

УДК 539:17.014:539.172.17

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИСПУСКАНИЯ ЧАСТИЦ ИЗ БЫСТРОВРАЩАЮЩИХСЯ СФЕРИЧЕСКИХ И ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЯДЕР

*B. P. Алешин*

Институт ядерных исследований АН УССР, Киев

Систематически изложены новые результаты полуклассической теории статистического распада сферических и деформированных ядер. Описаны практические методы расчета эмиссии частиц из эллипсоидальных ядер. Рассмотрены приложения полуклассического подхода к описанию угловых распределений частиц, измеренных в совпадении с каскадом  $\gamma$ -квантов, осколками деления, тяжелыми ионами или другими частицами.

This paper presents in a systematic way new results in the semiclassical theory of the statistical decay of spherical and deformed nuclei. Practical methods for calculating particle emission from the ellipsoidal nuclei are described. The applications of the semiclassical approach for the analysis of the particle angular distributions gated on  $\gamma$ -cascades, fission fragments, heavy ions or other particles are considered.

## ВВЕДЕНИЕ

Существующие в настоящее время методы статистических расчетов можно разделить на квантовые, например, [1—4] и полуклассические [5—8]. Программы, реализующие эти методы, позволяют проследить за одной или несколькими цепочками распадов, давая в результате выход изотопов, число испущенных частиц и их энергетические спектры.

Программы полуклассического типа позволяют, кроме того, подсчитать угловые распределения и угловые корреляции различных продуктов распада. Расчет этих величин в принципе возможен и по квантовым формулам, но занимает много времени и памяти ЭВМ, в особенности при больших угловых моментах.

Еще большие трудности для квантового подхода представляет распад сильно деформированных систем. Интерес к таким системам связан с тем, что экспериментальные выходы  $\alpha$ -частиц выше, чем предсказывают расчеты для сферических ядер [9], а эффективные барьеры, извлекаемые из спектров испущенных  $\alpha$ -частиц, часто меньше тех, которые получаются из реакций слияния  $\alpha$ -частиц с соответствующим ядром в основном состоянии [10—14].

В разд. 1 этого обзора изложена полуклассическая статистическая модель испускания частиц из сферических ядер. В разд. 2 исследованы условия ее применимости. В разд. 3 представлена полу-

классическая статистическая модель для деформированных ядер. В разд. 4 дана практическая реализация этой модели для эллипсоидальных ядер. В разд. 5 приведены расчеты корреляционных функций и их сравнение с экспериментом. В заключении подведены итоги.

### 1. СФЕРИЧЕСКИЕ ЯДРА

**Вероятность распада.** Исходным пунктом полуклассической статистической теории распада сферических ядер [15—23] является выражение для вероятности распада (в единицу времени) ядра с энергией возбуждения  $E$  и спином  $I$  при испускании частицы с энергией  $\varepsilon$  и орбитальным моментом  $l$ , движущейся в направлении  $n$ :

$$R(\varepsilon, l, n; E, I) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{\omega(E - S - \varepsilon - \frac{(I-l)^2}{2J})}{\omega_x(Q)} T_l(\varepsilon) \delta(\ln). \quad (1)$$

Здесь  $g$  — число спиновых подсостояний частицы,  $S$  — энергия отрыва,  $T_l(\varepsilon)$  — коэффициент проницаемости,  $J$  — момент инерции дочернего ядра,  $\omega = (2j + 1)^{-1}\rho$  и  $\omega_x = (2I + 1)^{-1}\rho_x$  — приведенные плотности уровней дочернего и материнского ядер,  $Q$  — разность энергии возбуждения и вращательной энергии материнского ядра,  $\hbar = 1$ .

Распределение (1) дает наиболее полное описание распада, так как по заданным  $\varepsilon$ ,  $E$ ,  $l$ ,  $I$  и  $n$  можно подсчитать энергию возбуждения  $u$ , угловой момент  $j$  и импульс ядра отдачи, а следовательно, вероятности его дальнейших превращений.

Если ширина энергетического спектра испускаемых частиц мала по сравнению с тепловой энергией дочернего ядра  $q = u - j^2/(2J)$ , то для  $\omega(q)$  можно использовать температурное приближение

$$\omega(q) = \omega(q') \exp[(q - q')/\tau], \quad (2)$$

где температура  $\tau$  выражается через  $q'$  в виде

$$\tau = [d \ln \omega(q)/dq]_{q=q'}^{-1}. \quad (3)$$

Величину  $\omega(q)$  часто параметризуют в форме, предложенной Лангом [24]. В этом случае с точностью до постоянного множителя

$$\omega(q) = \exp[2(a(q - \Delta))^{1/2}]/[t^4(Ja)^{3/2}], \quad (4)$$

где

$$t = \frac{3}{4a} + \left( \left( \frac{3}{4a} \right)^2 + \frac{q - \Delta}{a} \right)^{1/2}.$$

Параметр плотности уровней  $a = A/8$  МэВ<sup>-1</sup> при  $A < 100$  и  $A/12$  МэВ<sup>-1</sup> при  $A > 100$  [25, 26], поправка на спаривание  $\Delta = 1,2$  МэВ для нечетных,  $\Delta = 2,4$  МэВ для четно-четных и  $\Delta = 0$  для нечетно-нечетных ядер. Для  $J$  используют твердотельное выражение с  $r_0 = 1,2$  фм.

Для  $\omega(q)$ , определенного в (4), соотношение (3) получает вид

$$\tau = \frac{2}{a} + \left( \left( \frac{2}{a} \right)^2 + \frac{q' - \Delta}{a} \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Если для  $\omega(q)$  использовать (2), а для  $T_l(\varepsilon)$  классическую модель, то выражение (1) упрощается к виду

$$R = C \exp \left( -\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\omega l}{\tau} - \frac{l^2}{2J\tau} \right) \Theta \left( \varepsilon - E_0 - \frac{l^2}{2mR_0^2} \right) \delta(nl), \quad (6)$$

где

$$C = \frac{g}{(2\pi)^3} \exp \left[ \left( E - S - \frac{l^2}{2J} - q' \right) / \tau \right] \omega(q') / \omega_x(Q);$$

$\omega = I/J$  — частота вращения;  $\Theta(x)$  — ступенчатая функция;  $E_0$  и  $R_0$  — высота и радиус барьера;  $m$  — масса частицы.

Высоту барьера часто берут в виде

$$E_0 = Z_p Z_d e^2 / R_e,$$

где

$$R_e = \begin{cases} [2,452 - 0,408 \log_{10}(Z_p Z_d)] A_d^{1/3} + 2,53 & \text{для } \alpha, \\ 1,81 A_d^{1/3} + 1,44 & \text{для } p, \end{cases} \quad (7)$$

а для радиуса барьера принимают значения

$$R_0 = [2,0337 - 0,2412 \log_{10}(Z_p Z_d)] A_d^{1/3} + \begin{cases} 2,53 & \text{для } \alpha, \\ 1,44 & \text{для } p, \end{cases} \quad (8)$$

где  $Z_p$ ,  $Z_d$  и  $A_p$ ,  $A_d$  — зарядовые и массовые числа испущенной частицы и дочернего ядра соответственно,  $R_e$  и  $R_0$  приведены в фм. Формулы (7), (8) получены в [27] в результате систематизации сечений поглощения протонов и  $\alpha$ -частиц средними и тяжелыми ядрами. Если отождествить  $q'$  со средним  $q$ , найденным с помощью распределения (6), и подставить результат в правую часть (5), то получим уравнение для  $\tau$ , решив которое, будем иметь значения всех параметров, входящих в (6).

Коэффициенты  $T_l(\varepsilon)$ . С помощью распределения  $R$  можно подсчитать ширины испускания, средние значения  $\varepsilon$ ,  $l$ ,  $j$ , энергетические и угловые распределения частиц, а также двухчастичные корреляции. Среди этих величин можно выделить такие, при получении которых выполняется интегрирование по  $d\varepsilon$ . Особенность таких величин состоит в том, что для их вычисления нужны не сами  $T_l(\varepsilon)$ , а соответствующее преобразование Лапласа ( $s = \tau^{-1}$ ):

$$|L_l(s)| = \int_0^\infty d\varepsilon \exp(-s\varepsilon) T_l(\varepsilon). \quad (9)$$

Как показано в работах [11, 25, 26, 28—34], при использовании классических  $T_l(\varepsilon)$  для величин указанного типа получаются про-

стые аналитические выражения. Эта возможность объясняется тем, что для классических  $T_l$  преобразование Лапласа имеет очень простой вид

$$L_l(s) = s^{-1} \exp \left\{ - \left[ E_0 + \frac{l^2}{2mR_0^2} \right] s \right\}, \quad (10)$$

в результате чего интегрирование в соответствующих выражениях по переменным из набора  $l, l, n, j$  удается выполнить явно.

К сожалению, использование резкой ступеньки для  $T_l(\varepsilon)$  не всегда оправдано, особенно для нейтронов. Кроме того, расчеты с таким  $T_l(\varepsilon)$  трудно сравнивать с квантовым расчетом, так как неизвестна связь  $E_0$  и  $R_0$  с оптическими коэффициентами  $T_l(\varepsilon)$ .

Расчеты показывают, что при  $\tau > 1$  МэВ выражение (10) хорошо аппроксимирует  $L_l(s)$  с оптическими  $T_l(\varepsilon)$ , если  $E_0$  и  $1/R_0^2$  рассматривать как линейные функции  $s$ . Таким образом, мы приходим к параметризации

$$L_l(s) = s^{-1} \exp \{ - [(b_0 - b_1 s) + (c_0 - c_1 s) l^2] s \}. \quad (11)$$

В дальнейшем будет видно, что использование (11) вместо (10) лишь незначительно усложняет аналитические выражения для величин, упомянутых в начале настоящего пункта. Константы  $b_0, b_1, c_0, c_1$  можно рассматривать как феноменологические параметры или находить с помощью линейной аппроксимации по  $l^2$  и  $s$  для функций  $s^{-1} \ln [s L_l(s)]$ , подсчитанных с оптическими  $T_l(\varepsilon)$ .

Подставляя (9) в левую часть (11), получаем интегральное уравнение для  $T_l(\varepsilon)$ . Предполагая, что это уравнение справедливо при всех  $s > 0$  и отодвигая нижний предел интеграла по  $d\varepsilon$  до  $-\infty$ , уравнение для  $T_l(\varepsilon)$  можно решить аналитически. Результат имеет вид

$$T_l^{\text{erf}}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{erf} \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_l}{D_l 2^{1/2}} \right) \right], \quad (12)$$

где  $\text{erf}(x)$  — функции ошибок, а величины  $\varepsilon_l$  и  $D_l$ , определяющие положение и ширину плавной ступенчатой функции, даются соотношениями

$$\varepsilon_l = b_0 + c_0 l^2, \quad D_l^2 = 2(b_1 + c_1 l^2). \quad (13)$$

Соотношение (12) аналогично формуле Хилла и Уилера [35] для коэффициента проницаемости. Эту аналогию можно использовать для оценки параметров  $b_0, b_1, c_0, c_1$ . С этой целью перепишем  $T_l^{\text{erf}}(\varepsilon)$  в виде

$$T_l^{\text{erf}}(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} dX \frac{\exp(-X^2/(2D_l^2))}{(2\pi)^{1/2} D_l} \Theta(\varepsilon - (b_0 + X) - c_0 l^2). \quad (14)$$

Это соотношение показывает, что размытые коэффициенты проницаемости можно получить, усреднив классические  $T_l(\varepsilon)$  по высоте барьера.

Коэффициенты Хилла — Уилера можно представить в виде, аналогичном (14), если гауссиан в правой части (14) заменить функцией

$$w^{HW}(X) = (2\hbar\omega_l/\pi) \operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{\pi X}{\hbar\omega_l}\right)$$

и сделать подстановки  $b_0 = E_0$ ,  $c_0 = (2mR_0^2)^{-1}$ . Параметр  $D_l$  можно отождествить со стандартным отклонением для распределения  $w^{HW}(X)$ , которое равно  $\hbar\omega_l/(2\sqrt{3})$ . Учитывая, что для протонов и  $\alpha$ -частиц  $\hbar\omega_0 = 3,8$  МэВ [27], мы находим, что для этих частиц  $D_0 = 1,1$  МэВ.

**Распределение по  $\epsilon$ ,  $l$ ,  $j$ .** Ключевой величиной квантовой статистической модели распада является вероятность распада в единицу времени  $R(\epsilon, l, j; E, I)$  ядра  $E, I$  на частицу  $\epsilon, l$  и остаточное ядро  $j$ . Выбирая  $I$  в качестве полярной оси, обозначая  $\beta_l$  и  $\gamma_l$  полярный и азимутальный углы ориентации  $I$ , переходя от  $\beta_l$  к  $j$  с помощью формулы

$$\cos \beta_l = (I^2 + l^2 - j^2)/(2Il),$$

соответствующую классическую вероятность можно представить в виде [17]

$$R(\epsilon, l, j; E, I) = \int R(\epsilon, l, n; E, I) dnl^2 [d \cos \beta_l / dj] d\gamma_l. \quad (15)$$

Нормированное распределение по  $\epsilon, l, j$  имеет вид

$$P(\epsilon, l, j; E, I) = \frac{R(\epsilon, l, j; E, I)}{R(E, I)}, \quad (16)$$

где

$$R(E, I) = \int R(\epsilon, l, j; E, I) d\epsilon dl dj \quad (17)$$

— полная вероятность испустить частицу в единицу времени. С помощью  $P(\epsilon, l, j; E, I)$  при фиксированных  $E, I$  можно вычислить среднее значение произвольной функции  $f(\epsilon, l, j)$  величин  $\epsilon, l, j$ . Обозначая такое усреднение чертой, мы имеем

$$\bar{f} = \int d\epsilon dl dj f(\epsilon, l, j) P(\epsilon, l, j; E, I). \quad (18)$$

Выражения (2) для  $\omega(q)$  и (9), (11) для  $T_l(\epsilon)$  позволяют вычислять величины (15), (16), (17), а также средние значения величин  $\epsilon, l^2, j^2$  аналитически. Полная вероятность эмиссии частицы в единицу времени (17) получает вид

$$R(E, I) = \frac{g}{\pi} \frac{\omega(q')}{\omega_x(Q)} \frac{\tau^2}{p} J \beta_c \exp \left[ \left( E - S - b_0 + \frac{b_1}{\tau} - \frac{I^2}{2J} - q' \right) / \tau \right]. \quad (19)$$

Здесь

$$p = \frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{x \exp(-x^2)}{\operatorname{erf}(x)}, \quad x = I \left( \frac{\beta_c}{2J\tau} \right)^{1/2}, \quad (20)$$

$$\beta_c = \frac{J_c}{J + J_c}, \quad J_c = \frac{1}{2} \frac{1}{c_0 - c_1/\tau}.$$

Весовая функция (16) с учетом (2), (9), (11) и (19) может быть представлена в форме

$$P(\varepsilon, l, j; E, I) = \frac{pj}{2J\tau^2 I \beta_c} \varepsilon_{ljj} T_l(\varepsilon) \exp \left[ - \left( \varepsilon + \frac{j^2}{2J} - \frac{I^2}{2J} \right) / \tau \right], \quad (21)$$

где  $\varepsilon_{ljj} = 1$ , если  $l, j$  и  $I$  могут образовать треугольник, и  $\varepsilon_{ljj} = 0$  в противном случае.

