¶ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА¶
1998, ТОМ 29, ВЫП. 3

УДК УДК 539.12.01

МАКСИМОН М.А.МАРКОВА И КВАНТОВЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

В.А.Березин

Институт ядерных исследований РАН, Москва

e-mail: berezin@ms2.inr.ac.ru

Показано, что современная теория предсказывает существование минимума массы квантовых черных дыр. Такие минимальные черные дыры являются естественными кандидатами на роль максимона — частицы, существование которой М.А.Марков предсказал еще в 1966 году.

It is shown that the modern theory predicts an existence of the minimal possible mass for quantum black holes. These minimal black holes serve as natural candidates for the maximons. The existence of such a particle was predicted by M.A.Markov in 1966.

Моисей Александрович Марков неоднократно говорил о том, что наиболее волнующая его проблема современной теоретической физики — это проблема спектра масс элементарных частиц. В 1966 году он высказал смелое и далеко идущее предположение: спектр масс элементарных частиц ограничен сверху массой Планка $\sim 10^{-5}$ г.

Моисей Александрович рассуждал примерно следующим образом.

Специальная теория относительности ввела в науку максимальную скорость — скорость света c. С появлением квантовой механики физика получила еще одну предельную величину — минимальное действие $\hbar$ (постоянная Планка) и предел точности одновременного измерения координаты и импульса материальных тел.

Но, между тем, в течение уже трехсот лет известна третья фундаментальная константа — гравитационная постоянная G. Что за пределы она определяет? Из трех фундаментальных констант $\hbar, G, c$ можно составить выражения, имеющие три основные размерности — длины, времени и массы:

$$l_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \sim 10^{-33}\text{см}, \tag{1}$$

$$t_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \sim 10^{-43}\text{с}, \tag{2}$$

$$m_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \sim 10^{-5}\text{г} \tag{3}$$

(заметим, что фундаментальные постоянные входят в эти выражения неаналитически и, следовательно, не могут быть получены методами теории возмущений), а вместе с ними и выражения для величин любой другой размерности. Если ввести планковский импульс

$$p_{Pl} = m_{Pl}c = \sqrt{\frac{\hbar c^3}{G}}, \tag{4}$$

то, оказывается,

$$l_{Pl} \cdot p_{Pl} = \hbar. \tag{5}$$

Сравнение с соотношением неопределенности Гейзенберга $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ приводит к выводу (сейчас общепринятому) о невозможности измерения длин, меньших $l_{Pl} \sim 10^{-33}$ см, и интервалов времени, меньших $t_{Pl} \sim 10^{-43}$с. Другими словами, планковские расстояния — предел применения классической теории гравитации и наших представлений о пространстве-времени.

Естественно предположить, что и планковская масса $m_{Pl} \sim 10^{-5}$ г должна играть фундаментальную роль в физике. Но какую?

Известно, что в квантовой теории частице с массой m соответствует комптоновская длина волны

$$l_c = \frac{\hbar}{mc} \tag{6}$$

— своеобразный "квантовый радиус" этой частицы. С другой стороны, в классической теории гравитации (общей теории относительности) частице с массой m соответствует гравитационный радиус (радиус Шварцшильда):

$$l_{gr} = \frac{2Gm}{c^2}. \tag{7}$$

Если сжать любое сферически-симметричное распределение вещества до таких размеров, то оно сколлапсирует, образовав черную дыру.

М.А.Марков первым заметил, что для частицы с массой Планка квантовый радиус l_c примерно совпадает с гравитационным радиусом. Частицы с массой, большей m_{Pl}, должны превращаться в черные дыры. Отсюда и следует вывод о существовании максимума в спектре масс элементарных частиц.

Но М.А.Марков пошел еще дальше. Он предположил, что элементарная частица с максимальной массой m_{Pl} может реально существовать в природе. Это предположение имеет далеко идущие космологические последствия, о чем не раз писал Моисей Александрович. Гипотетическую частицу с массой $\sim m_{Pl}$ он назвал максимоном.

