W^{+-}(p_1, p_2)$, . . . Определенные соотношения появляются, если пионы образуются при столкновении первичных частиц с нулевым изотопическим спином или, если речь идет об изотопически неполяризованной смеси двухпионных состояний [26, 40, 113]. В этом случае двухчастичные структурные функции, пропорциональные соответствующим двухчастичным вероятностям, удовлетворяют равенствам *:

$$\left.\begin{aligned}
&f^{++}(p_1, p_2) = f^{--}(p_1, p_2) = f_2(p_1, p_2);\\
&f^{+0}(p_1, p_2) = f^{-0}(p_1, p_2) = \frac{1}{2} f_1(p_1, p_2) + \frac{1}{2} f_2(p_1, p_2);\\
&f^{+-}(p_1, p_2) = f^{-+}(p_1, p_2) = \frac{1}{3} f_0(p_1, p_2) + \frac{1}{2} f_1(p_1, p_2) + \frac{1}{6} f_2(p_1, p_2);\\
&f^{00}(p_1, p_2) = \frac{1}{3} f_0(p_1, p_2) + \frac{2}{3} f_2(p_1, p_2).
\end{aligned}\right\} \quad (66)$$

Здесь f_0, f_1 и f_2 относятся к парам пионов с суммарным изотопическим спином I, равным соответственно 0, 1 или 2.

Поскольку структурная функция $f_2(p_1, p_2)$ пропорциональна двойным инклюзивным сечениям и, следовательно, двухчастичным вероятностям $W^{++}(p_1, p_2)$ и $W^{--}(p_1, p_2)$, ее зависимость от импульсов p_1 и p_2 обладает при близких импульсах интерференционным пиком. С другой стороны, из (66) следует, что эта структурная функция входит в качестве слагаемого в выражения для $f^{+-}(p_1, p_2)$, $f^{+0}(p_1, p_2)$ и $f^{-0}(p_1, p_2)$, а тогда ясно, что в рассматриваемых условиях сходные интерференционные корреляции, вообще говоря, могут иметь место и для пар нетождественных пионов, хотя значение и даже знак

* В общем плане этот вопрос рассмотрен в работах [26, 40, 113], для мультипериферических моделей — в [5, 6, 26, 44], для процессов с участием промежуточных резонансов — в [26—28, 40,44, 61—64, 114] и, в несколько иной связи, — в монографии [115].

** Соотношения (66) справедливы при пренебрежении поправками, связанными с кулоновским взаимодействием для пар заряженных пионов.

интерференционного члена зависят от дальнейшей конкретизации процесса генерации пионов *.

В качестве иллюстрации рассмотрим корреляции пары $\pi^+\pi^-$ в реакции $d + d \rightarrow {}^4\mathrm{He} + \pi^+ + \pi^- + \pi^0$, предполагая, что один из пионов образуется совместно с промежуточным ρ-мезоном, при последующем распаде которого возникают остальные два пиона. Тогда к одному и тому же конечному состоянию системы 3π можно прийти тремя различными путями:

$$\pi^+ + \rho^- \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0;$$
$$\pi^- + \rho^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+ + \pi^0;$$
$$\pi^0 + \rho^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^+ + \pi^-.$$

Последний путь исключается для конфигураций с близкими импульсами π^+ и π^-, остаются, следовательно, две одинаковые по абсолютному значению резонансные амплитуды, соответствующие двум остальным путям (равенство амплитуд следует из изотопической симметрии каналов). Интерференция этих амплитуд приводит к корреляциям импульсов π^+ и π^-, сходным с рассмотренными ранее корреляциями пар тождественных пионов, один из которых образуется при распаде промежуточного резонанса.

Имеется только одно важное отличие. Поскольку в обсуждаемой реакции изотопический спин системы $\pi^+\pi^-\pi^0$ равен нулю, а изотопический спин π^0-мезона равен единице, то суммарный изотопический спин пары $\pi^+\pi^-$ также равен единице, а тогда внутренний орбитальный момент пары нечетен и координатная часть волновой функции также нечетна. Поэтому обе интерферирующие амплитуды следует брать с разными знаками, из-за чего вместо (27) возникает соотношение

$$W(p_1, p_2) \backsim 1 - \frac{1}{1 + (\mathbf{q}\mathbf{L} - q_0 T)^2}, \tag{67}$$

т. е. совпадению импульсов p_1 и p_2 соответствует не максимум вероятности, а ее минимум (см. также [26, 40]).