Используя (18), (21), находим средние

$$\bar{\varepsilon} = b_0 - \frac{2b_1}{\tau} + \tau + \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta_c^2 I^2}{J_c} + \tau (1 - \beta_c) (1 + p) \right] \left( 1 - \frac{c_1}{c_0 \tau - c_1} \right); \quad (22)$$

$$\bar{j}^2 = (1 - \beta_c)^2 I^2 + 2J\tau \left[ \frac{1}{2} \beta_c + 1 + \left( \frac{1}{2} \beta_c - 1 \right) p \right]; \quad (23)$$

$$\bar{l}^2 = \beta_c^2 I^2 + \tau J \beta_c (1 + p). \quad (24)$$

Формулы (19), (21) — (24) содержат параметр  $\tau$ , численное значение которого не определено, пока не определена величина  $q'$  в правой части (5). В дальнейшем мы отождествим  $q'$  со средней тепловой энергией дочернего ядра

$$\bar{q} = E - S - \bar{\varepsilon} - \frac{\bar{j}^2}{2J}. \quad (25)$$

Соотношения (22), (23), (25) позволяют найти зависимость  $\bar{q}$  от  $\tau$ . Подставляя эту зависимость в правую часть (5) вместо  $q'$ , получаем замкнутое уравнение для  $\tau$ .

Если  $\tau$  удовлетворяет условиям

$$c_0 \gg \frac{c_1}{\tau}, \quad b_0 \gg \frac{b_1}{\tau}, \quad I \left( \frac{\beta_c}{2J\tau} \right)^{1/2} \ll 1,$$

то в уравнении для  $\tau$  можно отбросить члены, содержащие  $c_1, b_1$ , и положить  $p = 1$ . Полученное при этом уравнение решается явно. Его корень

$$\tau_0 = a^{-1} + \sqrt{a^{-2} + a^{-1} \left( E - S - b_0 - \Delta - \frac{I^2}{2J + c_0^{-1}} \right)}$$

можно использовать как затравочное значение при поиске  $\tau$  методом итераций. Для этого с помощью  $\tau_0$  подсчитываем  $\bar{q}_0, \bar{j}_0^2$  по (22), (23), а затем и  $q_0$  по (25). Подставляя это  $q_0$  в правую часть (5), получаем  $\tau_1$ , после чего процедура повторяется сначала.

**Угловые распределения и корреляции.** Вероятность вылета частицы в направлении  $\mathbf{n}$  из ядра ( $E, I$ ) имеет вид

$$W(\mathbf{n}; E, I) = \frac{R(\mathbf{n}; E, I)}{R_{\text{tot}}(E, I)},$$

где функция распределения  $R(\mathbf{n}; E, I)$  получается интегрированием (1) по  $d\mathbf{e} d^3l$ , а  $R_{\text{tot}}(E, I)$  является суммой  $R(E, I)$ , определенных в (19), по различным вылетающим частицам. Выполняя интегрирование по  $d^3l$  в декартовых координатах с осью  $z$ , направленной вдоль  $\mathbf{n}$ , получаем

$$W(\mathbf{n}; E, I) = G \exp [-\alpha (\mathbf{I} \cdot \mathbf{n})^2], \quad (26)$$

где

$$G = \frac{1}{4\pi} \frac{R(E, I)}{R_{\text{tot}}(E, I)} \frac{\alpha^{1/2} I}{\text{Erf}(\alpha^{1/2} I)}, \quad \alpha = \frac{\beta_c}{2J\tau}, \quad (27)$$

функция ошибок

$$\text{Erf}(x) = \frac{\pi^{1/2}}{2} \text{erf}(x)$$

нормирована условием:  $\text{Erf}(x)/x \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ .

Отношение

$$P(\varepsilon, l; \mathbf{n}, E, I) = \frac{R(\varepsilon, l, \mathbf{n}; E, I)}{R(\mathbf{n}; E, I)}$$

можно использовать в качестве нормированного распределения величин  $\varepsilon$  и  $l$  при фиксированных значениях  $\mathbf{n}, E, I$ . Обозначая усреднение с помощью распределения  $P(\varepsilon, l, \mathbf{n}, E, I)$  угловыми скобками, находим

$$\langle \varepsilon \rangle = b_0 - \frac{b_1}{\tau} + \left( 1 + \frac{J}{J+J_c} \right) \tau + \frac{J_c}{2(J+J_c)^2} [\mathbf{I} \times \mathbf{n}]^2, \quad (28)$$

$$\langle l \rangle = \beta_c [\mathbf{I} - \mathbf{n} (\mathbf{I} \cdot \mathbf{n})]. \quad (29)$$

Рассмотрим теперь последовательное испускание двух частиц в направлениях  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  из компаунд-ядра  $E, I$ . Вероятность первого распада получаем из (26), (27) подстановкой индекса «1» к величинам, характеризующим продукты распада. Вероятность второго распада получим из (26), (27), отмечая индексом «2» характеристики продуктов распада и заменяя  $E, I$  и  $I$  на

$$u_1 = E - S_1 - \bar{\varepsilon}_1, \quad I_1 = \bar{j}_1^2 \text{ и } \mathbf{I}_1 = \mathbf{I} - \langle \mathbf{l}_1 \rangle$$

соответственно, где  $\varepsilon_1, \bar{j}_1^2$  и  $\langle \mathbf{l}_1 \rangle$  получаются из (22), (23) и (29) подстановкой к характеристикам продуктов распада индекса «1». Вероятность всего процесса  $W(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2; E, I)$  является произведением двух одночастичных вероятностей и может быть представлена в виде

$$W(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2; E, I) = G_{12} \exp [-B (\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}_1)^2 - C (\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}_2)^2 - D (\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}_1) (\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}_2)], \quad (30)$$

где

$$G_{12} = G_1 G_2, \quad B = \alpha_1, \quad C = \alpha_2 - D, \quad D = 2\alpha_2 \beta_{c1}. \quad (31)$$

Первое и второе слагаемые в экспоненте уравнения (30) характеризуют корреляцию  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  с  $\mathbf{I}$ . Корреляция между  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  заключена в последнем слагаемом. В системе больших размеров  $\beta_{c1} \rightarrow 0$ , и вклад этого слагаемого будет пренебрежимо мал по сравнению с вкладом двух первых.

С помощью (30) нетрудно построить функцию угловой корреляции двух частиц, испаряемых из компаунд-ядра, образованного в реакции слияния. Направляя ось  $z$  вдоль пучка, помещая ось  $x$  в плоскости, образуемой  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ , и направляя ее так, чтобы составляющая  $\mathbf{n}_1$  вдоль оси  $x$  была положительной, мы имеем

$$W(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = \int_0^{I_{\max}} I dI \int_0^{2\pi} d\Phi W(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2; E, \mathbf{I}_{\Phi}), \quad (32)$$

где  $I_{\max}$  — максимальный спин для спинового распределения в форме треугольника;  $\mathbf{I}_{\Phi}$  — вектор длиною  $I$ , расположенный в плоскости  $xOy$  и составляющий угол  $\Phi$  с осью  $x$ .

После подстановки (30) в (32) и интегрирования по  $d\Phi$  получаем [31—33]:

$$W(\theta_1, \theta_2, \phi) = \int_0^{I_{\max}} I dI G_{12} \exp\left(-\frac{1}{2} HI^2\right) I_0\left[\frac{1}{2}(H^2 + M)^{1/2} I^2\right], \quad (33)$$

где  $I_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка;

$$H = B \sin^2 \theta_1 + C \sin^2 \theta_2 + D \cos \theta_{12} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi; \quad (34)$$

$$M = (D^2 \cos^2 \theta_{12} - 4BC) \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \phi;$$

$\theta_1$  и  $\theta_2$  — полярные углы векторов  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  соответственно;  $\theta_{12}$  — угол между этими векторами;  $\phi = \phi_1 - \phi_2$  — разность между азимутальными углами  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ . Если частицы 1 и 2 тождественны, то уравнение (33) является окончательным. В противном случае оно должно включать дополнительное слагаемое, в котором порядок испускания изменен на обратный.

## 2. СРАВНЕНИЕ С КВАНТОВЫМИ РАСЧЕТАМИ

**Связь классического и квантового подходов.** Квантовое выражение для дважды дифференциального сечения испускания частицы компаунд-ядром, образованным в реакции слияния, имеет вид

$$\frac{d^2\sigma}{dn de} = \sum_I \sigma(E, I) \frac{R(e, n; E, I)}{R_{\text{tot}}(E, I)}, \quad (35)$$

где  $\sigma(E, I) = \pi\lambda^2(2I + 1)T_I(E_i)$  — сечение образования компаунд-ядра  $(E, I)$ ;  $\lambda$  и  $T_I(E_i)$  — длина волны и коэффициент проницаемости во входном канале;

$$R(\epsilon, n; E, I) = \sum_{j\mu lm} |Y_{lm}(n)|^2 |C_{j\mu lm}^{10}|^2 R(\epsilon, l, j; E, I) \quad (36)$$

— вероятность распада в единицу времени с испусканием частицы  $(\epsilon, n)$ . Суммирование идет по квантовым числам спина остаточного ядра  $j$ ,  $\mu$  и орбитального момента частицы  $l, m$ . В качестве оси  $z$  взято направление пучка,

$$R(\epsilon, l, j; E, I) = \epsilon_{ljI} \frac{g}{2\pi} T_l(\epsilon) \frac{\rho(E - S - \epsilon, j)}{\rho_x(E, I)}. \quad (37)$$

Чтобы вывести ключевое соотношение (1) полуклассической модели из квантовых формул (36), (37), мы заменим коэффициенты Клебша — Гордана  $C_{j\mu lm}^{10}$  и сферические функции  $Y_{lm}(n) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} D_m^l(n)$  квазиклассическими выражениями в форме интегралов

$$|C_{j\mu lm}^{10}|^2 = \frac{I^2 j l}{4\pi^2} \int d\Omega_I d\Omega_j d\Omega_l \delta(I - j - l) \delta(M - I \cos \theta_I) \times \times \delta(\mu - j \cos \theta_j) \delta(m - l \cos \theta_l); \quad (38)$$

$$|D_m^l(n)|^2 = \frac{l}{2\pi} \int d\Omega_l \delta(l \cos \theta_l - m) \delta(ln - k), \quad (39)$$

где  $d\Omega_I, d\Omega_j, d\Omega_l$  — элементарные телесные углы, а  $\theta_I, \theta_j, \theta_l$  — полярные углы векторов  $I, j, l$  соответственно. Формулы (38), (39) имеют прозрачную физическую интерпретацию и после взятия интегралов по углам приводят к стандартным классическим представлениям, впервые полученным в [36].

Подставляя (37) — (39) в (36), заменяя суммы по  $j, \mu, l, m$  интегралами, выполняя интегрирование по  $dm d\mu d\theta_l d\theta_I d^3j$ , обозначая азимутальные углы векторов  $I, n, l$  через  $\phi_l, \phi_n, \Phi_I$  соответственно и используя тождество

$$\int \delta(ln) d\phi_l = \int \delta(ln) d\phi_n,$$

мы приходим к соотношению

$$R(\epsilon, n; E, I) = \int \frac{d\phi_n}{2\pi} \int \frac{d\Phi_I}{2\pi} \int d^3l \times \times \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{\omega\left(E - S - \epsilon - \frac{(I - l)^2}{2J}\right)}{\omega_x(Q)} T_l(\epsilon) \delta(ln).$$

В подынтегральной функции этого выражения нетрудно узнать классическую вероятность распада  $R(\epsilon, l, n; E, I)$ , определенную в (1). Заметим, что после интегрирования по  $d^3l$  и усреднения по  $d\Phi_I$

результат не будет зависеть от  $\phi_n$ . Поэтому усреднение по  $d\phi_n$  можно убрать.

**Критерий применимости.** Условия применимости полуклассического приближения обсудим на примере углового распределения частиц с фиксированными  $\varepsilon$  и  $l$ , испускаемых излучателем с заданным  $I$ . Согласно (6) в классическом случае это распределение пропорционально интегралу

$$W_c(\beta) = \frac{l}{2\pi} \int d\Omega_l \exp\left(\frac{\omega l}{\tau}\right) \delta(\ln),$$

где  $\beta$  — угол между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{I}$ . Используя (39), нетрудно проверить, что квантовым аналогом этого интеграла является сумма

$$W_q(\beta) = \sum_m e^{\lambda m} |D_{m0}^l(\mathbf{n})|^2,$$

где  $\lambda = \omega/\tau$ .

Сравнение  $W_c(\beta)$  с  $W_q(\beta)$  облегчается тем, что оба распределения вычисляются аналитически, приводя к модифицированной функции Бесселя  $I_0\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)\lambda \sin \beta\right]$  [16] и полиному Лежандра  $P_l[1 + (\operatorname{ch} \lambda - 1) \sin^2 \beta]$  [37] соответственно. Поскольку эти функции симметричны относительно  $90^\circ$  и монотонно растут в интервале  $0-90^\circ$ , то достаточно сравнить соответствующие анизотропии:

$$A_c = W_c(90^\circ)/W_c(0^\circ) = I_0\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)\lambda\right],$$

$$A_q = W_q(90^\circ)/W_q(0^\circ) = P_l(\operatorname{ch} \lambda).$$

Это сделано на рис. 1.

Так как  $A_q$  и  $A_c$  очень быстро растут при увеличении  $\lambda$  и  $l$ , мы откладываем их в логарифмическом масштабе (см. рис. 1, a). При этом, однако, разность между  $A_c$  и  $A_q$  почти неощущима. Поэтому мы показываем отдельно (на рис. 1, б) относительную погрешность  $r = |A_c - A_q|/A_q$ . Видно, что для  $l$ , представляющих практический интерес ( $l < 10$ ),  $r$  не превышает нескольких процентов при  $\lambda < 1$ . Таким образом, критерий применимости полуклассического приближения дается неравенством  $\hbar\omega/\tau < 1$ , где мы восстановили постоянную Планка.

Если бы  $r$  при фиксированном  $\lambda$  стремилось к нулю при  $l \rightarrow \infty$ , то  $A_c$  было бы асимптотическим приближением для  $A_q$ . Из рис. 1 видно, что это не так, поскольку  $r$  при заданном  $\lambda$  растет с  $l$ , хотя и очень медленно. Из рис. 1 видно, что асимптотическим приближением для  $A_q$  является функция  $\tilde{A}_c = (\lambda/\operatorname{sh} \lambda)^{1/2} A_c$ , введенная нами по аналогии с асимптотическим приближением для полинома Лежандра через функцию Бесселя

$$P_l(\cos \chi) = (\chi/\sin \chi)^{1/2} J_0\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)\chi\right],$$

приведенным, например, в [38].

Из рассмотренного примера вытекает следующее наблюдение. Хотя формула (39) для  $|D_{mh}^l(n)|^2$  сама по себе является очень грубой (она не учитывает осцилляций, а описывает только огибающие), однако после домножения обеих сторон (39) на колоколообразную функцию  $m$  получим формулу, которая дает вполне приемлемые результаты.

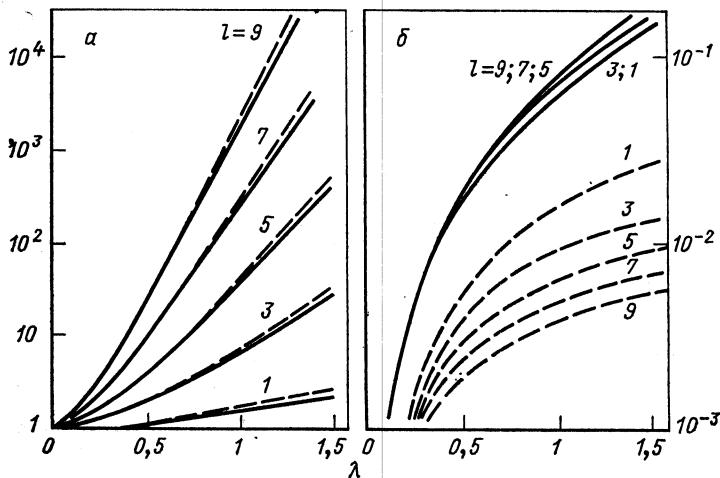


Рис. 1. Сравнение расчетных значений угловой анизотропии в зависимости от  $\lambda$  при различных  $l$ :  
а — квантовая,  $A_q$  (—), и классическая,  $A_c$  (---); б — относительные погрешности  $(A_c - A_q)/A_q$  (—) и  $|A_q - A_c|/A_q$  (---); сплошные кривые при  $l=9, 7, 5$  неразличимы

разную функцию  $m$  (с шириной в несколько единиц) и суммирования по  $m$  слева и интегрирования справа мы приходим к равенству, которое выполняется с очень хорошей точностью.