Объединение теории гравитации и теории элементарных частиц открыло еще одну необычную и интересную возможность: трехмерная геометрия пространства может представлять собой полузамкнутый мир, связанный с внешним миром узкой горловиной (иначе называемой мостом Эйнштейна — Розена). При этом полная масса такого мира может быть сколь угодно малой (для электрически нейтральной частицы и в классической теории гравитации), а объем внутренней части — сколь угодно большим. Такие образования получили название кротовых нор. М.А.Марков и В.П.Фролов построили классическую модель электрически заряженных частиц, представляющую полузамкнутый мир с минимально возможной для заданного заряда массой

$$m_f = \frac{|e|}{\sqrt{G}}. \tag{8}$$

Эти частицы были названы фридмонами. Для заряда, равного заряду электрона, $m_f \sim 10^{-6}$г.

В настоящее время возможность существования частиц с массой m_{Pl} связана с вопросом о существовании черных дыр с минимальной массой. Дело в том, что после открытия С.Хокингом квантового испарения черных дыр встал вопрос об их конечной судьбе — или они испаряются до конца, или существует основное состояние с наименьшей возможной массой (аналогично основному состоянию водородного атома в квантовой механике). Полное решение этого вопроса возможно только в рамках квантовой теории гравитации (которая еще не создана) или более общей теории (как, например, теория струн).

Тем не менее в случае сферической симметрии, когда отсутствуют гравитационные волны и, следовательно, нет динамических гравитационных степеней свободы, возможно построение моделей, допускающих квантование и получение спектра масс квантовых черных дыр.

Ниже мы кратко опишем одну из таких моделей, построим соответствующий гамильтониан, решим уравнение Шредингера и найдем спектр масс.

Наша модель — это самогравитирующая тонкая сферически-симметричная оболочка, "голая" масса которой равна M (т.е. это сумма масс составляющих оболочку пылинок без учета гравитационного дефекта массы). Полная же шварцшильдовская масса (полная энергия) равна (мы работаем в системе единиц, в которой $\hbar = c = 1$):

$$m = M\sqrt{\dot{\rho}^2 + 1} - \frac{GM^2 - e^2}{2\rho}, \tag{9}$$

где ρ — радиус оболочки, $\dot{\rho}$ — производная радиуса по собственному времени на оболочке, e — электрический заряд. Мы будем рассматривать только случай финитного движения, следовательно, $m < M$.

Пусть радиус оболочки в момент покоя равен ρ_0, тогда

$$m = M - \frac{GM^2 - e^2}{2\rho_0} \tag{10}$$

и

$$\frac{\partial m}{\partial M} = 1 - \frac{GM}{\rho_0}. \tag{11}$$

Кривая $m(M)$ имеет две ветви: возрастающую и убывающую. С ростом голой массы полная масса сначала растет с $m = |e|/\sqrt{G}$ до $m = \rho_0/2G + e^2/2\rho_0$, а затем убывает до первоначального значения. Растущая ветвь соответствует оболочке, которая, стартуя из состояния покоя, коллапсирует, образуя черную дыру. Убывающая же ветвь соответствует кротовой норе, когда оболочка находится по другую сторону моста Эйнштейна — Розена (полузамкнутый мир). В этом случае чем больше голая масса, тем у́же горловина и, следовательно, меньше полная масса. Отметим, что если при нулевом электрическом заряде горловина в конце концов исчезает и образуется замкнутый мир с нулевой полной массой, то при ненулевом заряде горловина остается разомкнутой, а предельный случай описывает фридмон. Максимум же кривой $m(M)$ приходится на такое значение голой массы M, при котором в точке покоя оболочка находится как раз на горизонте событий — границе черной дыры.

Обратимся теперь к процедуре квантования.

