*ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА*
*2018. Т. 49. ВЫП. 1. С. 9–15*

# ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФОРМУЛИРОВКАХ ЭЙНШТЕЙНА И ЙОРДАНА И КОСМОЛОГИЯ БЬЯНКИ I

*А. Ю. Каменщик* [1,2,*], *Е. О. Поздеева* [3,**], *А. Тронкони* [1,***], *Дж. Вентури* [1,****], *С. Ю. Вернов* [3,*****]

[1] Dipartimento di Fisica e Astronomia и INFN, Болонья, Италия

[2] Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва

[3] Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

Мы изучаем интегрируемые модели в случае метрики Бьянки I со скалярными полями, минимально и неминимально взаимодействующими с гравитацией, и связь их общих решений. Используя в качестве примера модель с минимально взаимодействующим скалярным полем и постоянным потенциалом, мы явно показываем способ нахождения общих решений соответствующих моделей в формулировке Йордана.

We study integrable models in the Bianchi I metric case with scalar fields minimally and non-minimally coupled with gravity and the correspondence between their general solutions. Using the model with a minimally coupled scalar field and a constant potential as an example, we demonstrate how to obtain the general solutions of the corresponding models in the Jordan frame.

PACS: 98.80Jk; 98.80Cq; 04.20-q; 04.20Jb

## ВВЕДЕНИЕ

Космологические модели со скалярными полями играют основную роль в описании глобальной эволюции Вселенной. Модели со скаляром Риччи, помноженным на функцию от скалярного поля, вполне естественны, поскольку квантовые поправки к эффективному действию с минимально взаимодействующим скалярным полем содержат члены неминимального взаимо-

*E-mail: Alexander.Kamenshchik@bo.infn.it
**E-mail: pozdeeva@www-hep.sinp.msu.ru
***E-mail: tronconi@bo.infn.it
****E-mail: giovanni.venturi@bo.infn.it
*****E-mail: svernov@theory.sinp.msu.ru

действия [1, 2]. Современные инфляционные модели с неминимально взаимодействующим скалярным полем не только не противоречат недавно полученным данным наблюдений [3], но и связывают космологию с физикой частиц [4–6].

Рассмотрим космологическую модель, описываемую следующим действием:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[U(\sigma)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\sigma_{,\mu}\sigma_{,\nu} - V(\sigma)\right], \tag{1}$$

где $U(\sigma)$ и $V(\sigma)$ суть дифференцируемые функции скалярного поля $\sigma$.

В предыдущих наших статьях [7–9] мы рассмотрели интегрируемые космологические модели в метрике Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (ФЛРУ) и нашли новые интегрируемые модели с неминимальным взаимодействием, используя знание соответствующих моделей с минимальным взаимодействием. Цель данной статьи — кратко описать обобщение развитого метода на случай космологических моделей Бьянки I.

## 1. МОДЕЛЬ С НЕМИНИМАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ В МЕТРИКЕ БЬЯНКИ I

Рассмотрим метрику Бьянки I, задаваемую интервалом

$$ds^2 = -N^2(\tau)\,d\tau^2 + a^2(\tau)\big(\mathrm{e}^{2\beta_1(\tau)}\,dx_1^2 + \mathrm{e}^{2\beta_2(\tau)}\,dx_2^2 + \mathrm{e}^{2\beta_3(\tau)}\,dx_3^2\big), \tag{2}$$

где $a(\tau)$ — масштабный фактор; $N(\tau)$ — функция хода, а функции $\beta_i(\tau)$ удовлетворяют условию $\beta_1(\tau) + \beta_2(\tau) + \beta_3(\tau) = 0$. Следуя работам [10, 11], мы вводим функцию сдвига

$$\theta \equiv \dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2 + \dot\beta_3^2 = 2\big(\dot\beta_1^2 + \dot\beta_2^2 + \dot\beta_1\dot\beta_2\big). \tag{3}$$

Здесь и далее «точка» означает производную по времени, а «штрих» — производную по $\sigma$.