Это свойство вообще является характерным при сравнении квантовых распределений с классическими. В качестве еще одного примера приведем соотношение:

$$\sum_{j\mu} (2j+1) \exp[-\gamma j(j+1)] |C_{j\mu lm}^{IM}|^2 = \\ = (2I+1) \exp[-\gamma(I^2 + l^2 - 2Mm)] I_0[2\gamma \sqrt{(I^2 - M^2)(l^2 - m^2)}],$$

которое легко доказать с помощью (38). Если положить  $\gamma = (2J\tau)^{-1}$ ,  $M = 0$ , зафиксировать  $I$  и  $l$  и рассматривать  $m$  как переменную, то приведенное соотношение будет тем точнее, чем лучше выполняется неравенство  $\frac{\hbar\omega'}{\tau} < 1$ , где  $\omega' = (I - l)/J$  несколько отличается от  $\omega = I/J$ , введенного ранее. Это показывают расчеты, выполненные в работе [39].

**Точность приближений для  $\omega(q)$  и  $L_l(s)$ .** Чтобы составить представление о погрешностях, вносимых температурным приближением для  $\omega(q)$  и приближением (11) для  $L_l(s)$ , рассмотрим распад  ${}^{74}\text{Kr}$ ,

образуемого при слиянии  $^{16}\text{O}$  с  $^{58}\text{Ni}$  при лабораторной энергии 70 МэВ, что отвечает энергии возбуждения компаунд-ядра  $^{74}\text{Kr}$   $E = 51,9$  МэВ [28]. В расчетах учтем эмиссию нейтронов, протонов и  $\alpha$ -частиц.

Квантовые расчеты были выполнены по программе GROGI [1, 2] с параметрами оптической модели, приведенными в табл. 1.

Таблица 1. Параметры оптической модели в программе GROGI

Канал	$V$ , МэВ	$r_V$ , фм	$a_V$ , фм	$W$ , МэВ	$r_W$ , фм	$a_W$ , фм	$V_{SO}$ , МэВ	$r_{SO}$ , фм	$a_{SO}$ , фм	$r_c$ , фм
$n$	48	1,17	0,75	10,8	1,27	0,60	6,2	1,01	0,75	—
$p$	49	1,17	0,75	10,8	1,32	0,51	6,2	1,01	0,75	1,25
$\alpha$	180	1,20	0,75	15,0	1,70	0,60	—	—	—	1,30

Величины  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $c_0$ ,  $c_1$ , полученные в результате подгонки  $L_l(s)$  с оптическими  $T_l(\epsilon)$  с помощью (11), даны в табл. 2. В табл. 3 даны

Таблица 2. Параметры коэффициентов проницаемости  $T_l^{\text{eff}}(\epsilon)$  при распаде  $^{74}\text{Kr}$

Канал	$b_0$ , МэВ	$b_1$ , МэВ <sup>2</sup>	$c_0$ , МэВ	$c_1$ , МэВ <sup>2</sup>
$n$	0,856	0,162	0,340	0,091
$p$	6,709	1,005	0,363	0,109
$\alpha$	10,348	0,736	0,075	0,016

Таблица 3. Приведенный радиус кулоновского барьера  $r_{0,c}$ , фм, при различных  $\tau$

Канал	$\tau = 0,5$ МэВ	$\tau = 1$ МэВ	$\tau = \infty$
$p$	2,07	1,71	1,45
$\alpha$	1,93	1,78	1,66

приведенные радиусы кулоновского барьера в  $p$ - и  $\alpha$ -каналах распада при нескольких температурах, вычисленные с помощью соотношения

$$r_{0,c} = \frac{Z_p Z_d e^2}{(A_p^{1/3} + A_d^{1/3}) \left( b_0 - \frac{b_1}{\tau} \right)}.$$

Нетрудно убедиться, что  $r_{0,c}$  при низких  $\tau$  превосходят приведенные радиусы

$$r'_0 = \frac{R_e}{A_p^{1/3} + A_d^{1/3}},$$

подсчитанные для  $R_e$ , определенных в (7).

На рис. 2 в зависимости от  $I$  приведены: средняя энергия возбуждения  $\bar{u}$ , угловой момент  $\tilde{j} = (j^2)^{1/2}$  и отношения ветвления

$$K = R(E, I)/R_{\text{tot}}(E, I)$$

для  $n$ ,  $p$  и  $\alpha$ , подсчитанные по квантовым и классическим формулам, а также температура  $\tau$  дочерних ядер. Видно, что полуклассические расчеты с температурным приближением для  $\omega(q)$  и приближением

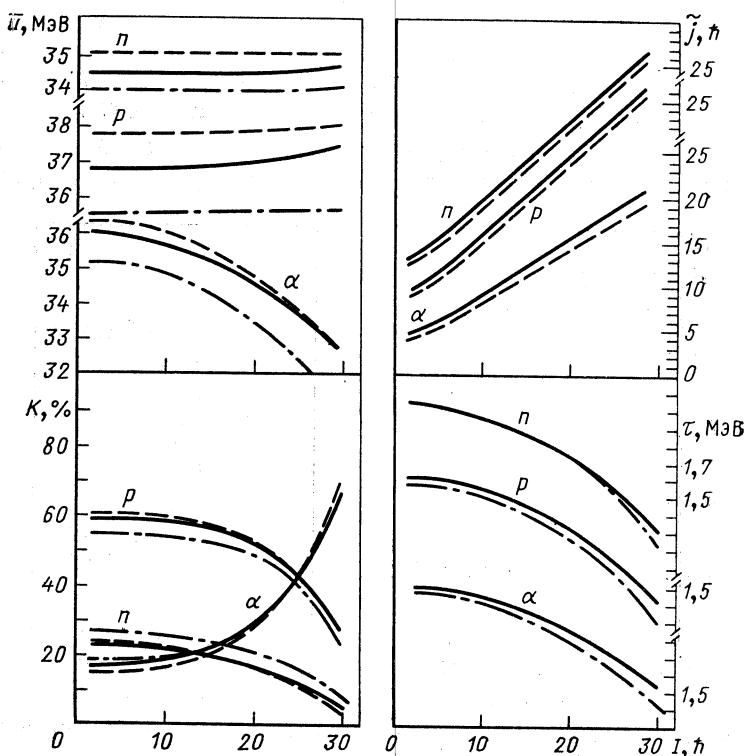


Рис. 2. Зависимости  $\bar{u}$ ,  $\tilde{j}$ ,  $K$  и  $\tau$  от  $I$  при испускании  $n$ ,  $p$  и  $\alpha$  из  $^{74}\text{Kr}$  с  $E = 51,9$  МэВ: —— квантовый расчет; — полуklassический; -·- полуklassический расчет с  $b_1 = c_1 = 0$

(11) для  $L_1(s)$  очень хорошо согласуются с квантовыми расчетами, выполненными без этих приближений.

Рисунок показывает, что с ростом  $I$  доля испущенных  $\alpha$ -частиц растет. Это связано с тем, что после испускания  $\alpha$ -частицы у ядра остается меньший спин, чем после вылета  $n$  или  $p$ . А так как  $\omega(q)$  с уменьшением  $j$  растет, то испускание  $\alpha$  оказывается более вероятным. Падение  $\tau$  с ростом  $I$  вызвано уменьшением тепловой энергии за счет роста вращательной.

Штрихпунктиром на рис. 2 показан расчет с  $b_1 = c_1 = 0$ , т. е. для  $T_1(\varepsilon)$  в форме резкой ступеньки. Видно, что  $\tilde{j}$  почти не поменялся, а  $K$  и особенно  $\bar{u}$  изменились довольно заметно. Так,  $\bar{u}$  в  $p$ -ка-

нале стало меньше на 1—1,2 МэВ, а следовательно, средняя кинетическая энергия протонов стала больше на такое же значение.

**Другие приближения.** Более последовательный вывод формул (33), (34) для двухчастичной корреляционной функции, приведенный в [31], показывает, что в их основе лежат следующие допущения: 1) пренебрежение членами, пропорциональными  $\beta_e^2$  в экспоненте (30), 2) замена среднего от функции  $\varepsilon$  и  $j$  на функцию средних от этих величин и 3) использование  $\varepsilon$  вместо  $\langle \varepsilon \rangle$  при расчете  $G_2$ .

Эти упрощения, по-видимому, оправданы при  $(\tilde{I}/I)^2 \ll 1$ . Чтобы проверить это предположение, рассмотрим угловые корреляции

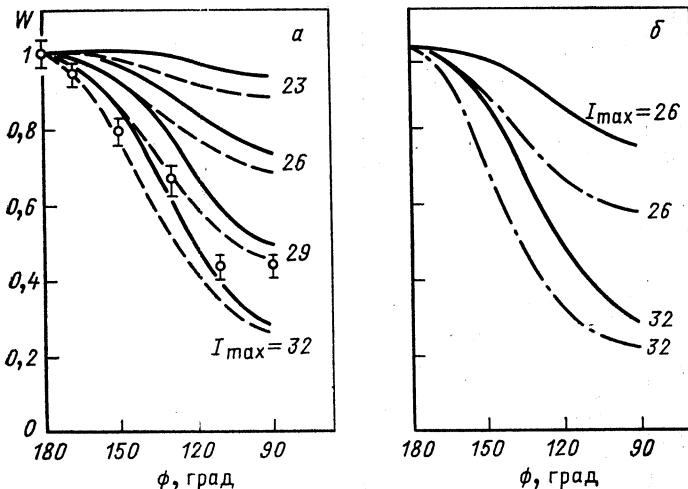


Рис. 3. Угловые корреляции двух  $\alpha$ -частиц из реакции  $^{58}\text{Ni}(^{16}\text{O}, \alpha\alpha)$  при  $E_{\text{лаб}} = 70$  МэВ,  $\theta_1 = \theta_2 = 110^\circ$ :

а — сравнения эксперимента (○) с квантовыми (штриховые) и полуклассическими (сплошные линии) расчетами; б — сравнение полуклассического расчета при  $D \neq 0$  (сплошные) и  $D = 0$  (штрихпунктирные)

$W(\phi)$  для реакции  $^{58}\text{Ni}(^{16}\text{O}, \alpha\alpha)$  при  $E_{\text{лаб}} = 70$  МэВ и  $\theta_1 = \theta_2 = 110^\circ$  в системе центра масс [28]. Первый этап этой реакции описан выше. Измеренные и рассчитанные  $W(\phi)$  приведены на рис. 3. Как и ожидалось, согласие упрощенных полуклассических расчетов с квантовыми кривыми, полученными в [28], с ростом  $I_{\max}$  улучшается. При  $I_{\max} = 32$  оба расчета почти совпадают и близки к экспериментальным точкам.

Если в (31) положить  $D = 0$ , то в соответствующей корреляционной функции (обозначим ее  $W_0$ ) не будет учитываться искажение спинового распределения ядра за счет вылета первой частицы. Из рис. 3 видно, что  $W_0$  обладает большей анизотропией, чем  $W$ . Как показывают расчеты, для совмещения  $W_0$  с  $W$  нужно уменьшить  $I_{\max}$  на половину среднего орбитального момента  $\alpha$ -частицы.

### 3. ДЕФОРМИРОВАННЫЕ ЯДРА

**Вероятность распада.** В настоящем пункте дан вывод выражения для вероятности испускания частицы в единицу времени из деформированного аксиально-симметричного вытянутого ядра, вращающегося вокруг своей короткой оси. Процесс эмиссии подразделен на три стадии: формирование предразрывной конфигурации, вылет частицы из ядра и движение частицы к детектору.

Если выделить малый участок поверхности с координатой  $r$ , площадью  $d^2A$  и внешней единичной нормалью  $N$ , то нетрудно видеть, что за единичный отрезок времени его может пересечь частица, находящаяся от него на расстоянии, меньшем, чем  $Nv'$ . Здесь  $v' = v - [\omega_{\perp} \times r]$  — скорость частицы относительно точки вылета,  $v$  — скорость частицы в лабораторной системе,  $\omega_{\perp} = I/J_{\perp}$  — угловая скорость ядра,  $J_{\perp}$  — момент инерции ядра при вращении вокруг короткой оси.

Обозначая  $f(r, p)$  вероятность образования предразрывной конфигурации, а  $k(r, p)$  асимптотический импульс частицы, стартовавшей из точки  $r$  с импульсом  $p$ , вероятность испускания частицы в единицу времени можно представить формулой [37, 40]

$$R_{\Phi}(e, l, n; E, I) = \int d^2A \int d^3p \Theta(Nv') Nv' f(r, p) \delta[e - k^2(r, p)/2m] \delta(l - r \times p) \delta[n - \hat{k}(r, p)], \quad (40)$$

где интегрирование распространяется на всю ядерную поверхность и на все пространство  $p$ .

Уравнение (40) описывает эмиссию из вращающегося ядра за единичный интервал времени, выбранный очень малым по сравнению с периодом вращения  $2\pi/\omega_{\perp}$ . Угол  $\Phi$  задает ориентацию оси симметрии ядра  $v$  в плоскости, перпендикулярной  $I$  в момент вылета частицы.

При температурах, заметно меньших, чем энергия отделения нуклона, можно пренебречь корреляциями нуклонов, входящих в состав испускаемой частицы, с нуклонами остаточного ядра, связанными с принципом запрета Паули, и представить функцию  $f(r, p)$  в сепарабельном виде

$$f(r, p) = [g/(2\pi)^3] \omega(q)/\omega_x(Q). \quad (41)$$

Используя сохранение энергии и углового момента, тепловую энергию  $q$  дочернего ядра можно записать следующим образом:

$$q = E - S - \frac{p^2}{2m} - U(r) - U_{LD} - \frac{(I - r \times p)^2}{2J_{\perp}} - \frac{[(I - r \times p)v]^2}{2J_{eff}}, \quad (42)$$

где  $U(r)$  — потенциальная энергия частицы;  $U_{LD}$  — энергия деформации;  $J_{eff} = (J_{||}^{-1} - J_{\perp}^{-1})^{-1}$  — эффективный момент инерции;  $J_{||}$  — момент инерции при вращении вокруг оси  $v$ .

Учитывая, что  $\mathbf{I}\mathbf{v} = 0$  и опуская члены, квадратичные по  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , мы можем упростить соотношение (42). Подставляя это упрощенное выражение для  $q$  в (41) и используя температурное приближение для  $\omega(q)$ , получаем

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C_{\perp} \exp [-(\mathbf{p}^2/2m + U(\mathbf{r}) - \omega_{\perp}[\mathbf{r} \times \mathbf{p}]/\tau)], \quad (43)$$

где коэффициент  $C_{\perp}$  имеет вид

$$C_{\perp} = \frac{g}{(2\pi)^3} \exp [(E - S - U_{LD} - I^2/2J_{\perp} - q')/\tau] \omega(q')/\omega_x(Q). \quad (44)$$

В (43) нетрудно узнать распределение Максвелла — Больцмана в координатной системе, вращающейся с частотой  $\omega_{\perp}$ . Температура  $\tau$  в этом выражении — это обратная логарифмическая производная от  $\omega(q)$  при  $q = q'$ , где  $q'$  — тепловая энергия, вблизи которой выполняется разложение Тейлора для энтропии.