Выражение для полной массы (уравнение (9)) есть не что иное, как закон сохранения энергии самогравитирующей заряженной пылевой оболочки. Зная выражение для энергии, мы можем восстановить лагранжиан, найти импульс, сопряженный радиусу, и построить гамильтониан. Действительно,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}, \tag{12}$$

$$H = p\dot{\rho} - L = \dot{\rho}\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - L, \tag{13}$$

$$L = \dot{\rho}\int H \frac{d\dot{\rho}}{\dot{\rho}^2} = \dot{\rho}\int \frac{\partial H}{\partial \dot{\rho}}\frac{d\dot{\rho}}{\dot{\rho}} - H, \tag{14}$$

откуда получаем следующее выражение для импульса:

$$p = \int \frac{\partial H}{\partial \dot{\rho}}\frac{d\dot{\rho}}{\dot{\rho}}. \tag{15}$$

Подставляя сюда вместо H выражение для полной массы (9), имеем

$$p = M\log(\dot{\rho} + \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1}) + F(\rho), \tag{16}$$

$$L = M(\dot{\rho}\log(\dot{\rho} + \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1}) - \sqrt{\dot{\rho}^2 + 1}) + \dot{\rho}F(\rho), \tag{17}$$

где $F(\rho)$ — произвольная функция. Выбор этой функции не влияет на уравнения движения, и в дальнейшем мы положим $F(\rho) = 0$. Разрешая уравнение (16) относительно $\dot{\rho}$, получаем

$$\dot{\rho} = \sinh\frac{p}{M}, \tag{18}$$

а после подстановки этого выражения в уравнение (9) получаем гамильтониан

$$H = M \cosh \frac{p}{M} - \frac{GM^2 - e^2}{2\rho}, \tag{19}$$

или, в безразмерных переменных $x = M\rho, \Pi = p/M$,

$$H = M \left(\cosh \Pi - \frac{GM^2 - e^2}{2x} \right). \tag{20}$$

Считая импульс и координату операторами, наложим квантовое коммутационное соотношение

$$[\Pi, x] = -i. \tag{21}$$

В координатном представлении $\Pi = -i\partial/\partial x$ и, используя известное соотношение

$$\mathrm{e}^{-i\frac{\partial}{\partial x}} \Psi(x) = \Psi(x - i), \tag{22}$$

получаем следующее стационарное уравнение Шредингера:

$$H\Psi(x) = E\Psi(x), \tag{23}$$

$$\frac{M}{2} \left((\Psi(x+i) + \Psi(x-i) - \frac{GM^2 - e^2}{x} \Psi(x) \right) = m\Psi(x). \tag{24}$$

Вводя обозначения $\epsilon = m/M$ и $\alpha = GM^2 - e^2$, перепишем это уравнение в виде

$$\Psi(x+i) + \Psi(x-i) = \left(2\epsilon + \frac{\alpha}{x} \right) \Psi(x). \tag{25}$$

Необычным здесь является то, что полученное уравнение — не привычное дифференциальное, а уравнение в конечных разностях. Кроме того, сдвиг аргумента происходит не по действительной, а по мнимой оси, что приводит к требованию аналитичности решений, по крайней мере, в некоторой полосе плоскости комплексного переменного.

Прежде чем двигаться дальше, рассмотрим нерелятивистский предел нашего уравнения.

Восстанавливая все размерные константы, получаем для сдвинутого аргумента

$$x \pm i \to M \left(\rho \pm \frac{1}{M} i \right) \to \rho \pm \frac{\hbar}{Mc} i. \tag{26}$$

Раскладывая уравнение (25) в ряд по параметру $\hbar/Mc$ до второго порядка включительно, получаем нерелятивистское уравнение Шредингера для s-волновой радиальной функции

$$-\frac{1}{2M}\frac{d^2\Psi}{d\rho^2} - \frac{GM^2 - e^2}{2\rho}\Psi = (E - M)\Psi, \tag{27}$$

где $E - M$ — нерелятивистская энергия системы. Накладывая обычные граничные условия (волновая функция должна быть равна нулю в начале координат и интегрируема с квадратом на положительной полуоси), получаем для отрицательных значений энергии (финитное движение!) дискретный спектр

$$(E - M)_n = -\frac{M(GM^2 - e^2)^2}{8n^2}, \qquad n = 1, 2, ... \tag{28}$$

Если $G = 0$, то это — известная формула Ридберга для атома водорода.