Варьируя действие (1), получаем следующие уравнения в метрике Бьянки I:

$$(6h^2 - \theta)\,U + 6hU'\dot\sigma = \frac{1}{2}\dot\sigma^2 + N^2V, \tag{4}$$

$$4U\dot h + 6Uh^2 - 4Uh\frac{\dot N}{N} + 2U''\dot\sigma^2 + U\left[\theta - 2\ddot\beta_i - 6h\dot\beta_i + 2\frac{\dot N}{N}\dot\beta_i\right] + \\ + 2U'\left[\ddot\sigma + 2h\dot\sigma - \dot\beta_i\dot\sigma - \dot\sigma\frac{\dot N}{N}\right] = -\frac{1}{2}\dot\sigma^2 + N^2V, \tag{5}$$

$$\ddot\sigma + \left(3h - \frac{\dot N}{N}\right)\dot\sigma - 6U'\left[\dot h + 2h^2 - h\frac{\dot N}{N} + \frac{1}{6}\theta\right] + N^2V' = 0, \tag{6}$$

где $h \equiv \dot{a}/a$. Мы также получаем уравнение для $\theta$, которое легко интегрируется:

$$\dot{\theta} = 2\left[\frac{\dot{N}}{N} - 3h - \frac{\dot{U}}{U}\right]\theta \Rightarrow \theta = \frac{N^2}{U^2 a^6}\theta_0. \tag{7}$$

По определению $\theta \geqslant 0$, поэтому константа $\theta_0 \geqslant 0$.

## 2. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ С МИНИМАЛЬНЫМ И НЕМИНИМАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Сделаем конформное преобразование метрики $g_{\mu\nu} = (U_0/U)\tilde{g}_{\mu\nu}$, где $U_0$ — положительная константа, а также введем такое новое скалярное поле $\phi$, что

$$\frac{d\phi}{d\sigma} = \frac{\sqrt{U_0(U + 3U'^2)}}{U} \Rightarrow \phi = \int \frac{\sqrt{U_0(U + 3U'^2)}}{U}d\sigma. \tag{8}$$

В результате действие (1) трансформируется в следующее действие с минимальным взаимодействием:

$$S = \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left[U_0 R(\tilde{g}) - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - W(\phi)\right], \qquad \text{где} \quad W(\phi) = \frac{U_0^2 V(\sigma(\phi))}{U^2(\sigma(\phi))}. \tag{9}$$

В формулировке Эйнштейна метрика (2) преобразуется в следующую метрику Бьянки I:

$$ds^2 = -\tilde{N}^2(\tau)\, d\tau^2 + \tilde{a}^2(\tau)\left(\mathrm{e}^{2\beta_1(\tau)}\, dx_1^2 + \mathrm{e}^{2\beta_2(\tau)}\, dx_2^2 + \mathrm{e}^{2\beta_3(\tau)}\, dx_3^2\right), \tag{10}$$

где новая функция хода и новый масштабный фактор заданы выражениями $\tilde{N} = \sqrt{(U/U_0)}N$, $\tilde{a} = \sqrt{(U/U_0)}a$. Функции $\beta_i$ одинаковы в обеих формулировках. Уравнения в формулировке Эйнштейна имеют вид

$$U_0(6\tilde{h}^2 - \theta) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \tilde{N}^2 W, \tag{11}$$

$$4U_0\dot{\tilde{h}} + 6U_0\tilde{h}^2 - 4U_0\tilde{h}\frac{\dot{\tilde{N}}}{\tilde{N}} + U_0\theta = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \tilde{N}^2 W, \tag{12}$$

$$\ddot{\phi} + \left(3\tilde{h} - \frac{\dot{\tilde{N}}}{\tilde{N}}\right)\dot{\phi} + \tilde{N}^2 W_{,\phi} = 0, \tag{13}$$

$$\dot{\theta} = 2\left[\frac{\dot{\tilde{N}}}{\tilde{N}} - 3\tilde{h}\right]\theta, \tag{14}$$

где $\tilde{h} \equiv \dot{\tilde{a}}/\tilde{a}$. Легко решая уравнение (14), мы получаем

$$\theta = \theta_0 \frac{\tilde{N}^2}{\tilde{a}^6 U_0^2} = \theta_0 \frac{N^2}{a^6 U^2}. \tag{15}$$

