ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2018. Т. 49. ВЫП. 1. С. 16–19

САМОДУАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕЙЛЯ–КАРТАНА

В. В. Кассандров [1,*], *Дж. А. Ризкалла* [2,**]

[1] Институт гравитации и космологии, Российский университет дружбы народов, Москва

[2] Ливанский университет, Бейрут

Рассматриваются пространства со связностью Вейля и кручением специального вида, определяемые структурой условий дифференцируемости в алгебре комплексных кватернионов. Эти условия совместны лишь при самодуальности кривизны связности. Поля Максвелла и $SL(2,\mathbb{C})$ Янга–Миллса, ассоциируемые с неприводимыми компонентами связности, также оказываются самодуальными, так что соответствующие уравнения выполняются на решениях генерирующей системы. С использованием твисторной структуры последней получено ее общее решение. При этом сингулярное множество имеет струнную (частицеподобную) структуру, порождая самосогласованную алгебраическую динамику системы струн.

We consider spaces with Weyl-type connection and torsion of a special kind, defined by the structure of the differentiability conditions in the algebra of complex quaternions. These conditions are consistent when only the curvature is self-dual. The Maxwell and $SL(2,\mathbb{C})$-Yang–Mills fields, associated with the irreducible components of the connection, turn out to be self-dual as well, so that the corresponding equations are fulfilled on the solutions of the generating system. Using the twistor structure of the latter, its general solution is exhibited. Singular locus possesses the string-like (particle-like) structure generating the correlated algebraic dynamics of the string system.

PACS: 02.40.-k; 03.50.-z; 02.10.D

Наиболее общий *геометродинамический подход* к построению фундаментальной динамики полей/частиц на практике оказывается малопродуктивным в силу как отсутствия ясных критериев отбора самой геометрии, так и произвола выбора лагранжиана. С другой стороны, положив в основу теории некоторую исключительную алгебраическую структуру, в первую очередь кватернионного типа, можно надеяться на однозначное определение индуцируемой

* E-mail: vkassan@sci.pfu.edu.ru
** E-mail: joeriz68@gmail.com

ей геометрии пространства-времени, а также на вывод уравнений фундаментальных «кватернионных» полей только из внутренних свойств первичной алгебры.

Такой подход, предложенный в [1,2] (ссылки на более поздние работы см. в [3]), основан на формулировке условий дифференцируемости функций алгебраического ($\mathbb{A}$)-переменного, обобщающих известные в комплексном анализе условия Коши–Римана на случай ассоциативной, но некоммутативной алгебры $\mathbb{A}$. Такие условия формулируются в инвариантном, относительно умножения $(\cdot)$ в алгебре $\mathbb{A}$, бескомпонентном виде

$$dF = \Phi \cdot dZ \cdot \Psi, \tag{1}$$

где $F = F(Z) \in \mathbb{A}$ — $\mathbb{A}$-значная функция переменного $Z \in \mathbb{A}$; $\Phi = \Phi(Z)$, $\Psi = \Psi(Z)$ — вспомогательные $\mathbb{A}$-значные функции («полупроизводные» основной функции $F(Z)$); dF — линейная часть приращения (дифференциал) $F(Z)$, отвечающего приращению аргумента dZ.

В качестве «алгебры пространства-времени» $\mathbb{A}$ в предыдущих работах использовалась алгебра комплексных кватернионов (бикватернионов) $\mathbb{B}$, изоморфная полной матричной 2×2 алгебре над $\mathbb{C}$. При этом, однако, $4\mathbb{C}$ координатное пространство $\mathbb{B}$ редуцировалось к подпространству $\mathbf{M}$ эрмитовых матриц $Z \mapsto X = X^+$ с метрикой Минковского, так что вся конструкция оказывается лоренц-инвариантной. Сами физические поля, *ассоциируемые с дифференцируемыми $\mathbb{B}$-функциями*, остаются при этом $\mathbb{C}$-значными. Кроме того, основной класс решений (1) отвечает [2] случаю равенства $\Psi(Z) = F(Z)$ (либо $\Phi(Z) = F(Z)$), так что окончательно *условия $\mathbb{B}$-дифференцируемости, играющие роль первичных уравнений поля*, принимают вид

$$dF = \Phi \cdot dX \cdot F. \tag{2}$$

В нетривиальном случае $\mathbb{B}$-функций (матриц) с $\det F = 0$, разлагая (2) по столбцам, получим так называемую *генерирующую систему уравнений* (ГСУ)

$$d\xi = \Phi \, dX \, \xi \tag{3}$$

для 2-спинорного $\xi = \{\xi_A(X)\}$ и 4-векторного $\Phi = \{\Phi_{AA'}(X)\}$ полей. Здесь $A, B, \ldots, A', B' \ldots = 0,\ 1$, и знак $\mathbb{B}$-(матричного) умножения опущен.