Уравнения (40) и (43), (44) нетрудно обобщить на ядро произвольной формы, вращающееся вокруг одной из главных осей с моментом инерции  $J_{rig}$ . С этой целью достаточно заменить в этих уравнениях  $J_{\perp}$  на  $J_{rig}$ , а  $\omega_{\perp}$  — на соответствующую угловую скорость  $\omega_{rig} = I/J_{rig}$ .

**Малые деформации.** Для сферических ядер формула (40) должна переходить в (6). Чтобы убедиться в том, что это действительно так, заметим прежде всего, что для сферического ядра последнюю  $\delta$ -функцию в (40) можно записать в следующем развернутом виде:

$$\delta[\mathbf{n} - \hat{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, \mathbf{p})] = (\hat{\mathbf{n}}\hat{\mathbf{r}}) \delta(\mathbf{n}[\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{r}}] - \cos \chi) \delta(\mathbf{n}\hat{\mathbf{l}}), \quad (45)$$

где

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r; \quad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l}/l; \quad \cos \chi = \hat{\mathbf{k}}[\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{r}}].$$

При замене переменных  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  на  $\mathbf{r}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{l}$  угол  $\chi$  становится функцией  $\mathbf{r}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{l}$ . Поэтому  $R_{\Phi}$  можно представить в виде

$$R = C \exp \left( -\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\omega \mathbf{l}}{\tau} \right) \delta(\mathbf{n}\hat{\mathbf{l}}) \int d^2 A(\mathbf{n}\hat{\mathbf{r}}) \delta(\mathbf{n}[\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{r}}] - \cos \chi) g, \quad (46)$$

где использовано (43), опущен индекс  $\Phi$  в  $R_{\Phi}$  и введено обозначение

$$g = \frac{1}{m} \int d^3 p(\hat{\mathbf{r}}\mathbf{p}) \Theta(\hat{\mathbf{r}}\mathbf{p}) \delta \left( \varepsilon - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - U \right) \delta(\mathbf{l} - \mathbf{r} \times \mathbf{p}). \quad (47)$$

Интегрирование в (47) удобно выполнять в системе, где ось  $z$  направлена вдоль  $\mathbf{r}$ , а  $\mathbf{l}$  лежит в плоскости  $xOz$ . В результате получим

$$g = \frac{1}{r^2} \Theta \left( \varepsilon - U - \frac{l^2}{2mr^2} \right) \delta(\mathbf{l}\hat{\mathbf{r}}).$$

Подставляя это выражение в (46), приходим к соотношению

$$R = C \exp \left( -\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\omega \mathbf{l}}{\tau} \right) \Theta \left( \varepsilon - U - \frac{l^2}{2mr^2} \right) \delta(\mathbf{n}\mathbf{l}) h, \quad (48)$$

где

$$h = \frac{1}{r^2} \int d^2A(\hat{n}\hat{r}) \delta(\hat{r}[\hat{n} \times \hat{l}] - \cos \chi) \delta(\hat{l}\hat{r}). \quad (49)$$

Для сферического ядра функция  $\chi(r, \varepsilon, l)$  зависит только от  $r, \varepsilon, l$  и интегрирование в (49) по поверхности сферы приводит к  $h = 1$ . Отождествляя  $r$  с  $R_0$  и  $U(r)$  с  $E_0$ , находим, что (48) совпадает с (6) без слагаемого  $-l^2/(2J\tau)$  в показателе экспоненты. Как видно из (24), при умеренных спинах этим слагаемым можно пренебречь, если  $mR_0^2 \ll J$ . Это условие выполняется для средних и тяжелых ядер.

Заметим, что интеграл по  $d^3p$  в (40) можно найти аналитически и для деформированного ядра, если  $v'N\Theta(v'N)$  заменить  $vr\Theta(vr)$ . В результате вероятность распада в единицу времени оказывается пропорциональной коэффициенту проницаемости, зависящему от кулоновского и центробежного барьеров в точке испускания, координаты которой восстанавливаем по заданным  $\varepsilon, l, n$ :

$$R_\Phi = C_\perp \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\omega l}{\tau}\right) \delta(nl) \left\{ \Theta\left[\varepsilon - U(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right] \right\}_{r=r(\varepsilon, l, n)}. \quad (50)$$

Анализ эмиссии частиц из деформированных ядер, основанный на таком «локальном» коэффициенте проницаемости, был предложен в работах [9, 26] и позднее развит в [41]. Из приведенного выше вывода формулы (50) можно ожидать, что этот подход справедлив при малых отклонениях от сферической формы, когда  $N \simeq r$ .

**Функции  $\rho_c(z)$  и  $k(r, p)$ .** Из рассмотрения предельного случая сферического эмиттера вытекает, что поверхность, по которой выполняется интегрирование в (40), следует отождествить с поверхностью потенциального барьера. Для сферического ядра — это такая поверхность, на которой  $U(r)$  достигает максимума. В настоящем пункте мы распространим это понятие на случай деформированного ядра и опишем процедуру вычисления функции  $k(r, p)$  [42, 43].

Для аксиально-симметричного ядра положение частицы во врашающейся системе удобно описывать с помощью цилиндрических координат  $\rho, z, \varphi$ . В этих координатах поверхность, задающая положение потенциального барьера, имеет вид  $\rho = \rho_c(z)$ , так что задача сводится к тому, чтобы выразить функцию  $\rho_c(z)$  через потенциал частицы  $U(\rho, z)$ .

Общее представление о характере  $U(\rho, z)$  дают силовые линии. Силовую линию  $\rho(z)$ , проходящую через точку  $(\rho_0, z_0)$ , находим из уравнения

$$d\rho/dz = U_\rho(\rho, z)/U_z(\rho, z), \quad (51)$$

где  $U_\rho := \partial U / \partial \rho$ ;  $U_z = \partial U / \partial z$ , с дополнительным условием  $\rho(z_0) = \rho_0$ . Для удлиненного ядра силовые линии можно разделить на два семейства: линий, занимающие ограниченную часть плоскости  $\rho = z$ , и линий, уходящие на бесконечность. Линии обоих семейств

асимптотически стремятся к замкнутой кривой, которая разграничивает семейства и может быть принята в качестве  $\rho_c(z)$ .

Для описания вращения ядра введем лабораторную систему 1, 2, 3 и систему  $x, y, z$ , жестко связанную с ядром. Как показано на рис. 4, ось  $z$  направлена по оси симметрии ядра, оси  $y$  и  $z$  совпадают с I. Координаты частицы во вращающейся системе  $x, y, z$  выражаются через ее лабораторные координаты  $r_1, r_2, r_3$  с помощью формул

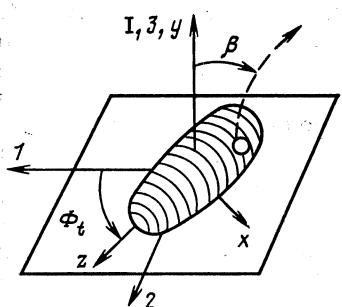


Рис. 4. Лабораторная (1, 2, 3) и внутренняя ( $x, y, z$ ) системы отсчета и углы  $\beta$  и  $\Phi_t$

$$\begin{aligned} x &= -r_1 \sin \Phi_t + r_2 \cos \Phi_t, \quad y = r_3, \\ z &= r_1 \cos \Phi_t + r_2 \sin \Phi_t, \end{aligned} \quad (52)$$

где  $\Phi_t = |\omega_{\perp}| t$  — угол поворота ядра за время  $t$ .

Поскольку частица испускается с поверхности потенциального барьера, ее координаты в начальный момент времени удовлетворяют соотношениям

$$r_1 = z, \quad r_2 = \rho_c(z) \cos \varphi, \quad r_3 = \rho_c(z) \sin \varphi, \quad (53)$$

которые сокращенно будем записывать в виде  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c(z, \varphi)$ .

Чтобы найти асимптотические характеристики частицы для заданных  $z, \varphi$  и  $\mathbf{v}'$ , мы вначале переходим от  $z, \varphi, \mathbf{v}'$  к

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_c(z, \varphi) \text{ и } \mathbf{p} = m\mathbf{v}' + m[\omega_{\perp} \times \mathbf{r}], \quad (54)$$

а затем решаем уравнения Гамильтона для функций  $\mathbf{r}(t), \mathbf{p}(t)$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1 &= (x/\rho) U_{\rho} \sin \Phi_t - U_z \cos \Phi_t, & \dot{r}_1 &= p_1/m; \\ \dot{p}_2 &= -(x/\rho) U_{\rho} \cos \Phi_t - U_z \sin \Phi_t, & \dot{r}_2 &= p_2/m; \\ \dot{p}_3 &= -(y/\rho) U_{\rho}, & \dot{r}_3 &= p_3/m, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

где  $x, y$  и  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $z$  выражены через  $r_1, r_2, r_3$  с помощью (52).

Интегрируя систему (55) от  $t = 0$  до  $t = \infty$  с начальным условием  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}$ , получаем асимптотический импульс  $\mathbf{k}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , а с ним и

$$\epsilon = k^2/2m, \quad \cos \beta = \mathbf{kI}/(kI), \quad \gamma = \operatorname{arctg} (k_2/k_1), \quad (56)$$

где  $\beta, \gamma$  — полярный и азимутальный углы ориентации  $\mathbf{n}$  в системе 1, 2, 3.

Для частицы с зарядом  $Z_p e$ , движущейся в кулоновском поле сферического ядра с зарядом  $Z_d e$ , имеется специфический для этого потенциала интеграл движения [44]

$$\mathbf{A} = [\mathbf{p} \times \mathbf{I}] + c\hat{\mathbf{r}},$$

где  $c = mZ_p Z_d e^2$ ,  $\hat{r} = \mathbf{r}/r$ . Этим можно воспользоваться, чтобы найти явный вид соответствующей функции  $\mathbf{k}(\mathbf{r}, p)$ .

Учитывая сохранение вектора  $\mathbf{A}$ , орбитального момента  $\mathbf{l}$  и полной энергии частицы, можно записать соотношение

$$\mathbf{p} \times [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] + c\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{k}[\mathbf{r} \times \mathbf{p}] + c\hat{\mathbf{k}}, \quad (57)$$

где

$$\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k; k = (p^2 + 2mB)^{1/2}; B = Z_p Z_d e^2/r.$$

Разрешив уравнение (57) относительно  $\mathbf{k}$ , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{k} = & \frac{1}{\frac{m^2 B^2}{p^2 + 2mB} + p_t^2} \left\{ mB \left( \frac{p^2 + mB}{(p^2 + 2mB)^{1/2}} - p_r \right) \hat{\mathbf{r}} + \right. \\ & \left. + \left[ p_t^2 + mB \left( 1 - \frac{p_r}{(p^2 + 2mB)^{1/2}} \right) \right] \mathbf{p} \right\}, \end{aligned} \quad (58)$$

где  $p_r = \mathbf{p}\hat{\mathbf{r}}$ ;  $p_t^2 = p^2 - p_r^2$ .

Систему (55) достаточно интегрировать до такого момента  $t_f$ , когда ядерные силы и несферическая составляющая кулоновских сил становятся пренебрежимо малыми по сравнению с центральными кулоновскими силами, после чего для получения  $\mathbf{k}$  значения  $\mathbf{r}(t_f)$  и  $\mathbf{p}(t_f)$  подставляем в (58).

**Метод Монте-Карло.** Интегрирование в (40) удобно выполнять методом Монте-Карло. С этой целью пространство  $(\varepsilon, \cos \beta, \gamma)$  разобъем на конечные ячейки, нумеруемые индексами  $i, j, k$  и имеющие стороны  $\Delta\varepsilon, \Delta \cos \beta, \Delta\gamma$  соответственно. Вероятность  $R_\Phi(i, j, k; \tau, I)$  найти частицу в ячейке  $i, j, k$  получаем интегрированием выражения (40) для  $R_\Phi(\varepsilon, n, l; E, I)$  по  $d^3l$  и по объему  $\Delta\varepsilon\Delta \cos \beta\Delta\gamma$  этой ячейки.

Переходя от  $\mathbf{v}$  к  $\mathbf{v}'$  и замечая, что  $Nd^2A = M dz d\varphi$ , где  $M = \partial\mathbf{r}/\partial z \times \partial\mathbf{r}/\partial\varphi$  — внешняя нормаль к поверхности в точке  $\mathbf{r}$ , получаем

$$\begin{aligned} R_\Phi(i, j, k; \tau, I) = & C_\perp m^3 \int_{\substack{\varepsilon(z, \varphi, \mathbf{v}') \epsilon_i \\ \cos \beta(z, \varphi, \mathbf{v}') \epsilon_j \\ \gamma(z, \varphi, \mathbf{v}') \epsilon_k}} dz d\varphi d^3v' \mathbf{M} \mathbf{v}' \Theta(\mathbf{M} \mathbf{v}') \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{m \mathbf{v}'^2}{2\tau} - \frac{U(z)}{\tau} + \frac{m}{2\tau} [\boldsymbol{\omega}_\perp \times \mathbf{r}_c(z, \varphi)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь предположено, что  $\mathbf{M}$  с помощью уравнения (53) выражено через  $z$  и  $\varphi$ . При заданных  $i, j, k$  интегрирование выполняется по таким  $z, \varphi$  и  $\mathbf{v}'$ , для которых  $\varepsilon, \cos \beta$  и  $\gamma$  попадают в ячейки  $i, j$  и  $k$ .

Следуя методу Монте-Карло,  $z$  и  $\varphi$  берем из набора однородно распределенных случайных чисел, а  $\mathbf{v}'$  — из набора случайных чисел, распределенных по нормальному закону. Для заданных  $z, \varphi$  и  $\mathbf{v}'$  сначала находим  $w$ , которое, по определению, равно подынтегральному выражению в (59), поделенному на  $\exp \left\{ -\frac{m \mathbf{v}'^2}{2\tau} \right\}$ , а затем по формулам (54) — (56) подсчитываем  $\varepsilon, \cos \beta$  и  $\gamma$  для ячейки,

в которую попадет частица, и добавляем  $w$  к текущей вероятности найти частицу в этой ячейке. Расчеты повторяются до тех пор, пока гистограммы угловых и энергетических распределений не будут плавными [37, 45].

Полная вероятность испускания частицы в единицу времени (ширина)  $R(\tau, I)$  равна сумме  $R_{\Phi}(i, j, k; \tau, I)$  по  $i, j, k$ , т. е. правой части (59) без ограничений  $\varepsilon \in i$ ,  $\cos \beta \in j$ ,  $\gamma \in k$ . Выполняя интегрирование по  $d^3v'$  и  $d\Phi$  аналитически, мы получаем [40]

$$R(\tau, I) = 4\pi^2 \tau^2 m C_{\perp} \int_{-z_0}^{z_0} dz \rho_c \left( 1 + \left( \frac{d\rho_c}{dz} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp \left( -\frac{U(z)}{\tau} + \frac{m\omega_{\perp}^2}{2\tau} \left( z^2 + \frac{1}{2} \rho_c^2 \right) \right) I_0 \left( \frac{m\omega_{\perp}^2 \rho_c^2}{4\tau} \right), \quad (60)$$

где  $z_0$  — половина длины ядра;  $I_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя. Для сферического ядра (60) переходит в (19) с  $b_1 = 0$ ,  $J_c = mR_0^2$  и  $\beta_c = mR_0^2/J$ .

При умеренных температурах, прежде чем испустить частицу, ядро совершает много оборотов и наблюдаемые распределения усредняются по  $\gamma$ . Такие усредненные распределения описываются функцией  $R(i, j; \tau, I)$ , которая получается из  $R_{\Phi}(i, j, k; \tau, I)$  с  $\Phi = 0$  суммированием по  $k$ .