Предположим, что для некоторого потенциала $W$ мы знаем общее решение системы (11)–(13), т. е. мы знаем явно или в квадратурах функции $\phi(\tau)$, $\tilde{a}(\tau)$, $\tilde{N}(\tau)$. Используя (15), получаем функцию $\theta(\tau)$. Мы также предполагаем, что функция $\sigma(\phi)$ известна. В этом случае общее решение системы уравнений (4)–(6) с потенциалом $V(\sigma) = U^2(\sigma) W(\phi(\sigma))/U_0^2$ задается формулами

$$\begin{aligned} \sigma(\tau) &= \sigma(\phi(\tau)), \\ a(\tau) &= \sqrt{\frac{U_0}{U(\sigma(\phi(\tau)))}}\tilde{a}(\tau), \\ N(\tau) &= \sqrt{\frac{U_0}{U(\sigma(\phi(\tau))}}\tilde{N}(\tau). \end{aligned} \tag{16}$$

В качестве примера рассмотрим случай постоянного потенциала: $W(\phi) = \Lambda > 0$. Суммируя уравнения (11) и (12) и выбирая $\tilde{N} = 1$, получаем уравнение на параметр Хаббла, дающее два решения:

$$\dot{\tilde{h}} + 3\tilde{h}^2 = \frac{\Lambda}{2U_0} \Rightarrow \tilde{h}_1 = \sqrt{\frac{\Lambda}{6U_0}}\,\tanh(\upsilon),$$
$$\tilde{h}_2 = \sqrt{\frac{\Lambda}{6U_0}}\coth(\upsilon), \quad \upsilon = \sqrt{\frac{3\Lambda}{2U_0}}(\tau - \tau_0).$$

Этим решениям соответствуют масштабные факторы и, как решения уравнения (13), $\dot{\phi}$:

$$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_0 \cosh(\upsilon)^{1/3}, \quad \tilde{a}_2 = \tilde{A}_0 \sinh(\upsilon)^{1/3},$$
$$\dot{\phi}_1 = \frac{c_1}{\cosh(\upsilon)}, \quad \dot{\phi}_2 = \frac{c_2}{\sinh(\upsilon)}.$$

Здесь $\tau_0$, $\tilde{a}_0$, $\tilde{A}_0$, $c_1$ и $c_2$ — константы интегрирования. Полученные функции должны удовлетворять уравнению (11). После подстановки получаем $\theta_0 = -\tilde{a}_0^6 U_0 (\Lambda + c_1^2/2)$ для первого решения. Поскольку $\theta_0 < 0$, подобное решение не существует и нужно выбрать другое. Для второго решения уравнение (11) дает $\theta_0 = \tilde{A}_0^6 U_0 (\Lambda - c_2^2/2)$. Функция $\phi_2$ равна

$$\phi_2(\tau) = \frac{-2c_2\sqrt{6U_0}}{3\sqrt{\Lambda}}\,\mathrm{arctanh}\,(\mathrm{e}^{\upsilon}) + \mathrm{c}_0, \tag{17}$$

где $c_0$ — константа. Условие $\theta_0 \geqslant 0$ дает $c_2^2 \leqslant 2\Lambda$.

Подобные решения были получены в случае метрики ФЛРУ [9,12]. Единственное отличие от случая метрики ФЛРУ состоит в ограничении на возможные значения констант интегрирования, задаваемом уравнением (11). Общее решение, полученное для модели с минимальным взаимодействием и постоянным потенциалом, позволяет найти по формулам (16) общее решение для модели с неминимальным взаимодействием и потенциалом $V = \Lambda U^2/U_0^2$. Таким образом, мы получаем множество интегрируемых космологических моделей с метрикой Бьянки I.