Добавление еще одного π^0-мезона, т. е. переход к реакции $d + d \rightarrow {}^4\mathrm{He} + \pi^+ + \pi^- + \pi^0 + \pi^0$, меняет знак перед интерференционным членом. Поскольку распад $\rho^0 \rightarrow 2\pi^0$ запрещен, снова остаются только два канала ($\pi^0\pi^+\rho^- \rightarrow \pi^0\pi^+\pi^-\pi^0$ и $\pi^0\pi^-\rho^+ \rightarrow \pi^0\pi^-\pi^+\pi^0$) и две совпадающие по значению амплитуды, но теперь их надо брать с одинаковыми знаками. Это вытекает из четности изотопического спина системы $\pi^0\pi^0$, что приводит к четности изотопического спина пары $\pi^+\pi^-$ (так как изотопический спин четверки $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ равен нулю) и, соответственно — к четности координатной части ее волновой функции. В результате возникает интерференционный пик, опи-

* В частности, как уже отмечалось выше, в рамках модели независимых источников и в статистической модели обсуждаемые корреляции пар нетождественных пионов полностью отсутствуют. Противоположное утверждение, содержащееся в [116], ошибочно (ср. с [26]).

сываемый соотношением

$$W(p_1, p_2) \backsim 1+\frac{1}{1+(\mathbf{qL}-q_0T)^2}, \tag{68}$$

идентичным с (27). Заметим еще, что формулы (67) и (68) относятся ко всем рассматриваемым реакциям с участием π^0-мезонов и одного ρ-мезона, если конечное число π^0-мезонов соответственно нечетно либо четно *. Если имеется смесь таких реакций, то величина и знак интерференционного члена определяются их относительными вкладами, т. е.

$$W(p_1, p_2) \backsim 1+\frac{\lambda}{1+(\mathbf{qL}-q_0T)^2}, \quad -1 \leqslant \lambda \leqslant +1. \tag{69}$$

Из (69) следует, что в обсуждаемой ситуации для определения значений $\mathbf{L}$ и T корреляции пар $\pi^+\pi^-$ могут подходить в той же мере, как и корреляции пар тождественных пионов.

Исходным пунктом проведенного анализа является нулевой изотопический спин системы, включающей все пионы, и определенное, четное либо нечетное, значение изотопического спина системы π^0-мезонов. Поэтому аналогичные соображения, вообще говоря, относятся и к реакциям типа $d+d \to {}^4\mathrm{He}+\pi^+ +\pi^- + n\pi^0$ без участия промежуточного ρ-мезона, но в этом случае пространственно-временные параметры связаны не с пробегом и временем жизни резонанса, а с размерами области генерации и длительностью процесса. Предположение о нулевом значении полного изотопического спина системы всех пионов также не является обязательным. Оно было использовано только для построения конкретных примеров, иллюстрирующих возможность возникновения интерференционных корреляций в парах нетождественных пионов. Такие корреляции могут, конечно, иметь место и в реакциях более общего типа. Частично этот вопрос с несколько иной точки зрения будет рассмотрен в разд. 14.

14. ДРУГОЙ ПОДХОД К ПАРНЫМ КОРРЕЛЯЦИЯМ НЕТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ

Ранее было показано, что анизотропия углового распределения вектора $\mathbf{q}$ уменьшается вместе с уменьшением величины $|\mathbf{q}|$, так что при достаточно малых значениях $|\mathbf{q}|$ угловое распределение становится изотропным. Причина такого поведения очевидна, она состоит в том, что при очень малых относительных импульсах относительное движение пионов описывается S-волной, вклад орбитальных моментов с $l>0$ при $\mathbf{q}\to 0$ вымирает. Что же касается характера

* G-четность системы $n\pi^0$ равна $(-1)^n$, поскольку G-четность π^0-мезона отрицательна. С другой стороны, G-четность такой системы определяется ее суммарным изотопическим спином I и равна $(-1)^I$. Поэтому система с четным числом π^0-мезонов имеет четный изотопический спин, а при нечетном числе π^0-мезонов изотопический спин также нечетен.