Вернемся к полному уравнению. Вводя новые параметры $\epsilon = \cos\lambda$, $\alpha = GM^2 - e^2 = 2\beta\sin\lambda$, получаем

$$\Psi(x + i) + \Psi(x - i) = 2\left(\cos\lambda + \frac{\beta\sin\lambda}{x}\right)\Psi(x). \tag{29}$$

Это уравнение обладает интересным свойством. Если известно одно решение, скажем, Ψ_0, мы можем построить целый класс новых решений, умножая Ψ_0 на любую функцию $C(x)$, периодическую с мнимым периодом, i, то есть,

$$\begin{aligned} &\Psi_0(x) &&\text{— решение,}\\ \Psi_1(x) = {}&C(x)\Psi_0(x) &&\text{— решение, если}\\ &&& C(x + i) = C(x). \end{aligned} \tag{30}$$

Будем называть Ψ_0 фундаментальным решением. Если мы будем знать все фундаментальные решения, то, очевидно, сможем легко построить общее решение. Сколько же существует фундаментальных решений?

Можно показать, что существует только одно фундаментальное решение, которое может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Psi_\beta &= \left(-4\pi\beta \mathrm{e}^{-i\lambda(\beta+1)}\sin\lambda\right) x \times \\ &\times \left\{\frac{\Gamma(ix + \beta)e^{i\lambda\beta}\mathrm{e}^{-\lambda x}}{\Gamma(1 + ix)\Gamma(1 + \beta)} F(1 - ix, 1 - \beta; 1 - ix - \beta; \mathrm{e}^{-2i\lambda}) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \quad \frac{\Gamma(-ix-\beta)\mathrm{e}^{-i\lambda\beta}e^{\lambda x}}{\Gamma(1-ix)\Gamma(1-\beta)} F(1+ix, 1+\beta; 1+ix+\beta; \mathrm{e}^{-2i\lambda})\Bigg\}, \quad (31)$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, а $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса. Отметим, что наша переменная x входит в параметры гипергеометрической функции, а наш параметр λ — наоборот, входит в переменную функции.

Фундаментальное решение Ψ_0 имеет следующие асимптотики при $x \to 0$:

$$x^r, \qquad r = 1, 2.... \quad (32)$$

и

$$\Psi_\beta \;=\; -2\pi i\beta \mathrm{e}^{-i\lambda\beta} e^{i\pi\beta} \left\{ \frac{(2\sin\lambda)^\beta}{\Gamma(1+\beta)} x^\beta \mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{(2\sin\lambda)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} x^{-\beta} e^{\lambda x} \right\} \phi(\frac{1}{x}) \ .$$
$$x \;\to\; \infty \quad (33)$$

Общее же решение

$$\Psi_{\text{general}}(x) = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{-2\pi k x)} \right) \Psi_\beta(x), \quad (34)$$

где c_k — коэффициенты разложения в ряд Фурье периодической функции с мнимым периодом. Отметим, что такой вид разложения отражает также тот факт, что первоначальное уравнение инвариантно относительно замены $\lambda \to \lambda + 2\pi k$.