## 3. ВЫВОДЫ

В этой небольшой статье мы показали, что метод построения интегрируемых моделей с неминимально взаимодействующим скалярным полем, предложенный в [7], может быть обобщен на модели с метрикой Бьянки I. Мы рассмотрели простой пример с постоянным потенциалом и надеемся представить примеры с более сложными потенциалами в последующей публикации [13]. Интегрируемая модель Бьянки I без скалярного поля, но с космологической константой, материей с параметром состояния, равным единице, и пылью рассмотрена в работах [14,15], где общие решения найдены. Было бы интересно обобщить наш подход на космологические модели с пылью и радиацией. Число известных интегрируемых моделей с метрикой Бьянки I меньше, чем число интегрируемых моделей с метрикой ФЛРУ*. Мы надеемся, что предложенный метод поможет найти новые интегрируемые модели с минимальным и неминимальным взаимодействием.

Работа А. К. частично поддержана грантом РФФИ 14-02-00894. Исследование Е. П. частично поддержано грантом МК-7835.2016.2 Президента Российской Федерации. Исследование С. В. частично поддержано грантом НШ-7989.2016.2 Президента Российской Федерации. Исследования Е. П. и С. В. частично поддержаны грантом РФФИ 14-01-00707.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chernikov N. A., Tagirov E. A.* Quantum Theory of Scalar Fields in de Sitter Space-Time // Ann. Poincare Phys. Theor. A. 1968. V. 9. P. 109;
   *Tagirov E. A.* Consequences of Field Quantization in de Sitter Type Cosmological Models // Ann. Phys. 1973. V. 76. P. 561.
2. *Callan C. G., Coleman S. R., Jackiw R.* A New Improved Energy–Momentum Tensor // Ann. Phys. 1970. V. 59. P. 42.
3. *Ade P. A. R. et al. (Planck Collab.).* Planck 2015 Results. XX. Constraints on Inflation. arXiv:1502.02114.

*Список интегрируемых моделей ФЛРУ с минимальным взаимодействием представлен в [16], некоторые интегрируемые модели Бьянки I представлены в [17].

4. *Spokoiny B. L.* Inflation and Generation of Perturbations in Broken Symmetric Theory of Gravity // Phys. Lett. B. 1984. V. 147. P. 39–43;

*Futamase T., Maeda K.-I.* Chaotic Inflationary Scenario in Models Having Nonminimal Coupling with Curvature // Phys. Rev. D. 1989. V. 39. P. 399–404;

*Fakir R., Unruh W. G.* Improvement on Cosmological Chaotic Inflation through Nonminimal Coupling // Phys. Rev. D. 1990. V. 41. P. 1783–1791;

*Libanov M. V., Rubakov V. A., Tinyakov P. G.* Cosmology with Nonminimal Scalar Field: Graceful Entrance into Inflation // Phys. Lett. B. 1998. V. 442. P. 63; arXiv:hep-ph/9807553;

*Cerioni A. et al.* Inflation and Reheating in Induced Gravity // Phys. Lett. B. 2009. V. 681. P. 383–386; arXiv:0906.1902;

*Kallosh R., Linde A., Roest D.* The Double Attractor Behavior of Induced Inflation // J. High Energy Phys. 2014. V. 1409. P. 062; arXiv:1407.4471;

*Rinaldi M. et al.* Inflationary Quasi-Scale Invariant Attractors // Phys. Rev. D. 2016. V. 93. P. 024040; arXiv:1505.03386.

5. *Bezrukov F. L., Shaposhnikov M.* The Standard Model Higgs Boson as the Inflaton // Phys. Lett. B. 2008. V. 659. P. 703; arXiv:0710.3755;

*Barvinsky A. O., Kamenshchik A. Y., Starobinsky A. A.* Inflation Scenario via the Standard Model Higgs Boson and LHC // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2008. V. 0811. P. 021; arXiv:0809.2104;

*Bezrukov F., Gorbunov D., Shaposhnikov M.* On Initial Conditions for the Hot Big Bang // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2009. V. 0906. P. 029; arXiv:0812.3622;

*Barvinsky A. O. et al.* Asymptotic Freedom in Inflationary Cosmology with a Nonminimally Coupled Higgs Field // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2009. V. 0912. P. 003; arXiv:0904.1698;

*De Simone A., Hertzberg M. P., Wilczek F.* Running Inflation in the Standard Model // Phys. Lett. B. 2009. V. 678. P. 1; arXiv:0812.4946;

*Bezrukov F. L. et al.* Higgs Inflation: Consistency and Generalizations // J. High Energy Phys. 2011. V. 1101. P. 016; arXiv:1008.5157;