Если процесс разрядки протекает как цепь последовательных испарений, после каждого из которых в системе устанавливается равновесие, то угловые и энергетические распределения частицы являются взвешенными средними по всему каскаду:

$$\sigma_v^I(i, j) = \int d\tau \sigma_v^I(\tau) \frac{R(i, j; \tau, I)}{R(\tau, I)}, \quad (61)$$

где  $\sigma_v^I(\tau)$  — полное сечение образования частицы  $v$  при условии, что соответствующее остаточное ядро имеет температуру  $\tau$ . Для подсчета  $\sigma_v^I(i, j)$  нужно  $w$  заменить отношением  $w/R(\tau, I)$  и ввести случайное число, генерирующее  $\tau$  в соответствии с распределением  $\sigma_v^I(\tau)$ .

#### 4. ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

**Функция отклонения.** Рассмотрим свойства функций  $\rho_c(z)$ ,  $\mathbf{k}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  для ядра в форме вытянутого эллипсоида вращения. Большую и малую полуоси массового распределения обозначим  $a$  и  $b$  соответственно и введем отношение полуосей  $\delta = b/a$ . Если  $\delta$  задано, то  $a = R_m/\delta^{2/3}$ ,  $b = R_m\delta^{1/3}$ , где  $R_m = 1,225A_d^{1/3}$  — радиус равновесной сферы [46],  $A_d$  — массовое число дочернего ядра.

Следуя работе [47], ядерный потенциал берем в виде

$$U_n = -V_0 [1 + \exp(l/a_0)]^{-1}, \quad (62)$$

Рис. 5. Силовые линии (—) и линия барьера (—) в системе  $^{168}\text{Er} + \alpha$  при деформации 2 : 1

где  $V_0$  и  $a_0$  — глубина и диффузность потенциала;

$$l = \frac{1}{2}(a_n^4\rho^2 + b_n^4z^2)^{-1/2}(a_n^2\rho^2 + b_n^2z^2 - a_n^2b_n^2) \quad (63)$$

— расстояние от точки  $(\rho, z)$  до контура, на котором  $|U_n|$  вдвое меньше, чем в центре;  $a_n = R_n/\delta^{2/3}$ ;  $b_n = R_n\delta^{1/3}$ ;  $R_n$  — радиус потенциала.

Большую  $a_c$  и малую  $b_c$  полуоси эллипса, характеризующего зарядовое распределение, получаем из системы уравнений

$$a_c b_c^2 = R_c^3, \quad a_c - a_n = b_c - b_n,$$

где  $R_c = r_{0c} A_d^{1/3}$  — радиус зарядного распределения. Благодаря второму из этих условий зазор между зарядовым распределением и ядерным потенциалом по всей поверхности приблизительно одинаков.

Кулоновский потенциал вне равномерно заряженного вытянутого эллипсоида с полуосами  $b_c$ ,  $b_c$ ,  $a_c$  вычисляем по аналогии с потенциалом тяготения [48]. Результат можно представить в виде

$$U_c = Q \left[ \left( 1 + \frac{1}{2}u - w \right) \ln(v_1 + v_2) + \frac{v_1 w}{v_2} - \frac{1}{2}uv_1v_2 \right], \quad (64)$$

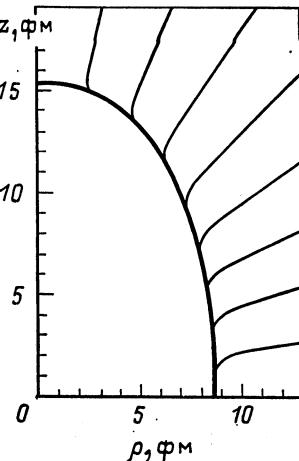
где

$$Q = \frac{3}{2c} Z_p Z_d e^2; \quad c = (a_c^2 - b_c^2)^{1/2}; \quad u = \left( \frac{\rho}{c} \right)^2; \quad w = \left( \frac{z}{c} \right)^2;$$

$$v_1 = \left\{ \frac{1}{2u} [(u + w - 1)^2 + 4u]^{1/2} - (u + w - 1) \right\}^{1/2}; \quad v_2 = (1 + v_1^2)^{1/2}.$$

На рис. 5 показаны силовые линии потенциала  $U = U_n + U_c$  во внешней области и линия барьера  $\rho_c(z)$  для системы  $^{168}\text{Er} + \alpha$  при  $\delta = 1 : 2$ . Для параметров потенциала использованы значения  $r_{0c} = 1,3$  фм,  $V_0 = 50,2$  МэВ,  $R_n = (1,2 A_d^{1/3} + 1,5)$  фм,  $a_0 = 0,564$  фм [49]. На больших расстояниях от ядра силовые линии, показанные на рисунке, переходят в радиусы, проведенные под углами  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ , ...,  $80^\circ$  к оси  $z$ .

Определим функцию  $\tilde{k}_c(r, p)$ , подставив  $U(z)$  вместо  $B$  в правую часть (58) для  $k(r, p)$ , подсчитанного для сферического кулоновского потенциала. Представление о погрешностях, которые возникают при замене  $k(r, p)$  на  $\tilde{k}_c(r, p)$ , дает рис. 6, показывающий функции распределения  $P(\Delta\varepsilon)$  и  $P(\Delta \cos \beta)$  для отклонений  $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \tilde{\varepsilon}_c$  и



$\Delta \cos \beta = \cos \beta - \cos \tilde{\beta}_c$ , где

$$\tilde{\mathbf{k}}_c = \tilde{\mathbf{k}}_c^2 / 2m, \quad \cos \tilde{\beta}_c = \tilde{\mathbf{k}}_c \mathbf{I} / (\tilde{k}_c I).$$

Расчет проведен при  $I = 64$ ,  $\tau = 1,8$  МэВ,  $\delta = 1:2$ . Величины  $z$ ,  $\varphi$ ,  $v$  генерировались датчиками случайных чисел:  $v'$  распределено по Гауссу с нулевым средним и дисперсией  $(\tau/m)^{1/2}$ ,  $z$  и  $\varphi$  распределены равномерно, события взвешивались с весовой функцией  $w$ .

На рис. 6 видно, что  $|\Delta \varepsilon| \leq 1$  МэВ, а  $|\Delta \cos \beta| \leq 0,05$ . Непосредственная проверка показывает, что  $\tilde{\mathbf{k}}_c^2 = \mathbf{p}^2 + 2mU(z)$ , независимо от вида  $U(z)$ , и, следовательно,  $\varepsilon_c$  совпадает с энергией частицы.

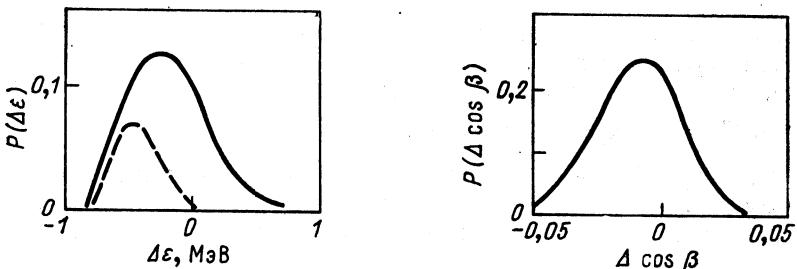


Рис. 6. Функции распределения  $P(\Delta \varepsilon)$  (слева) и  $P(\Delta \cos \beta)$  (справа) при  $I = 64$ ,  $\tau = 1,8$  МэВ в системе  $^{166}\text{Er} + \alpha$ . Пунктир — распределение ошибок для  $\varepsilon$  из интервала  $(\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\min} + 5)$  МэВ

цы в точке вылета. Отсюда вытекает, что  $\Delta \varepsilon$  характеризует влияние вращения остаточного ядра на энергию улетающей частицы. Из рисунка заключаем, что  $\varepsilon$  в среднем меньше, чем  $\varepsilon_c$ . Понижение  $\varepsilon$  относительно  $\varepsilon_c$  особенно выражено для частиц с самыми низкими энергиями. Это следует из вида  $P(\Delta \varepsilon)$  для частиц с энергиями  $\varepsilon$  от  $\varepsilon_{\min}$  до  $\varepsilon_{\min} + 5$  МэВ (пунктир на рис. 6).

**Температурные распределения.** Расчет испарительных каскадов удобно выполнять в рамках так называемого  $s$ -волнового приближения [50]. В этом приближении сечение вылета частицы  $v$  из ядра с энергией возбуждения  $E$  и спином  $I$  имеет вид

$$\left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_v = \sigma(E, I) g \sqrt{2m\varepsilon} \sigma_v(\varepsilon) \rho(E - S - \varepsilon, I) / D', \quad (65)$$

где

$$\sigma_v(\varepsilon) = \frac{\pi \hbar^2}{2m\varepsilon} \sum_l (2l+1) T_l^v(\varepsilon) \quad (66)$$

— сечение поглощения частицы  $v$  дочерним ядром;  $D'$  — интеграл числителя по всем частицам и энергиям испускания.

При выводе (65) из (35) — (37) сумма  $\rho(E - S - \varepsilon, j)$  по  $j$  от  $|I - l|$  до  $|I + l|$  была заменена  $(2l+1) \rho(E - S - \varepsilon, I)$ .

Используя температурное разложение для плотности уровней, можно показать, что такая замена оправдана при  $(l\lambda)^2 \ll 1$ , где  $\lambda = \hbar\omega_{\text{rig}}/\tau$ .

Сечения  $\sigma_v(\varepsilon)$  вычисляем по оптической модели или параметризуем. Например, подставив в (66)  $T_l^{\text{eff}}(\varepsilon)$  и заменив сумму по  $l$  на интеграл, получим

$$\sigma^{\text{eff}}(\varepsilon, R_0, E_0, D_0) = \frac{\pi R_0^2 D_0}{\varepsilon \sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) + \eta(1 + \operatorname{erf} \eta) \right\}, \quad (67)$$

где

$$\eta = (\varepsilon - E_0)/D_0 \sqrt{2}.$$

Соотношение (67) аналогично формуле Вонга [51], но дает более быстрое падение сечений в подбарьерной области  $\varepsilon < E_0$ .

Плотность уровней деформированного ядра

$$\rho(E, j) = (2j + 1) E_j^{-2} \text{th} \exp[2(a_j E_j \text{th})^{1/2}], \quad (68)$$

где тепловая энергия ядра

$$E_{j, \text{th}} = E - \Delta - U_{\text{LD}} - j^2/2J_{\text{rig}},$$

спаривающая поправка  $\Delta$  равна 0,  $-11/\sqrt{A}$  и  $-22/\sqrt{A}$  для четно-четного, четно-нечетного и нечетно-нечетного ядра соответственно, параметр плотности уровней [52]

$$a_j = a(33 + 4\Delta_j^{-2/3} + 8\Delta_j^{1/3})/45,$$

где  $\Delta_j = R_{\text{major}}/R_{\text{minor}}$  — отношение большей и меньшей полуосей ядра.

Сечения  $\sigma_v^I(\tau)$  при распаде  ${}^{90}\text{Zr}$  с  $E_x = 142$  МэВ и  $I = 64$ , что отвечает вытянутому ядру с  $\delta = 0,5$ , показаны в верхней части рис. 7. Они подсчитаны с помощью статистического кода ALICE [50] в подпрограмме, вычисляющей кумулятивный энергетический спектр частиц. Однако вклады от различных шагов испарительного каскада сортировались в соответствии с величиной  $\tau$ , а не  $\varepsilon$ .

Для учета влияния деформации на  $\sigma_v(\varepsilon)$  заменим в (67)  $R_0, E_0$  на  $R(z), U(z)$  и выполним усреднение по поверхности ядра

$$\sigma_{\text{def}}(\varepsilon) = z_0^{-1} \int_0^{z_0} dz \sigma^{\text{eff}}(\varepsilon, R(z), U(z), D_0). \quad (69)$$

Расчет  $\sigma_v^I(\tau)$  с  $\sigma_{\text{def}}(\varepsilon)$  представлен в нижней половине рис. 7. Введение деформации в  $\sigma_v(\varepsilon)$  увеличило выходы заряженных частиц, но форма распределений по  $\tau$  почти не изменилась.

При расчете  $\sigma_{\text{def}}(\varepsilon)$  в качестве  $\rho_c(z)$  взят эллипс. В этом случае расстояние от центра до поверхности определяется соотношением

$$R(z) = (R_0/\delta^{2/3})(\delta^2 + \sigma_z^{-2}(z/z_0)^2)^{1/2}, \quad (70)$$

где  $\sigma = 1$  для вытянутого и  $\sigma = -1$  для сплюснутого (вдоль оси  $z$ ) ядра;

$$\xi = |(1 - \delta^2)|^{1/2}, \quad \delta = \rho_0/z_0, \quad (71)$$

$\rho_0, z_0$  — полуоси эллипса в направлении осей  $\rho$  и  $z$ . Заметим, что  $\delta < 1$  для  $\sigma = 1$  и  $\delta > 1$  при  $\sigma = -1$ . Если  $\delta$  задано, то  $z_0 = R_0/\delta^{2/3}$ .

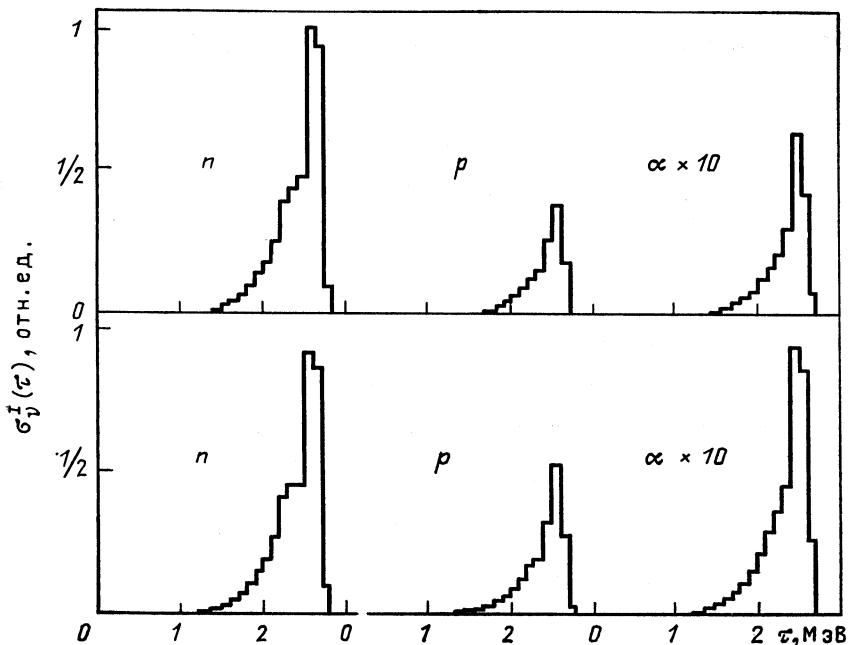


Рис. 7. Сечения  $\sigma_v^I(\tau)$  при распаде  ${}^{90}\text{Zr}$  с  $E = 142$  МэВ,  $I = 64$ ,  $\delta = 1/2$  для  $v = n, p, \alpha$ , вычисленные без учета деформации в сечениях обратных процессов (вверху) и с учетом деформации в этих сечениях (внизу)

В качестве  $U(z)$  принята кулоновская энергия  $U_c(z)$  частицы на поверхности равномерно заряженного эллипсоида, которую можно получить из формул, данных в [48]:

$$U_c(z) = E_0 \delta^{2/3} (F - G(z/z_0)^2), \quad (72)$$

где

$$F = \frac{3}{4} (\sigma(K-1)/\xi^2 + K);$$

$$G = \frac{3}{4} (3\sigma(K-1)/\xi^2 - K); \quad (73)$$

$$K = \begin{cases} \frac{1}{2} \xi^{-1} \ln((1+\xi)/(1-\xi)) & \text{при } \sigma = 1, \\ \xi^{-1} \arcsin(\xi/(1+\xi)^{1/2}) & \text{при } \sigma = -1. \end{cases}$$

Параметры  $E_0$ ,  $R_0$ ,  $D_0$  для  $\alpha$ -частиц и протонов получены из подгонки сечения (67) к оптическому сечению с исходными значениями для  $E_0$ ,  $R_0$  и  $D_0$  из разд. 1. В нейтронных сечениях деформация не учитывалась.