вымирания состояний со старшими орбитальными моментами, то для ответа на этот вопрос полезно вспомнить, что в рамках классических представлений относительный момент количества движения двух частиц $\mathbf{l} = \frac{1}{2}[\mathbf{qr}]$, где $\mathbf{r}$ — расстояние между точками, из которых эти частицы вылетали. Поэтому можно ожидать, что вклад старших орбитальных моментов становится малым, а угловое распределение — изотропным, если $|\mathbf{q}| \ll 1/R$, где R — линейные размеры области генерации частиц.

Именно такой результат вытекает из формул (62) и (65), описывающих угловое распределение вектора $\mathbf{q}$ для пары тождественных пионов. Вместе с тем ясно, что приведенные выше общие соображения полностью относятся и к парам нетождественных пионов, т. е. и для них при $|\mathbf{q}|R \ll 1$ угловое распределение $\mathbf{q}$ должно быть изотропным, а переход от возможной в общем случае анизотропии к изотропии начинается в области $|\mathbf{q}|R \backsim 1$*. Различие между парами тождественных и нетождественных пионов состоит в этом отношении только в том, что в первом случае в связи с симметризацией волновой функции при любых $\mathbf{q}$ исключаются все нечетные орбитальные моменты, в то время как для нетождественных пионов такой запрет отсутствует.

Соответственно для пар тождественных пионов угловое распределение не изменяется при изменениях знака $\mathbf{q}$; в частности, для процессов, обладающих осевой симметрией, оно может иметь при малых $|\mathbf{q}|$ вид

$$\Phi(\cos\theta) \backsim 1 + \alpha\cos^2\theta, \tag{70}$$

где θ — угол между $\mathbf{q}$ и осью симметрии [см., например, (65)]. В аналогичных условиях для пар нетождественных пионов угловое распределение может содержать нечетные степени $\cos\theta$ и иметь, например, вид

$$\Phi(\cos\theta) \backsim 1 + \beta\cos\theta + \gamma\cos^2\theta. \tag{71}$$

Коэффициенты α, β и γ в формулах (70) и (71) заведомо обращаются в нуль при $|\mathbf{q}| \to 0$; точный вид функций $\alpha(|\mathbf{q}|)$, $\beta(|\mathbf{q}|)$ и $\gamma(|\mathbf{q}|)$ зависит, конечно, от конкретных особенностей процесса генерации, ясно, однако, что в конечном счете все определяется безразмерными параметрами типа $|\mathbf{q}|R$.

---

* Предполагается, что после вымирания старших орбитальных моментов относительному движению частиц соответствует состояние с $l = 0$. Если нулевой орбитальный момент отсутствует (примером может служить пара нетождественных пионов с полным изотопическим спином $I = 1$), то угловое распределение может оставаться неизотропным даже при $\mathbf{q} \to 0$. Однако в этом случае при $\mathbf{q} \to 0$ вероятность процесса также стремится к нулю. С другой стороны, в некоторых моделях (например, в моделях статистического типа) для пары нетождественных частиц угловое распределение вектора $\mathbf{q}$ может быть изотропным даже и при больших значениях $|\mathbf{q}|$, когда $|\mathbf{q}|R \gg 1$.

Из сказанного можно заключить, что анализ зависимости углового распределения вектора $\mathbf{q}$ от $|\mathbf{q}|$ представляет еще одну возможность измерения размеров области генерации, не ограниченную одними только тождественными пионами. Более того, не требуется даже, чтобы частицы пары имели одинаковую массу. При несовпадении масс следует отбирать пары частиц с близкими скоростями $\mathbf{u}$ (для релятивистских частиц — близкими 4-скоростями $\gamma\mathbf{u}$), что обеспечивает малый относительный импульс в системе центра инерции рассматриваемой пары. Дальнейшие сведения о связи углового распределения $\mathbf{q}$ с размерами области генерации см. в [26, 40, 110, 113].

15. ПАРНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ НЕЙТРАЛЬНЫХ *K*-МЕЗОНОВ

В связи с первыми сообщениями по экспериментальному обнаружению интерференционных корреляций пар нейтральных K-мезонов [79, 117] имеет смысл кратко рассмотреть специфические особенности этих корреляций при генерации системы $K^0\overline{K}^0$. Здесь возникает радикальное отличие от поведения пар нетождественных пионов, связанное с тем, что K^0- и $\overline{K}^0$-мезоны являются различными суперпозициями одних и тех же базисных состояний K_1^0 и K_2^0. В результате оказывается, что в зависимости от условий регистрации интерференционный член может быть как положительным, так и отрицательным, а может и полностью отсутствовать.

Общий анализ парных корреляций произвольных суперпозиций по внутренним квантовым числам (см., например, гл. 5 монографии [118]) показывает, что если конечные внутренние состояния суперпозиций, фиксируемые соответствующими детекторами, совпадают, то при любом механизме генерации автоматически обеспечиваются симметрии, характерные для пар тождественных частиц. Следует поэтому ожидать, что при регистрации пар $K_1^0K_1^0$ либо $K_2^0K_2^0$ при сближении импульсов возникает такой же интерференционный максимум, как и для пар тождественных пионов, несмотря на полную различимость (ортогональность) состояний исходных частиц K^0 и $\overline{K}^0$, причем это полностью относится даже к модели независимых одночастичных источников, когда K^0- и $\overline{K}^0$-мезоны возникают за счет различных, никак не связанных между собой процессов генерации (см. [28, 40, 47]).

Пусть K^0-мезон с 4-импульсом p_1 образуется в 4-точке r_1, а $\overline{K}^0$-мезон с 4-импульсом p_2 — в точке r_2; соответствующие одночастичные амплитуды обозначим $f(p_1)$ и $\overline{f}(p_2)$, предполагая их достаточно плавными функциями импульсов. Тогда при независимой генерации и при регистрации детекторами именно K^0 и $\overline{K}^0$ общая двухчастичная амплитуда

$$A(K^0, p_1; \overline{K}^0, p_2) \backsim f(p_1)\,\overline{f}(p_2)\,e^{-ip_1r_1}e^{-ip_2r_2}. \qquad (72)$$

При квадрировании экспоненты исчезают, т. е. интерференционные корреляции отсутствуют. Такие корреляции появляются, если регистрировать пары $K_1^0 K_1^0$, т. е. отбирать события, в которых каждый из каонов распадается на два пиона. Это связано с тем, что K^0- и $\overline{K}^0$-мезоны могут быть представлены в виде суперпозиций

$$K^0 = (K_1^0 + K_2^0)/\sqrt{2}, \quad \overline{K}^0 = (K_1^0 - K_2^0)/\sqrt{2}. \tag{73}$$

Следовательно, пара $K_1^0 K_1^0$ с импульсами p_1 и p_2 может возникнуть двумя путями: при распаде K^0-мезона с импульсом p_1 и $\overline{K}^0$-мезона с импульсом p_2, а также при перекрестном процессе, когда K^0-мезон имеет импульс p_2, а $\overline{K}^0$-мезон — импульс p_1. Первому пути отвечает амплитуда $\frac{1}{2} f(p_1) \overline{f}(p_2)\, e^{-i(p_1 r_1 + p_2 r_2)}$, второму — амплитуда $\frac{1}{2} f(p_2) \overline{f}(p_1)\, e^{-i(p_2 r_1 + p_1 r_2)}$. Поэтому полная двухчастичная амплитуда *

$$A(K_1^0, p_1; K_1^0, p_2) \backsim f(p_1)\overline{f}(p_2)\, e^{-i(p_1 r_1 + p_2 r_2)} + f(p_2)\overline{f}(p_1)\, e^{-i(p_1 r_2 + p_2 r_1)}. \tag{74}$$

Из буквального совпадения (74) с исходным выражением (6) следует наличие для пар $K_1^0 K_1^0$ интерференционных корреляций, имеющих такую же структуру, как корреляции тождественных пионов. Если вместо пар $K_1^0 K_1^0$ выделять каким-либо подходящим способом пары $K_2^0 K_2^0$, то конечный результат получится в точности таким же.