*Barvinsky A. O. et al.* Higgs Boson, Renormalization Group, and Cosmology // Eur. Phys. J. C. 2012. V. 72. P. 2219; arXiv:0910.1041;

*Bezrukov F. L.* The Higgs Field as an Inflaton // Class. Quant. Grav. 2013. V. 30. P. 214001; arXiv:1307.0708;

*Ren J., Xianyu Z.-Z., He H. J.* Higgs Gravitational Interaction, Weak Boson Scattering, and Higgs Inflation in Jordan and Einstein Frames // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2014. V. 1406. P. 032; arXiv:1404.4627.

6. *Elizalde E. et al.* Renormalization-Group Inflationary Scalar Electrodynamics and $SU(5)$ Scenarios Confronted with Planck2013 and BICEP2 Results // Phys. Rev. D. 2014. V. 90. P. 084001; arXiv:1408.1285;

*Inagaki T., Nakanishi R., Odintsov S. D.* Non-Minimal Two-Loop Inflation // Phys. Lett. B. 2015. V. 745. P. 105; arXiv:1502.06301;

*Elizalde E. et al.* Cosmological Attractor Inflation from the RG-Improved Higgs Sector of Finite Gauge Theory // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2016. V. 1602. P. 025; arXiv:1509.08817.

7. *Kamenshchik A. Yu. et al.* Integrable Cosmological Models with Non-Minimally Coupled Scalar Fields // Class. Quant. Grav. 2014. V. 31. P. 105003; arXiv:1307.1910.

8. *Kamenshchik A. Yu. et al.* Interdependence between Integrable Cosmological Models with Minimal and Non-Minimal Coupling // Class. Quant. Grav. 2016. V. 33. P. 015004; arXiv:1509.00590.

9. *Kamenshchik A. Yu. et al.* Travelling between Jordan and Einstein Frames, Bounces, Antigravity and Sailing through Singularities. arXiv:1602.07192;
*Kamenshchik A. Yu. et al.* General Solutions of Integrable Cosmological Models with Non-Minimal Coupling. arXiv:1604.01959.

10. *Pereira T. S., Pitrou C., Uzan J.-Ph.* Theory of Cosmological Perturbations in an Anisotropic Universe // J. Cosmol. Astropart. Phys. 2007. V. 0709. P. 006; arXiv:0707.0736.

11. *Aref'eva I. Ya. et al.* The NEC Violation and Classical Stability in the Bianchi I Metric // Phys. Rev. D. 2009. V. 80. P. 083532; arXiv:0903.5264.

12. *Aref'eva I. Ya., Joukovskaya L. V., Vernov S. Yu.* Dynamics in Nonlocal Linear Models in the Friedmann–Robertson–Walker Metric // J. Phys. A. 2008. V. 41. P. 304003; arXiv:0711.1364.

13. *Kamenshchik A. Yu. et al.* Work in progress.

14. *Khalatnikov I. M., Kamenshchik A. Yu.* A Generalization of the Heckmann–Schucking Cosmological Solution // Phys. Lett. B. 2003. V. 553. P. 119; arXiv:gr-qc/0301022.

15. *Kamenshchik A. Yu., Mingarelli C. M. F.* A Generalized Heckmann–Schucking Cosmological Solution in the Presence of a Negative Cosmological Constant // Phys. Lett. B. 2010. V. 693. P. 213; arXiv:0909.4227.

16. *Fré P., Sagnotti A., Sorin A. S.* Integrable Scalar Cosmologies I. Foundations and Links with String Theory // Nucl. Phys. B. 2013. V. 877. P. 1028; arXiv:1307.1910.

17. *Christodoulakis T. et al.* Decoupling of the General Scalar Field Mode and the Solution Space for Bianchi Type I and V Cosmologies Coupled to Perfect Fluid Sources // J. Math. Phys. 2006. V. 47. P. 042505; arXiv:gr-qc/0506132;
*Bars I. et al.* Antigravity and the Big Crunch/Big Bang Transition // Phys. Lett. B. 2012. V. 715. P. 278; arXiv:1112.2470.