**Угловая анизотропия.** В работе [53] даны экспериментальные распределения  $\sigma_\alpha^I(\varepsilon, \beta)$  для  $\alpha$ -частиц из  $^{110}\text{Sn}$  (94 МэВ),  $^{114}\text{Sn}$  (80 МэВ),  $^{138}\text{Nd}$  (82 МэВ),  $^{164}\text{Yb}$  (67 МэВ) и  $^{170}\text{Yb}$  (135 МэВ), где в скобках указана энергия возбуждения. Величину и направление  $\mathbf{I}$  находили в каждом распаде, благодаря регистрации каскада  $\gamma$ -квантов, испускаемых остаточным ядром. Из подгонки распределений  $\sigma_\alpha^I(\varepsilon, \beta)$  к  $A_0(1 + A_2^I P_2(\cos \beta))$  были получены коэффициенты  $A_2^I$ .

При вылете частиц из сферического ядра угловая анизотропия с уменьшением  $\varepsilon$  должна падать, поскольку набор  $l$ , уносимых частицей, уменьшается. В трех первых системах из указанных выше  $|A_2^I|$  монотонно падает с уменьшением  $\varepsilon$ . Однако в  $^{164}\text{Yb}$  и  $^{170}\text{Yb}$  после перехода в подбарьерную область  $|A_2^I|$  начинает расти. Авторы работы [54] предположили, что эта аномалия вызвана деформацией ядра. Для проверки этого предположения в работе [55] выполнены расчеты  $A_2^I$  в зависимости от  $\varepsilon$ .

В качестве функции отклонения взято  $\tilde{k}_c(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Для имитации размытых коэффициентов проницаемости выполнено усреднение по высоте барьера с помощью нормально распределенного случайного числа  $X$ , со средним значением нуль и дисперсией  $D_0$ , которое добавлялось к  $U_c(z)$  в выражениях для весовой функции  $w$  и для  $\tilde{k}_c(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Для  $R(\tau, I)$  сглаживание по высоте барьера вносит в правую часть уравнения (60) фактор  $\exp\left(-\frac{1}{2}D_0^2/\tau^2\right)$ .

Усреднение по  $\tau$  выполнено с весовой функцией в форме треугольника с основанием  $(\tau_1, \tau_2) = (0,95, 2,3)$  МэВ и  $(0,8, 1,4)$  МэВ для  $^{170}\text{Yb}$  и  $^{164}\text{Yb}$  соответственно, которые хорошо воспроизводят  $\sigma_\alpha^I(\tau)$ , вычисленное по коду [50]. Для таких распределений  $\tau = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1)\zeta^{1/2}$ , где  $\zeta$  — случайное равномерно распределенное число из интервала  $(0,1)$ .

Процедуре измерения угла испущенной частицы относительно спина ядра, изложенной в работе [53], присущи значительные неопределенности. Вероятность того, что для этого угла при измерении будет получено значение  $\beta$  при условии, что истинное значение равно  $\beta'$ , дается функцией отклика  $P(\beta, \beta')$  гамма-спектрометра [56]. Поэтому мы усреднили теоретические сечения  $\sigma_v(i, j)$  с соответствующей матрицей отклика  $P_{jj'}$ , связь которой с  $P(\beta, \beta')$  дана в [55].

На рис. 8 показаны экспериментальные и теоретические коэффициенты  $A_2^I$  при  $I = 64$  для  $\alpha$ -эмиссии из  $^{170}\text{Yb}$  (135 МэВ) и  $^{164}\text{Yb}$  (67 МэВ), образованных в реакциях слияния  $^{20}\text{Ne} + ^{150}\text{Nd}$  при  $E_{\text{лаб}} = 177$  МэВ и  $^{64}\text{Ni} + ^{100}\text{Mo}$  при 270 МэВ соответственно. Расчеты для сферического ядра (жирные линии) резко расходятся с экспериментом в подбарьерной области  $\varepsilon < 17,5$  МэВ. Расчет для

деформированного ядра с  $d \equiv z_0/p_0 = 1,5$  (пунктир) воспроизводит эксперимент во всей области  $\varepsilon$ .

Подгонка экспериментальных данных распределением от одного распада с эффективным  $\tau$  показана тонкими линиями. Наилучшее согласие получено при  $\tau = 1,8$  МэВ,  $d = 2,5$  ( $^{170}\text{Yb}$ ) и  $\tau = 1,2$  МэВ,  $d = 1,7$  ( $^{164}\text{Yb}$ ). Мы видим, что  $d$  увеличились по сравнению с их предыдущими значениями. Это увеличение особенно велико для

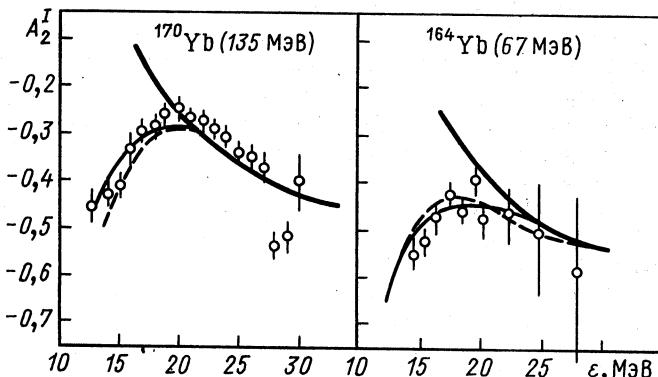


Рис. 8. Зависимость коэффициента  $A_2^I$  от  $\varepsilon$  при эмиссии  $\alpha$ -частиц из  $^{170}\text{Yb}$  и  $^{164}\text{Yb}$  при  $I = 64$ :  
кружки — экспериментальные данные [53]; линии — расчет [55] (см. текст)

$^{170}\text{Yb}$  с его широким температурным распределением. Тот факт, что подгонка кумулятивного спектра спектром от одного распада может привести к нефизически большим значениям деформации впервые отмечен в работе [57].

**Флуктуация формы.** При изучении  $\gamma$ -распада гигантских дипольных резонансов в нагретых ядрах [58—60], а также в теоретических расчетах [61, 62] было найдено, что для  $^{166,160}\text{Er}$  с  $\tau = 1 \div 2$  МэВ и  $I \sim 40$  значение равновесной деформации  $d_{\text{eq}}$  близко к 1,3. Превышение  $d$ , найденного выше, над  $d_{\text{eq}}$  можно объяснить, если принять во внимание статистические флуктуации формы ядра и учесть, что при удлинении ядра вероятность  $\alpha$ -эмиссии увеличивается.

Интенсивность заселения различных форм остаточного ядра дается вероятностью распада в единицу времени (60), рассматриваемой как функция деформации. Можно заметить, что зависимость  $R_v^I(\tau)$  от формы определяется двумя факторами, а именно

$$R_v^I(\tau) \sim \exp(-U_{\text{LD}} + I^2/2J_{\text{rig}}/\tau) \exp(-U_{\text{min}}/\tau), \quad (60a)$$

где  $U_{\text{min}}$  — минимальное значение  $U(z)$ . Первый фактор входит в  $C_\perp$ . Второй фактор приблизительно воспроизводит зависимость от формы ядра для интеграла, содержащегося в (60).

Величина  $d_{\text{eq}}$  определяется как такое  $d$ , при котором

$$F = U_{\text{LD}} + I^2/2J_{\text{rig}}$$

достигает минимума. Из (60а) следует, что при испускании частицы наиболее предпочтительны те  $d$ , для которых минимальна сумма  $F$

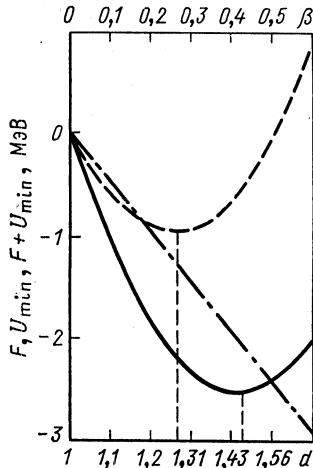


Рис. 9. Жидкокапельная энергия  $F$  для  $^{166}\text{Er}$   $I = 64$  (пунктир) имеет минимум при  $d_{\text{eq}} = 1,27$  при добавлении  $U_{\text{min}}$  (штрихпунктир) получаем сплошную кривую с минимумом при  $d = 1,45$ . Для удобства из  $U_{\text{min}}$  вычтена высота сферического барьера

и  $U_{\text{min}}$ . Если  $F$  плавно зависит от  $d$  в окрестности  $d_{\text{eq}}$ , то добавление  $U_{\text{min}}$ , которое уменьшается с  $d$ , может заметно сместить положение минимума.

При вычисления  $F$  удобно использовать соотношения из [63]

$$U_{\text{LD}} = (16 \text{ МэВ}) A^{2/3} \left[ \frac{2}{5} (1-x) \beta'^2 - \frac{4}{105} (1+2x) \beta'^3 \cos 3\gamma \right];$$

$$J_{\text{rig}} = \frac{1}{5} Am_0 (R_x^2 + R_z^2),$$

где

$$\beta' = \left( \frac{5}{4\pi} \right)^{1/2} \beta; \quad x = \frac{Z^2}{45A}; \quad \frac{\hbar^2}{2m_0} = 21 \text{ МэВ} \cdot \text{ fm}^2.$$

Здесь  $\beta$  и  $\gamma$  — обычные параметры деформации, связанные с полуосами ядра соотношениями

$$R_x = R'_0 \left( 1 - \beta' \cos \left( \gamma - \frac{\pi}{3} \right) \right), \quad R_y = R'_0 \left( 1 - \beta' \cos \left( \gamma + \frac{\pi}{3} \right) \right),$$

$$R_z = R'_0 (1 + \beta' \cos \gamma),$$

где

$$R'_0 = r_0 A^{1/3} \left( 1 - \frac{3}{4} \beta'^2 + \frac{1}{4} \beta'^3 \cos 3\gamma \right)^{-1/3}.$$

Полагая  $\gamma = 0$ , мы нашли, что  $F$  для  $^{166}\text{Er}$  с  $I = 64$  имеет минимум при  $d_{\text{eq}} = 1,27$  и что добавление  $U_{\text{min}}$  сдвигает минимум к  $d = 1,45$ , что близко к наблюдаемым значениям (см. рис. 9). Предпо-

ложение о том, что тепловые флуктуации формы ядра могут приводить к сдвигу энергетических спектров заряженных частиц в сторону меньших энергий, было выдвинуто в [64].

## 5. ДВУХЧАСТИЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ

**Распад нагретого ядра, образованного в прямой реакции.** Рассмотрим реакцию  $A (a, a'f)$ , протекающую в две стадии: ядро  $A$  сначала возбуждается в результате неупругого рассеяния, а затем делится. Предположим, что неупругое рассеяние является прямым процессом и что энергия  $E$ , передаваемая ядру  $A$ , настолько велика, что оно попадает в область с большой плотностью уровней, для описания которой применима статистическая модель.

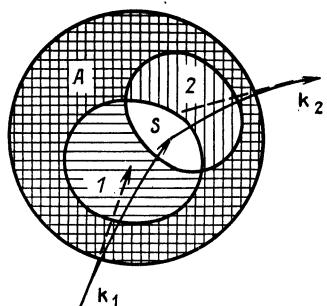
Если начальный и конечный импульсы частицы ( $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$ ) фиксированы, то угловое распределение осколков описывается формулой

$$W(\mathbf{n}_f; \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1) = C \int d^2A (\mathbf{p}_1 N) (R_f/R_{\text{tot}}) \times \\ \times \exp \left\{ - \frac{1}{2} |(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \mathbf{r}|^2 / 2K_0^2 \right\}. \quad (74)$$

Здесь использовано стандартное выражение для углового распределения осколков при делении ядра с заданным  $I$  [19, 65]:

$$W(\mathbf{n}_f; I) = (R_f/R_{\text{tot}}) \exp \left[ - \frac{1}{2} (I \mathbf{n}_f)^2 / K_0^2 \right],$$

Рис. 10. Область ядерной поверхности  $S$ , в которой происходит неупругое столкновение частицы с ядром. Из-за ядерно-кулоновских сил входная и выходная траектории ( $\longrightarrow$ ) отклоняются от направлений  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$  ( $\rightarrow$ )



а величина  $I$  отождествлена с угловым моментом, передаваемым ядру частицей, столкнувшейся с ним в точке  $\mathbf{r}$ .

Интегрирование в (74) выполняется по всем точкам  $\mathbf{r}$  ядерной поверхности, в которых может произойти неупругое столкновение. Эти точки принадлежат области  $S$  (см. рис. 10), которая является общей частью областей  $1$ , доступной для падающих частиц, и областей  $2$ , из которой частица может дойти до счетчика, не проходя сквозь ядро  $A$  [66]. Величину  $I$  в коэффициенте ветвления  $R_f/R_{\text{tot}}$  нужно заменить  $|(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times \mathbf{r}|$ , а  $\mathbf{p}_2$  и  $\mathbf{p}_1$  выразить через  $\mathbf{r}$  и соответствующее  $\mathbf{k}$ .

При движении в сферическом кулоновском поле функции  $\mathbf{p}_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}_1)$ ,  $\mathbf{p}_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}_2)$  и область  $S$  можно найти явно. Используя тот же подход, что и при получении функции  $\mathbf{k}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  в разд. 3, мы находим

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{k}_1}{(1 - \hat{k}_{1r}) \zeta_1 Q_1} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} Q_1 \mathbf{k}_1, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{-\mathbf{k}_2}{(1 + \hat{k}_{2r}) \zeta_2 Q_2} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} Q_2 \mathbf{k}_2, \quad (75)$$

Здесь

$$Q_1 = 1 + \sqrt{1 - \frac{2}{(1 - \hat{k}_{1r}) \zeta_1}}, \quad Q_2 = 1 + \sqrt{1 - \frac{2}{(1 + \hat{k}_{2r}) \zeta_2}},$$

$$\hat{k}_{1r} = \hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}, \quad \zeta_1 = \varepsilon_1/E_{01}, \quad \hat{k}_{2r} = \hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}, \quad \zeta_2 = \varepsilon_2/E_{02},$$

где  $\varepsilon_1$ ,  $E_{01}$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $E_{02}$  — энергия частицы и высота кулоновского барьера во входном и выходном каналах. Размеры пятен 1, 2 определяются углами

$$\alpha_1 = \arccos [1/(2\zeta_1 - 1)], \quad \alpha_2 = \arccos [1/(2\zeta_2 - 1)], \quad (76)$$

которые откладывются радиус-вектором, проведенным из центра ядра, от направления  $-\mathbf{k}_1$  или  $\mathbf{k}_2$  до границы соответствующего пятна.

Если энергия падающей частицы  $\varepsilon_1 \gg E$ ,  $E_{01}$ , то  $\mathbf{p}_1 \simeq \mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{p}_2 \simeq \mathbf{k}_2$ ,  $k_2 \simeq k_1$  и  $W(\mathbf{n}_f; \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)$  можно найти аналитически [67]. При квантовом описании прямого процесса эти условия соответствуют приближению плоских волн.