Однако при отборе пар $K_1^0 K_2^0$ за счет знака «минус» во второй формуле (73) сложение двух амплитуд в (74) следует заменить вычитанием. В результате вместо интерференционного максимума сближение импульсов p_1 и p_2 приводит к «провалу», и при $p_1 \to p_2$ вероятность процесса также стремится к нулю. Аналогичным образом можно рассмотреть вопрос о корреляциях при генерации пары нейтральных K-мезонов любого типа. В частности, для исходной пары $K^0 K^0$ всегда возникает интерференционный максимум независимо от типа выделяемых конечных состояний, даже если последние полностью различимы (ортогональны); то же самое относится и к исходной паре $\overline{K}^0 \overline{K}^0$. Дальнейшие сведения о парных корреляциях нейтральных K-мезонов можно найти в [28, 40, 47].

16. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Ранее почти всюду предполагалось, что одночастичные амплитуды $U(p)$ и $V(p)$ являются очень плавными функциями импульса и их можно заменить константами, значение которых в дальнейшем оказывалось несущественным. К сожалению, в реальных условиях это

* В выражениях (72) и (74) не учитывается вклад взаимодействий в конечном состоянии, который в случае нейтральных K-мезонов может быть довольно значительным [17, 28].

предположение обычно не соответствует действительности, из-за чего возникает необходимость сравнения измеренного двухчастичного распределения с так называемым «фоновым» двухчастичным распределением, не содержащим интерференционных корреляций, но в в остальном совпадающим с «рабочим» распределением. Проблема фона оказывается довольно сложной и деликатной; в связи с ней также возникает ряд теоретических вопросов (см., например, [77, 78]), но их удобнее рассмотреть во второй части обзора попутно с анализом экспериментальных результатов.

В заключение имеет смысл сопоставить в общих чертах корреляционный метод с некоторыми другими подходами, также позволяющими получить определенную информацию о пространственных характеристиках процесса множественной генерации пионов. Как уже отмечалось, корреляционный метод дает характерные размеры тех областей, в которых образуются пионы с достаточно близкими импульсами. В ряде моделей эти размеры совпадают с полными размерами области генерации, в других случаях такого совпадения нет (мультипериферические схемы, постепенная адронизация энергичных кварков, гидродинамические модели с коллективным движением источников и т. п.).

Другая важная особенность корреляционного метода связана с исходным выражением (6) для двухчастичной амплитуды, которое справедливо в предположении, что после генерации в точках r_1 и r_2 оба пиона далее распространяются свободно без каких-либо взаимодействий друг с другом или другими частицами. Отсюда следует, что интерференционные корреляции определяются **окончательными** размерами, т. е. той стадией, после которой прекратились процессы рассеяния и генерации новых частиц.

С другой стороны, уже давно разработан и часто используется способ определения параметра удара в столкновениях высокой энергии, приводящих к множественной генерации пионов (см., например, [119, 120]). В отличие от корреляционного метода такой подход позволяет получить информацию только о поперечных размерах области генерации, причем не на конечной стадии процесса, а на его начальном этапе, поскольку значение параметра удара связано с относительным угловым моментом сталкивающихся первичных частиц. Тем самым оба метода **дополняют** друг друга, и можно думать, что сопоставление соответствующих экспериментальных результатов может дать важные сведения о механизме исследуемых реакций.

О поперечных размерах области взаимодействия иногда судят по распределению поперечных импульсов пионов, опираясь на соотношение неопределенности $\overline{(\Delta p_\perp)^2\,(\Delta r_\perp)^2} \backsim \hbar^2$. Следует, однако, помнить, что на самом деле это соотношение является неравенством и что поэтому в ряде случаев величина $\hbar^2/\overline{(\Delta p_\perp)^2}$ может не иметь прямого отношения к величине $\overline{(\Delta r_\perp)^2}$. В качестве примера укажем на статистические модели множественной генерации, в которых распределение поперечных импульсов определяется не столько размерами области генерации, сколько температурой совокупности рожденных пионов.

Первые мои работы по корреляциям тождественных частиц были выполнены совместно с Герценом Исаевичем Копыловым, памяти которого посвящается настоящий обзор. Большинство последующих работ появились в результате тесного сотрудничества с Р. Ледницки и В. Л. Любошицем. Мне приятно выразить им свою благодарность.