Гамильтониан (20) не является самосопряженным оператором на положительной полуоси. В нерелятивистской квантовой механике, когда гамильтониан есть дифференциальный оператор второго порядка, достаточно было для достижения самосопряженности наложить на волновые функции одно граничное условие в нуле $(\Psi(0) = 0)$ и одно условие на бесконечности (интегрируемость с квадратом), и это приводило к дискретному спектру для стационарных состояний. Кроме того, волновые функции должны были быть дважды дифференцируемы. Теперь же мы имеем дело с уравнением в конечных разностях, что соответствует дифференциальному уравнению бесконечного порядка. Можно показать, что для достижения самосопряженности гамильтониана, помимо условия спадания на бесконечности, не только сама функция должна быть равна нулю в начале координат, но также все ее четные производные, то есть функция должна быть нечетной. Кроме того, мы должны потребовать аналитичности волновой функции на положительной действительной полуоси.

Из асимптотического разложения на бесконечности (уравнение (33)) ясно, что должно быть

$$\beta = n, \qquad n = 1, 2, ... \tag{35}$$

Это приводит к дискретному спектру для полной массы m. Действительно,

$$\begin{aligned} \beta = \frac{\alpha}{2\sin\lambda} = n, \qquad \alpha = GM^2, \\ \epsilon = \frac{m}{M} = \cos\lambda, \\ \epsilon = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4n^2}} \end{aligned} \tag{36}$$

и

$$m = M\sqrt{1 - \frac{(GM^2 - e^2)^2}{4n^2}}. \tag{37}$$

Очевидно, полученный спектр воспроизводит формулу Ридберга для больших значений n (нерелятивистский предел), если положить $G = 0$. Но интереснее то, что этот спектр является частью дираковского спектра для электрона, если в последнем положить равным нулю так называемое радиальное квантовое число. Другими словами, наш спектр (для s-волны!) совпадает с дираковским спектром для критического углового момента (в реальном атоме водорода минимальный угловой момент — спин электрона — гораздо больше соответствующего критического, и именно благодаря этому факту мы и существуем).

Но полученный спектр не является спектром масс черных дыр! Это спектр масс самогравитирующей оболочки с заданной голой массой M. Так же, как и в случае атома водорода, оболочка, вообще говоря, не коллапсирует без излучения (в отличие от классического гравитационного коллапса!) или без изменения голой массы. Следовательно, излучение (на квазиклассическом этапе — излучение Хокинга) не просто сопровождает квантовый коллапс, но сам этот квантовый коллапс невозможен без излучения.

Чтобы выделить спектр черных дыр из общего спектра оболочек, рассмотрим зависимость полной массы m от голой массы M при фиксированном квантовом числе n. Мы уже рассматривали подобную зависимость для классической оболочки, но при фиксированном значении максимального радиуса ρ_0. Фиксирование квантового числа n означает фиксирование среднего значения радиуса оболочки. Как и в классическом случае, мы снова имеем возрастающую и убывающую ветви. Как и раньше, убывающая ветвь соответствует кротовой норе (полузамкнутому миру). Но квантовые оболочки, соответствующие возрастающей ветви, не коллапсируют! Единственная возможность образовать квантовую черную дыру — попасть точно на максимум кривой.

Максимум кривой $m(M)$ достигается при значении голой массы

$$M^2 = \frac{1}{2G}\left(2e^2 + \sqrt{e^4 + 12n^2}\right). \tag{38}$$

Подставляя это значение в спектр (37), получаем спектр масс квантовых черных дыр:

$$m_{BH} = M_{Pl}\sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{9}n\left(1 + \frac{e^4}{12n^2}\right)^{3/2} + \frac{2}{3}e^2 - \frac{e^6}{54n^2}}. \tag{39}$$
$$n = 1, 2, 3, ...$$

Для незаряженных черных дыр ($e = 0$) имеем

$$m = \frac{2}{\sqrt[4]{27}}\sqrt{n}M_{Pl}. \tag{40}$$

Интересно, что подобная зависимость от n для спектра масс черных дыр была давно предсказана на основе квазиклассических соображений и термодинамики черных дыр.

Основное состояние ($n = 1$) имеет массу

$$m \simeq 0,9M_{Pl}. \tag{41}$$

Вполне вероятно, что это и есть максимон Маркова.