Обозначим  $W^{\text{in}}(\theta_r)$  угловое распределение осколков в плоскости, образуемой векторами  $\mathbf{q} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_1$ , а  $W^{\text{out}}(\phi_r)$  — угловое распределение в плоскости, проходящей через  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_1$ , где  $\theta_r$  и  $\phi_r$  отсчитываются от  $\mathbf{q}$ . Пренебрегая зависимостью  $R_f/R_{\text{tot}}$  от  $I$ , получаем с точностью до множителя, не зависящего от  $\theta_r$  и  $\phi_r$ ,

$$W^{\text{in}} = I_c (p^{\text{in}} \sin^2 \theta_r); \quad (77)$$

$$W^{\text{out}} = I_c (p^{\text{out}} \sin^2 \phi_r). \quad (78)$$

Здесь  $I_c(x)$  выражается через модифицированные функции Бесселя  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$  с помощью соотношения

$$I_c(x) = \exp(-x)[I_0(x) + I_1(x)],$$

а параметры  $p^{\text{in}}$ ,  $p^{\text{out}}$  определяются кинематикой прямой реакции:

$$p^{\text{in}} = (k_1^2 R_0^2 / K_0^2) \sin^2(\theta/2); \quad (79)$$

$$p^{\text{out}} = (k_1^2 R_0^2 / K_0^2) \sin^4(\theta/2), \quad (80)$$

где  $R_0$  — радиус ядра;  $\theta$  — угол рассеяния частицы.

В [68] измерены  $W^{\text{in}}$  для реакции  $(\alpha, \alpha' f)$  на  $^{232}\text{Th}$  и  $^{238}\text{U}$  при  $\varepsilon_1 = 120$  МэВ,  $\theta = 18^\circ$ ,  $E \simeq 6$  МэВ и  $E \simeq 11$  МэВ. Измеренные  $W^{\text{in}}$ , их подгонка с помощью (77) и значения подгоночного параметра  $p^{\text{in}}$  приведены на рис. 11. Величина  $K_0^2$ , восстановленная с помощью (79) из  $p^{\text{in}}$  при  $E = 9 \div 13$  МэВ, составляет  $K_0^2 \simeq 20$ , что совпадает с  $K_0^2$ , полученным из реакции  $^{235}\text{U}(n, f)$  при энергии возбуждения 10–12 МэВ [69, 70].

**Распад нагретого ядра, образованного в глубоконеупругой реакции.** Для анализа угловых распределений частиц, испаряемых из тяжелого продукта глубоконеупругой реакции, используют формулу для углового распределения  $W(\cos \beta)$  частиц, испущенных из

ядра с хорошо определенным I. Направление I откладывается перпендикулярно плоскости глубоконеупругой реакции, а значение отождествляется со средним спином тяжелого продукта.

Для сферического ядра  $W(\cos \beta)$  получим из (26). Предполагая (в соответствии с аналогичным предположением для деформированного ядра), что  $mR_0^2 \leq J$ , приходим к формуле [15, 18, 25, 26]:

$$W(\cos \beta) = \exp(-b \cos^2 \beta), \quad (81)$$

где  $b = (mR_0^2/2J^2\tau) I^2$ . Для деформированного ядра  $W(\cos \beta)$  пропорционально сумме  $R(i; j; \tau, I)$  по  $i$ .

Растяжение ядра понижает барьер на его концах, приводя к усилению эмиссии частиц в плоскости, перпендикулярной спину, т. е.

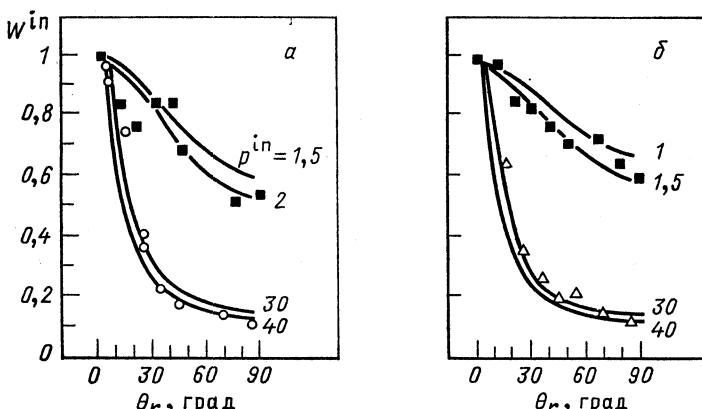


Рис. 11. Угловые распределения осколков деления в реакции  $(\alpha, \alpha'f)$  на  $^{232}\text{Th}$  (a) и  $^{238}\text{U}$  (b) при рассеянии  $\alpha$ -частиц с энергией 120 МэВ на  $18^\circ$  в лабораторной системе из работы [68] и их подгонка по (77). Передаваемая энергия равна 6,16—6,45 МэВ ( $\bigcirc$ ), 9—13 МэВ ( $\blacksquare$ ) и 5,85—6,15 МэВ ( $\triangle$ )

к росту анизотропии. Одновременно из-за увеличения  $J_\perp$  происходит замедление вращения, что ведет к уменьшению анизотропии. Из рис. 12 видно, что при низких спинах и больших деформациях преобладает первая тенденция, а при высоких спинах эти тенденции могут компенсировать друг друга.

До сих пор мы рассматривали случай, когда время по отношению к испусканию частицы  $t_v$  намного больше, чем период вращения ядра  $T_\perp$ . При этом качественный вид угловых распределений для деформированного и сферического ядер одинаков. Иная картина наблюдается в противоположном случае медленного вращения, когда  $t_v \leq T_\perp/2$ .

Угловое распределение частиц из медленно врашающегося ядра  $R(j, k; \tau, I)$  получается из  $R(i, j, k; \tau, I)$  суммированием по энергетическому индексу. Из примера, показанного на рис. 13, видно, что при больших деформациях вылетающие частицы сфокусированы

в двух пиках, отвечающих эмиссии из полюсов. Так как к скорости частиц добавляется скорость кончиков ядра, пики сдвинуты относительно точек  $(\cos \beta, \gamma) = (0, 0), (0, \pi)$ , задающих ориентацию оси  $\mathbf{v}$  в момент испускания.

Из-за фокусировки заряженных частиц, вылетающих из вытянутого ядра, двухчастичная корреляция как функция  $\delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$

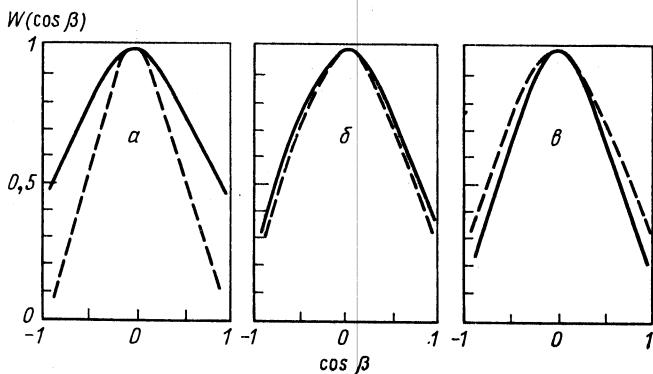


Рис. 12.  $W(\cos \beta)$  для  $\alpha$ -эмиссии из круглого (—) и вытянутого с  $\delta = 0,5$  (---) ядра  $^{143}\text{Gd}$ .

Расчет выполнен для случаев:

$a - I = 20, \tau = 1 \text{ МэВ}; b - I = 40, \tau = 2,5 \text{ МэВ}; c - I = 60, \tau = 4 \text{ МэВ}$

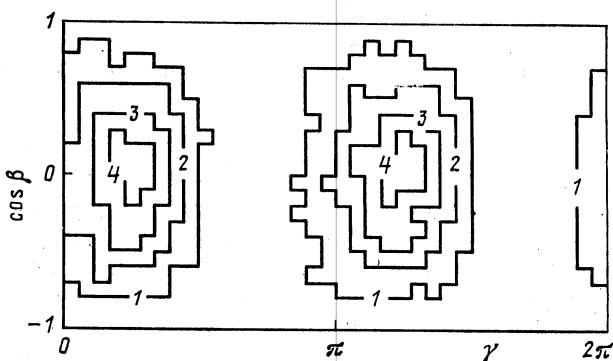


Рис. 13. Контурные диаграммы пространственного распределения  $\alpha$ -частиц из  $^{143}\text{Gd}$  до усреднения по  $\gamma$ . Расчет выполнен при  $I = 45, \tau = 2,2 \text{ МэВ}, \delta = 0,5$  для  $N = 10^6$  испытаний. Линии 1—4 соответствуют 0,2, 0,4, 0,6, 0,8 максимального значения

должна иметь пик под углом  $\delta\gamma = \omega_\perp t_v$ , на который повернется система между двумя испусканиями. Этим можно воспользоваться для извлечения  $t_v$  из эксперимента в тех случаях, когда  $t_v$  заключено между временем установления теплового равновесия (несколько единиц  $10^{-22} \text{ с}$ ) и периодом вращения ядра.

**Частицы, сопровождающие реакцию слияния — деления.** Формальная аналогия между выражением (26) для эмиссии частицы и угловым распределением осколков деления позволяет применять выражение для двухчастичной корреляции (33) к описанию корреляций частица — осколок. Для этого достаточно заменить параметр  $\alpha_2$  в (33) на  $1/(2K_0^2)$ .

Компаунд-ядра, попадающие в счетчики после испускания нескольких частиц и  $\gamma$ -квантов, называют испарительным остатком. Верхнюю границу области распада путем испарения частиц обозначают  $I_{ER}$ . При  $I \gg I_{ER}$  для компаунд-ядер с  $A = 100 \div 200$  доминирующим каналом распада становится деление. Систематика  $I_{ER}$  в зависимости от  $A$  приведена в [71].

Вклад в угловую корреляцию частица  $v$  — осколок  $f$  вносят  $I_v$ , примыкающие к  $I_{ER}$ . Из-за того что частица намного легче осколка, отношение  $R_f(E, I)/R_v(E, I)$  очень быстро растет с  $I$ . Поэтому число парциальных волн, для которых идут с заметной вероятностью как испарение, так и деление, будет невелико и правую часть (33) можно заменить на подынтегральную функцию в точке  $I_{ER}$ .

Как показывают оценки из [72], при  $I = 50 \div 100$  параметр угловой анизотропии осколков  $CI^2 \geq 1$ . Соответствующий параметр для частиц  $BI^2$  хотя и бывает большим [73], все же гораздо меньше, чем  $CI^2$ . Поэтому для случаев, когда осколки детектируются не слишком близко к пучку, выполняются соотношения

$$CI^2 \sin^2 \theta_f \gg 1, \quad C \sin^2 \theta_f \gg B \sin^2 \theta_v.$$

Используя эти неравенства и асимптотику функции Бесселя  $J_0(x)$  при больших  $x$ , после простых преобразований формулы (33) находим:

$$W(\mathbf{n}_v, \mathbf{n}_f) \sim \frac{1}{\sin \theta_f} W(\mathbf{n}_v; E, I_{ER}), \quad I_{ER} = \frac{[\mathbf{n}_b \times \mathbf{n}_f]}{\sin \theta_f} I_{ER}, \quad (82)$$

где  $\mathbf{n}_b$ ,  $\mathbf{n}_v$ ,  $\mathbf{n}_f$  — единичные векторы вдоль направлений пучка, частицы и осколка соответственно;  $W(\mathbf{n}; E, I)$  определено в (26).

Согласно (82) измерение частиц в совпадении с осколками деления (регистрируемыми под фиксированным углом  $\theta_f$  к пучку) позволяет изучать эмиссию частиц из ядра со спином  $I_{ER}$ . Как показано в [45], это утверждение справедливо и для деформированных ядер. Численное исследование точности соотношения (82) проводилось в [11].

В работе [12] изучено испускание  $\alpha$ -частиц в совпадении с осколками деления из реакции  $\text{Cl} + \text{Ag}$  при энергии 10 МэВ на нуклон и  $\theta_f = 90^\circ$ . Энергетические спектры  $\alpha$ -частиц, измеренные под несколькими углами, были разложены на три составляющие в соответствии с тремя источниками частиц: композиционная система и два осколка.

На рис. 14 мы сравниваем угловые и энергетические распределения ( $P_\beta$  и  $P_e$  соответственно) для  $\alpha$ -частиц, вылетающих из компо-

зионной системы Gd с расчетами.  $P_\beta$  измерено в плоскости, перпендикулярной  $n_f$ , а  $P_e$  — в плоскости, образуемой  $n_f$  и  $n_b$ . Оптимальная подгонка получается при  $\tau = 2,2$  МэВ,  $d = 2$ ,  $I \approx 45$ . Согласно [74], для ядер, близких к Gd, при  $\tau \approx 2$  МэВ значение  $I_{ER} \approx 60$ , т. е. заметно выше полученного нами.

Для оценки возможного влияния каскадов на параметры  $I$ ,  $d$ , извлекаемые из эксперимента, мы рассчитали  $P_e$  и  $P_\beta$  с треугольным

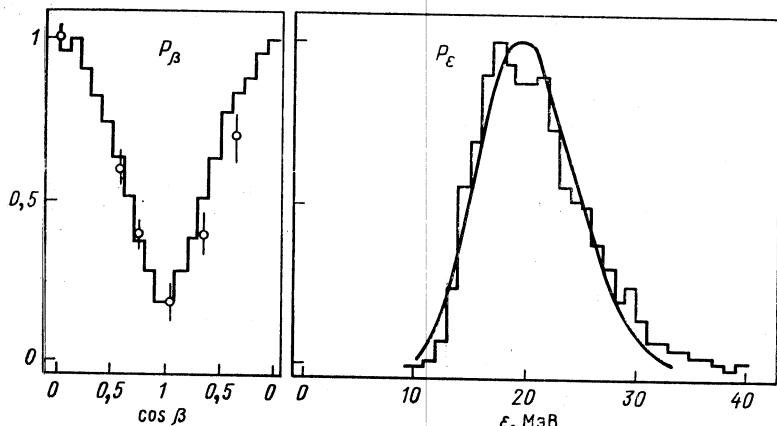


Рис. 14. Угловые распределения  $P_\beta$  и энергетические спектры  $P_e$  для  $\alpha$ -частиц, испаряемых из  $^{143}\text{Gd}$ , в совпадении с осколками деления: гистограммы — расчет при  $\tau = 2,2$  МэВ,  $d = 2$ ,  $I = 45$ ; кружочки и сплошная кривая — эксперимент [12]

температурным распределением на интервале от 1 до 3,3 МэВ. Значение  $d$  не изменилось, а  $I$  возросло до 50.

**Двухчастичный распад нагретого ядра, образованного в реакции слияния.** В настоящем пункте на примере реакции  $^{108}\text{Ag} + ^{40}\text{Ar}$  ( $\alpha\alpha$ ) при энергии пучка 285 МэВ [75, 76] исследуется поведение двухчастичной угловой корреляции при распаде компаунд-ядра, образованного в реакции слияния. Мы предполагаем, что обе частицы испускаются в начале каскада,  $\omega(q)$  берем из разд. 1, для  $T_1$  ( $e$ ) используем классическую модель с  $E_0$  и  $R_0$  (для  $\alpha$ -частиц и протонов) из того же пункта. Для нейтронов полагаем  $E_0 = 0$ , а  $R_0$  берем такое же, как для протонов.

На рис. 15 показана наилучшая подгонка угловых корреляций к экспериментальным точкам в одной плоскости (случаи  $a$ ,  $b$ ) и в перпендикулярных плоскостях (случаи  $c$ ,  $d$ ). Она получается при  $I_{max} = 90$ . Предполагая, что граница между испарением и делением является резкой,  $I_{max}$  можно отождествить с  $I_{ER}$ . Извлеченное из сечения образования испарительного остатка для реакции  $^{40}\text{Ar} + ^{108}\text{Ag}$  при энергии 288 МэВ значение  $I_{ER} = 80 \pm 7$  [77].