Доктор W. A. Zajc прислал обширный список литературы, часть которой не была мне известна. Выражаю ему свою благодарность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Goldhaber G. e. a.**//Phys. Rev. 1960. Vol. 120. P. 300—312.
2. **Гришин В. Г. и др.**//ЯФ. 1971. Т. 13. С. 1116—1125.
3. **Копылов Г. И., Подгорецкий М. И.**//ЯФ. 1972. Т. 15. С. 392—399.
4. **Копылов Г. И., Подгорецкий М. И.**//ЯФ. 1973. Т. 18. С. 656—666.
5. **Копылов Г. И., Подгорецкий М. И.**//ЯФ. 1974. Т. 19. С. 434—446.
6. **Kopylov G. I.**//Phys. Lett. 1974. Vol. B50. P. 472—473.
7. **Shuryak E. V.**//Phys. Lett. 1973. Yol. B44. P. 387—389.
8. **Шуряк Э. В.**//ЯФ. 1973. Т. 18. С. 1302—1308.
9. **Cocconi G.**//Phys. Lett. 1974. Vol. B49. P. 459—461
10. **Hanbury-Brown R., Twiss R. Q.**//Phil. Mag. 1954. Vol. 45. P. 663—682.
11. **Слыш В. И.**//УФН. 1965. Т. 87. С. 471—489.
12. **Czyżewski O., Szepticka M.**//Phys. Lett. 1967. Vol. B25. P. 482—485.
13. **Jain P. L. e. a.**//Phys. Rev. 1973. Vol. D7. P. 605—609.
14. **Bar-Nir I. e. a.**//Nucl. Phys. 1970. Vol. B20. P. 45—62.
15. **Fridman A. e. a.**//Phys. Rev. 1978. Vol. 176. P. 1595—1602.
16. **Junkmann B. e. a.**//Nucl. Phys. 1968. Vol. B8. P. 471—484.
17. **Ледницки Р., Любошиц В. Л.**//ЯФ. 1982. Т. 35. С. 1316—1329.
18. **Любошиц В. Л.**//ЯФ. 1985. Т. 41. С. 820—827.
19. **Gmitro M. e. a.**//Czech. J. Phys. 1986. Vol. B36. P. 1282—1287.
20. **Аллабердин М. Л. и др.**//ЯФ. 1987. Т. 46. С. 1785—1790.
21. **Копылов Г. И.** ОИЯИ Р2-7120. Дубна, 1973.
22. **Копылов Г. И.** ОИЯИ Р2-7211. Дубна, 1973.
23. **Karczmarczuk J.**//Nucl. Phys. 1974. Vol. B78. P. 370—380.
24. **Karczmarczuk J.**//Acta Phys. Pol. 1978. Vol. B9. P. 233—248.
25. **DeWolf E. e.a.**//Nucl. Phys. 1978. Vol. B132. P. 383—400.
26. **Козловская С. С. и др.**//ЯФ. 1976. Т. 24. С. 621—629.
27. **Ледницки Р.** ОИЯИ Б2-3-11460. Дубна, 1978.
28. **Любошиц В. Л., Подгорецкий М. И.**//ЯФ. 1979. Т. 30. С. 789—798.
29. **Подгорецкий М. И.**//ЯФ. 1983. Т. 37. С. 455—463.
30. **Gyulassy M. e. a.**//Phys. Rev. 1979. Vol. C20. P. 2267—2292.
31. **Белашев Б. З.** ОИЯИ 1-80-150. Дубна, 1980.
32. **Ranft G., Ranft J.**//Phys. Lett. 1974. Vol. B53. P. 188—190.
33. **Pratap M. e. a.**//Phys. Rev. Lett. 1974. Vol. 33. P. 797—801.
34. **Kopylov G. I.** JINR E2-92-11. Dubna, 1975.
35. **Ranft G. e. a.**//Nucl. Phys. 1975. Vol. B86. P. 63—76.
36. **Carlson R. G. e. a.**//Nucl. Phys. 1976. Vol. B104. P. 1—20.
37. **Biswas N. N. e. a.**//Phys. Rev. Lett. 1975. Vol. 35. P. 1059—1062.
38. **Уханов М. Н. и др.**//ЯФ. 1987. Т. 45. С. 1032—1040.
39. **Kopylov G. I., Podgoretsky M. I.** JINR E2-92-85. Dubna, 1975.
40. **Копылов Г. И. и др.** ОИЯИ Р2-8069. Дубна, 1974.
41. **Kopylov G. I.** JINR E2-85-49. Dubna, 1975.
42. **Копылов Г. И., Подгорецкий М. И.**//ЖЭТФ. 1975. Т. 69. С. 414—421.

43. **Giovannini A. e. a.**//La Rivista del Nuovo cimento. 1979. Vol. 2, N 10. P. 1—99.
44. **Ледницки Р., Подгорецкий М. И.**//ЯФ. 1979. Т. 30. С. 837—844.
45. **Bowler M. G.**//Z. Phys. 1985. Vol. C29. P. 617—629.
46. **Ледницки Р. и др.**//ЯФ. 1983. Т. 38. С. 251—260.
47. **Ледницки Р., Подгорецкий М. И.** ОИЯИ Р2-12302. Дубна, 1979.
48. **Pratt S.**//Phys. Rev. 1986. Vol. D33. P. 1314—1327.
49. **Kolehmainen K., Gyulassy M.**//Phys. Lett. 1986. Vol. B180. P. 203—206.
50. **Аверченков В. А. и др.**//ЯФ. 1987. Т. 46. С. 1525—1534.
51. **Махлин А. Н., Синюков Ю. М.**//ЯФ. 1987. Т. 46. С. 637—646.
52. **Andersson B., Hofmann W.**//Phys. Lett. 1986. Vol. B169. P. 364—368.
53. **Bowler M. G.**//Phys. Lett. 1987. Vol. B185. P. 205—208.
54. **Pratt B.**//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 1219—1221.
55. **Копылов Г. И., Подгорецкий М. И.**//ЯФ. 1971. Т. 14. С. 1081—1090.
56. **Копылов Г. И.**//ЯФ. 1972. Т. 15. С. 178—186.
57. **Бережнев С. Ф. и др.** ОИЯИ Р1-7033. Дубна, 1973.
58. **Копылов Г. И. и др.**//ЯФ. 1974. Т. 20. С. 223—232.
59. **Левин Е. М. и др.**//ЯФ. 1976. Т. 23. С. 423—431.
60. **Левин Е. М. и др.**//ЯФ. 1976. Т. 24. С. 640—646.
61. **Tomas G. H.**//Phys. Rev. 1977. Vol. D15. P. 2636—2651.
62. **Grassberger P.**//Nucl. Phys. 1977. Vol. B120. P. 231—252.
63. **Ледницки Р., Подгорецкий М. И.** ОИЯИ Р2-82-181. Дубна, 1982.
64. **Ледницки Р., Подгорецкий М. И.** ОИЯИ Р2-82-327. Дубна, 1982.
65. **Phillips G. C.**//Rev. Mod. Phys. 1964. Vol. 36. P. 1085—1094.
66. **Yano F. B., Koonin S. E.**//Phys. Lett. 1978. Vol. B78. P. 556—559.
67. **Althoff M. e. a.**//Z. Phys. 1986. Vol. C30. P. 355—370.
68. **Подгорецкий М. И.** ОИЯИ Р2-85-54. Дубна, 1985.
69. **Kopylov G. I. e. a.** JINR E2-9249. Dubna, 1975.
70. **Giovannini A., Veneziano G.**//Nucl. Phys. 1977. Vol. B130. P. 61—75.
71. **Biyajima M. e. a.**//Phys. Lett. 1978. Vol. B77. P. 425—427.
72. **Biyajima M. e. a.**//Phys. Lett. 1980. Vol. B92. P. 193—198.
73. **Biyajima M.**//Progr. Theoret. Phys. 1981. Vol. 66. P. 1378—1388.
74. **Biyajima M.**//Progr. Theoret. Phys. 1982. Vol. 68. P. 1273—1283.
75. **Liu Y. M. e. a.**//Phys. Rev. 1986. Vol. C34. P. 1667—1672.
76. **Zajc W. A.**//Phys. Rev. 1987. Vol. D35. P. 3396—3408.
77. **Zajc W. A. e. a.**//Phys. Rev. 1984. Vol. C29. P. 2173—2187.
78. **Подгорецкий М. И., Чеплаков А. П.** ОИЯИ Р2-87-96. Дубна, 1987.
79. **Cooper A. M. e. a.**//Nucl. Phys. 1978. Vol. B139. P. 45—60.
80. **Angelov N. e. a.**//Bulg. J. Phys. 1982. Vol. 9. P. 119—128.
81. **Ангелов Н. и др.**//ЯФ. 1982. Т. 35. С. 1194—1198.
82. **Althoff M. e. a.**//Z. Phys. 1985. Vol. C29. P. 347—359.
83. **Avery P. e. a.**//Phys. Rev. 1985. Vol. D32. P. 2294—2302.
84. **Humanič T. J.**//Phys. Rev. 1986. Vol. C34. P. 191—195.
85. **Arneodo M. e. a.**//Z. Phys. 1986. Vol. C32. P. 1—9.
86. **Подгорецкий М. И.** ОИЯИ Р2-85-240. Дубна. 1985.
87. **Willis W., Chasman C.**//Nucl. Phys. 1984. Vol. A418. P. 425c—432c.
88. **Pratt S.**//Phys. Rev. 1986. Vol. D33. P. 72—79.
89. **Wakamatsu M.**//Nuovo cimento. 1980. Vol. A56. P. 336—344.
90. **Lam C. S., Lo S. Y.**//Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 52. P. 1184—1187.
91. **Lam C. S., Lo S. Y.**//Phys. Rev. 1986. Vol. D33. P. 1336—1343.
92. **Lattes C. M. G. e. a.**//Phys. Rep. 1980. Vol. 65. P. 151—229.
93. **Fowler G. N. e. a.**//Phys. Lett. 1982. Vol. B116. P. 203—206.
94. **Paul H.**//Rev. Mod. Phys. 1986. Vol. 58. P. 209—231.
95. **Подгорецкий М. И.** ОИЯИ Р2-80-406. Дубна, 1980.
96. **Fowler G. N., Weiner R. M.**//Phys. Lett. 1977. Vol. B70. P. 201—203.
97. **Fowler G. N., Weiner R. M.**//Phys. Rev. 1978. Vol. D17. P. 3118—3123.
98. **Bartnik E. A., Rzażewski K.**//Phys. Rev. 1978. Vol. D18. P. 4308—4312.
99. **Fowler G. M. e. a.**//Nucl. Phys. 1979. Vol. A319. P. 349—363.
100. **Gyulassy M.**//Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 454—457.