Величину  $I_{ER}$  часто оценивают как такое  $I$ , при котором жидкокапельный барьер деления [46] совпадает с  $S_n$ . В рассматриваемой реакции это дает  $I_{ER} = 70$  [78, 79]. При таком  $I_{max}$  угловые корреляции в одной плоскости почти те же, что и при  $I_{max} = 90$ , а в перпендикулярных плоскостях анизотропия уменьшается почти вдвое (см. [29]).

Из этого примера видно, что угловые корреляции в перпендикулярных плоскостях очень чувствительны к  $I_{ER}$ . Тем не менее однозначное извлечение  $I_{ER}$  из одних только угловых корреляций не-

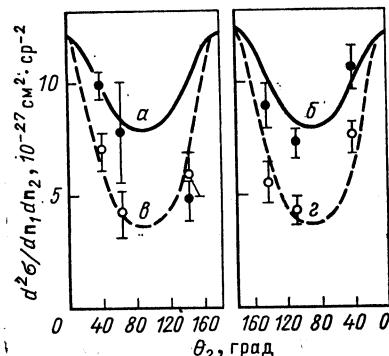


Рис. 15. Угловые корреляции в системе центра масс для двух  $\alpha$ -частиц при взаимодействии  $^{40}\text{Ar} + ^{108}\text{Ag}$  при энергии пучка 285 МэВ:

Точки — эксперимент [75, 76]; кривые — расчет по (33) при  $I_{max} = 90$ :  
 $a$  —  $\theta_1 = 110^\circ$ ,  $\phi_1 = 0$ ;  $\phi_2 = 0$ ;  $b$  —  $\theta_1 = 110^\circ$ ,  $\phi_1 = 0$ ,  $\phi_2 = 180^\circ$ ;  $c$  —  $\theta_1 = 110^\circ$ ,  $\phi_1 = 90^\circ$ ,  $\phi_2 = 0$ ;  $d$  —  $\theta_1 = 110^\circ$ ,  $\phi_1 = 90^\circ$ ,  $\phi_2 = 180^\circ$ . Расчет нормирован к эксперименту в точке  $\theta_2 = 40^\circ$  в случае (a)

возможно, так как предположение об испарении  $\alpha$ -частиц в начале каскада (а следовательно, величина  $\tau$ ) является произвольным. Для учета каскадов необходимо усреднить корреляционную функцию с двойным температурным распределением для дочерних ядер.

Приведенные расчеты не учитывают деформацию компаунд-ядра, что тоже может привести к погрешностям. Такие погрешности могут быть особенно большими при малых значениях параметра  $b = \alpha I^2$ . Случай малых  $b$ , когда анизотропия почти полностью обусловлена деформацией, рассмотрен в [80] на примере реакции  $^{32}\text{S}(^{92}\text{Mo}, pp)$  при энергии пучка 86 МэВ (с. ц. м.).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе систематически изложена полуклассическая теория испускания частиц из сферических и деформированных ядер. В случае сферических ядер представлены аналитические выражения для ширин испускания частиц, средних значений энергии и углового момента продуктов распада, угловых распределений и двухчастичных корреляций. Модель содержит небольшое число параметров, имеющих простой физический смысл, которые можно подсчитать с помощью оптической модели или найти из эксперименту.

Кроме классического приближения для коэффициентов векторного сложения и сферических функций в модели используется температурное приближение для плотности уровней, 4-параметрическая

аппроксимация преобразований Лапласа для коэффициентов проницаемости, а в случае двухчастичных корреляций еще и другие упрощения. Применяя численные и аналитические методы, мы рассмотрели точность этих приближений и нашли, что она вполне достаточна для описания типичных экспериментов.

В случае деформированных ядер дано замкнутое выражение для вероятности испускания частицы в виде интеграла по поверхности ядра от тока вероятности. Показано, что при малых деформациях оно воспроизводит известные из литературы формулы. Найдены уравнения для положения потенциального барьера и приближенный вид функции отклонения  $k(r, p)$ . Получено простое выражение для ширины испускания частицы из деформированного ядра и проведено суммирование по каскадам.

Развиты практические методы расчета эмиссии частиц для ядер эллипсоидальной формы. Выполнен анализ экспериментальной анизотропии  $\alpha$ -частиц относительно направления спина при распаде возбужденных изотопов  $Yb$ . Если учесть каскадный характер и тепловые флуктуации форм, то деформации дочерних ядер, полученные из подгонки, согласуются с независимыми данными.

Преимущества полуклассической модели особенно ярко проявляются при описании корреляционных экспериментов. В настоящей работе приведены полуклассические выражения для корреляционных функций «частица — осколок», «частица — тяжелый ион», «частица — частица» и рассмотрены приложения этих выражений к анализу формы и спина нагретых ядер.

Автор выражает признательность В. М. Струтинскому, М. Бланну и Е. А. Черепанову за полезные замечания и практические советы при написании работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grover J.R., Gilat J.//Phys. Rev. 1967. Vol. 157. P. 802—813; 814—822: 823—831.
2. Garrett J.D., Nilsson B.S.//Notes on NBI version of GROGI 2. The Niels Bohr Institute, DK-2100, Copenhagen, Denmark, 1982.
3. Pühlhofer F.//Nucl. Phys. A. 1977. Vol. 280. P. 267—284.
4. Beckerman M., Blann M.//Phys. Rev. C. 1978. Vol. 17. P. 1615—1631.
5. Ильинов А. С., Тонеев В. Д.//ЯФ. 1968. Т. 9. С. 48—55; Барашенков В. С., Жереги Ф. Г., Ильинов А. С., Тонеев В. Д.//ЭЧАЯ. 1974. Т. 5. С. 479—529.
6. Ильинов А. С., Черепанов Е. А. ОИЯИ 37-84-68. Дубна, 1984; Ильинов А. С., Оганесян Ю. Ц., Черепанов Е. А.//ЯФ. 1981. Т. 33. С. 997—1005.
7. Gomes del Campo J., Stockstad R.G., Biggerstaff J.A.e.a.//Phys. Rev. C. 1979. Vol. 19. P. 2170—2185.
8. Ajitanand N.N., Lacey R., Peaslee G.F.e.a.//Nucl. Instrum. and Methods A. 1986. Vol. 243. P. 111—120.
9. Blann M.//Phys. Rev. C. 1980. Vol. 21. P. 1770—1782.
10. Alexander J.M., Guerreau D., Vaz L.C.//Z. Phys. A. 1982. Vol. 305. P. 313—318.
11. Rivet M.F., Logan D., Alexander J.M.e.a.//Phys. Rev. C. 1982. Vol. 25. P. 2430—2449.
12. Schad L., Ho H., Fan G.-Y.e.a.//Z. Phys. A. 1984. Vol. 318. P. 179—190.

13. Moses D.J., Kaplan M., Alexander J.M.e.a./*Z. Phys. A*. 1985. Vol. 320. P. 229—236.
14. Brucker A., Lindl B., Bantel M.e.a./*Phys. Lett. B*. 1988. Vol. 206. P. 13—17.
15. Струтинский В. М./Ядерные реакции при низких и средних энергиях. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 522—524.
16. Ericson T., Strutinsky V./*Nucl. Phys.* 1958. Vol. 8. P. 284—293.
17. Ericson T./*Adv. Phys.* 1960. Vol. 9. P. 425—511.
18. Gruhn C. Ph.D. thesis. Seattle: University of Washington, 1961.
19. Струтинский В. М./*ЖЭТФ*. 1961. Т. 40. С. 1794—1802.
20. Струтинский В. М./*ЯФ*. 1965. Т. 1. С. 588—595.
21. Thomas T.D./*Nucl. Phys.* 1964. Vol. 53. P. 558—576.
22. Thomas T.D./*Nucl. Phys.* 1964. Vol. 53. P. 577—592.
23. Williams D.C., Thomas T.D./*Nucl. Phys. A*. 1967. Vol. 92. P. 1—29.
24. Lang D.W./*Nucl. Phys.* 1966. Vol. 77. P. 545—558.
25. Døssing T./*Nucl. Phys. A*. 1981. Vol. 357. P. 488—520.
26. Døssing T. Ph.D. thesis. Copenhagen: NBI, 1978.
27. McMahan M.A., Alexander J.M./*Phys. Rev. C*. 1980. Vol. 21. P. 1261—1270.
28. Tai Kuang-Hsi, Døssing T., Gaarde C., Larsen J.S./*Nucl. Phys. A*. 1979. Vol. 316. P. 189—204.
29. Алешин В. П., Офенгенден С. Р./*Изв. АН СССР. Сер. физ.* 1986. Т. 50. С. 982—988.
30. Vaz L.C., Alexander J.M., Carjan N./*Z. Phys. A*. 1986. Vol. 324. P. 331—345.
31. Алешин В. П., Офенгенден С. Р./*Изв. АН СССР. Сер. физ.* 1985. Т. 49. С. 1003—1009.
32. Алешин В. П., Офенгенден С. Р./*Тр. VI Всесоюз. конф. по нейтронной физике*. Киев, 1983. М.: ЦНИИатоминформ, 1984. Т. 1. С. 209—213.
33. Alechin V.P., Ofengenden S.R./*J. Phys. G: Nucl. Phys.* 1985. Vol. 11. P. 243—247.
34. Eberhard K.A., von Brentano P., Bönnig M., Stephen R.O./*Nucl. Phys. A*. 1969. Vol. 125. P. 673—683.
35. Hill D.L., Wheeler J.A./*Phys. Rev.* 1953. Vol. 89. P. 1102—1145.
36. Brussaard P.J., Tolhoek H.A./*Physica*. 1957. Vol. 23. P. 995—971.
37. Alechin V.P./*J. Phys. G: Nucl. Phys.* 1988. Vol. 14. P. 339—349.
38. Cere Г. Ортогональные полиномы. М.: Физматгиз, 1962. С. 220.
39. Kun S.Yu., Vydrug-Vlasenko S.M., Zavarzin V.Ph./*Z. Phys. A*. 1986. Vol. 325. P. 213—219.
40. Alechin V.P. Preprint KINR-86-43. Kiev, 1986.
41. Ajitanand N.N., La Rana G., Lacey R.e.a./*Phys. Rev. C*. 1986. Vol. 34. P. 877—889.
42. Алешин В. П./*Изв. АН СССР. Сер. физ.* 1990, Т. 54. С. 118—122.
43. Алешин В. П./*Международная школа-семинар по физике тяжелых ионов*. Дубна, 3—12 октября 1989 г. Д7-89-531. Дубна, 1989. С. 137—138.
44. Ландау Л. Д., Либшиц Е. М. Механика. М.: Физматгиз, 1958. С. 53.
45. Алешин В. П./*Изв. АН СССР. Сер. физ.* 1988. Т. 52. С. 81—87.
46. Cohen S., Plasil F., Swiatecki W.J./*Ann. Phys.* 1974. Vol. 82. P. 557—596.
47. Pashkevich V.V./*Nucl. Phys. A*. 1971. Vol. 169. P. 275—293.
48. Лебедев Н. Р. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. С. 268.
49. Satchler G.R./*Nucl. Phys.* 1965. Vol. 70. P. 177—195.
50. Blann M., Bisplinghoff J. Report no. UCID-19614 LLNL, 1982.
51. Wong C.Y./*Phys. Rev. Lett.* 1973. Vol. 31. P. 766—769.
52. Bishop C.J., Halpern I., Shaw R.W., Jr., Vandenberg R./*Nucl. Phys. A*. 1972. Vol. 198. P. 161—187.
53. Nicolis N.G., Sarantites D.G., Adler L.A.e.a./*The Variety of Nuclear Shapes*. Singapore: World Scientific, 1987. P. 526—536.

54. Dilmanian F.A., Sarantites D.G., Jääskeläinen M.e.a./*Phys. Rev. Lett.* 1982. Vol. 49. P. 1909—1912.
55. Aleshin V.P./*J. Phys. G: Nucl. Phys.* 1990. Vol. 16. P. 853—862.
56. Honkanen K.J., Dilmanian F.A., Sarantites D.G., Sorensen S.P./*Nucl. Instrum. and Methods in Phys. Res. A.* 1987. Vol. 257. P. 233—243.
57. Govil I.M., Huizenga J.R., Schröder W.U., Töke J./*Phys. Lett. B.* 1987. Vol. 197. P. 515—518.
58. Gaardhøje J.J., Ellegaard C., Herskind B., Steadman S.G./*Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol. 53. P. 148—151.
59. Gossett C.A., Snover K.A., Behr J.A.e.a./*Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol. 54. P. 1486—1489.
60. Chakrabarty D.R., Thoennessen M., Sen S.e.a./*Phys. Rev. C.* 1988. Vol. 37. P. 1437—1441.
61. Ring P., Robledo L.M., Egido J.L., Faber M./*Nucl. Phys. A.* 1984. Vol. 419. P. 261—294.
62. Goodman A.L./*Phys. Rev. C.* 1988. Vol. 37. P. 2162—2169.
63. Neergård K., Pashkevich V.V., Frauendorf S./*Nucl. Phys. A.* 1976. Vol. 262. P. 61—90.
64. Gollerthan U., Clerc H.G., Hanelt E.e.a./*Phys. Lett. B.* 1988. Vol. 201. P. 206—210.
65. Halpern I., Strutinski V.M./*Proc. of the Second United Nations Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1958.* Vol. 15. P. 408—417. (United Nations, Geneva, 1958).
66. Wolf K.L., Vandenbosch R., Loveland W.D./*Phys. Rev.* 1968. Vol. 170. P. 1059—1065.
67. Алешин В. П./*ЯФ.* 1982. Т. 36. С. 48—53.
68. Van der Plicht J., Harakeh M.N., van der Woude A.e.a./*Nucl. Phys. A.* 1980. Vol. 346. P. 349—370.
69. Simmons J.E., Henkel R.L./*Phys. Rev.* 1960. Vol. 120. P. 198—210.
70. Leachman R.B., Blumberg L./*Phys. Rev.* 1965. Vol. 137. P. B814—B825.
71. Lee S.M., Matsuse T./*J. Phys. Soc. Japan.* 1985. Vol. 54. Suppl. II. P. 272—284.
72. Back B.B., Bjørnholm S./*Nucl. Phys. A.* 1978. Vol. 302. P. 343—364.
73. Bantel M., Brucker A., Ho H.e.a./*Jahresbericht. Heidelberg: MPI für Kernphysik,* 1984. P. 57—59.
74. Hillis D.L., Garrett J.D., Christensen O.e.a./*Nucl. Phys. A.* 1979. Vol. 325. P. 216—268.
75. Артюх А. Г., Авдейчиков В. В., Гридинев Г. Ф. и др./*ЯФ.* 1983. Т. 38. С. 549—556.
76. Artukh A.G., Gridnev G.F., Gruszecki M.e.a./*Rev. Roum. Phys.* 1984. Vol. 29. P. 139—146.
77. Britt H.C., Erkkila B.H., Stokes R.H.e.a./*Phys. Rev. C.* 1976. Vol. 13. P. 1483—1495.
78. Blann M., Komoto T.A./*Phys. Rev. C.* 1982. Vol. 26. P. 472—485.
79. Blann M., Akers D., Komoto T.A.e.a./*Phys. Rev. C.* 1982. Vol. 26. P. 1471—1481.
80. Ecker R.-D., Friese J., Körner H.-J.e.a./*Jahresbericht 1987. München: Beschleunigerlaboratorium der Universität und Technischen Universität,* 1987. P. 39—40.