101. **Fowler G. N., Weiner R. M.**//Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55. P. 1373—1375.

102. **Horn D., Silver R. S.**//Ann. Phys. 1971. Vol. 66. P. 509—541.

103. **Zalewski K.**//Acta Phys. Pol. 1978. Vol. B9. P. 445—448.

104. **Диденко Л. А. и др.** Асимметрия адронных взаимодействий. М.: Наука, 1981.

105. **Стрельцов В. Н.** ОИЯИ Р2-82-404. Дубна, 1982.

106. **Стрельцов В. Н.** ОИЯИ Р2-82-699. Дубна, 1982.

107. **Стрельцов В. Н.** ОИЯИ Р2-83-586. Дубна, 1983.

108. **Глаголев В. В. и др.**//ЯФ. 1985. Т. 42. С. 181—184.

109. **Стрельцов В. Н.** ОИЯИ Р2-86-470. Дубна, 1986.

110. **Подгорецкий М. И., Чеплаков А. П.** ОИЯИ Р2-85-603. Дубна, 1985.

111. **Aihara H. e. a.**//Phys. Rev. 1985. Vol. D31. P. 996—1003.

112. **Akesson T. e. a.**//Phys. Lett. 1987. Vol. B187. P. 420—424.

113. **Любошиц В. Л., Подгорецкий М. И.**//ЯФ. 1975. Т. 21. С. 205—213.

114. **Гришин В. Г. и др.**//ЯФ. 1971. Т. 14. С. 600—606.

115. **Далитц Р.** Странные частицы и сильные взаимодействия: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1981.

116. **Suzuki M.**//Phys. Rev. 1987. Vol. D35. P. 3359—3365.

117. **Harris R. e. a.**//Phys. Rev. 1978. Vol. D18. P. 92—94.

118. **Гельфер Я. М. и др.** Парадокс Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике. М.: Наука, 1975.

119. **Webber B. R.**//Phys. Lett. 1974. Vol. B49. P. 474—476.

120. **Henyey F. S., Pumplin J.**//Nucl. Phys. 1976. Vol. B117. P. 235—249.