Именно чисто алгебраическая по природе система уравнений (3) и использовалась для построения *алгебродинамики* — динамики полей и соответствующих им сингулярностей — частицеподобных образований. Приведем ниже ряд наиболее важных свойств и следствий системы (3), отсылая за доказательствами к работам авторов (см. ссылки в [3]).

Исключением поля $\Phi(X)$ ГСУ сводится к системе уравнений *бессдвиговых изотропных конгруенций* (БИК) $\xi^{A'} \partial_{AA'} \xi_C = 0$. Аналогично уравнениям

БИК получено *общее решение* исходной ГСУ в виде

$$\Pi^{(C)}(\xi^{A'}, \tau_A) = \Pi^{(C)}(\xi^{A'}, X_{AA'}\xi^{A'}) = 0, \quad C = 1, 2, \tag{4}$$

где $\Pi^{(C)}$ — пара произвольных (аналитических) функций *твисторного* аргумента с четырьмя комплексными (спинорными) компонентами, связанными соотношением *твисторной инцидентности* $\tau_A = X_{AA'}\xi^{A'}$. В каждой точке $X \in \mathbf{M}$, разрешая систему (4) относительно $\xi^{A'}$, приходим к (вообще говоря, многозначному) 2-спинорному полю $\xi(X)$, каждая непрерывная ветвь которого удовлетворяет сразу обоим фундаментальным релятивистским уравнениям — комплексного эйконала $\partial_{AA'}\xi_C\partial^{AA'}\xi_C = 0$ (для каждой компоненты спинора) и волновому уравнению $\Box G = 0$ (для отношения компонент $G := \xi_1/\xi_0$). Заметим, что (4) представляет собой инвариантное обобщение так называемой *теоремы Керра* для описания БИК.

Что касается поля $\Phi(X)$, то оно по существу является *калибровочным*, так как ГСУ форминвариантно при преобразованиях вида

$$\xi \mapsto \alpha\xi, \quad \Phi_{AA'} \mapsto \Phi_{AA'} - \partial_{AA'}\alpha, \tag{5}$$

где калибровочный параметр $\alpha = \alpha(\xi, X\xi)$ зависит от X лишь через компоненты преобразуемого твистора $\mathbf{W} = \{\xi, X\xi\}$ (так называемая «слабая» калибровочная инвариантность [4]).

Более того, из условий совместности переопределенной ГСУ (3) $dd\xi = 0 = R\xi$, $R := (\Phi dX\Phi) \wedge dX$ следует *самодуальность* 2-формы кривизны эффективной связности $\Omega := \Phi dX$ на решениях ГСУ (так называемая «слабая» самодуальность [4]). При этом уже на фоне пространства с метрикой Минковского связность Ω обладает неметричностью (вейлевского типа) и специального вида кручением [4]. Сами же уравнения ГСУ (в форме (2)) можно рассматривать как уравнения *ковариантно-постоянных полей* в соответствующем пространстве со связностью Вейля–Картана [2], $dF = \Omega F$. Заметим, что вообще ковариантно-постоянные поля в различных типах пространств аффинной связности Вейля–Картана могут использоваться для интересных геометрических интерпретаций электромагнетизма [5]).

Как следствие самодуальности кривизны $GL(2,\mathbb{C})$ связности Ω на решениях ГСУ *выполняются уравнения вакуумных калибровочных полей*: уравнения Максвелла для *следовой* и $SL(2,\mathbb{C})$ Янга–Миллса для бесследовой частей кривизны. При этом ассоциированные электромагнитное и янг-миллсовское поля сингулярны в точках

$$P := \det \left\| \frac{d\Pi^C}{d\xi^{A'}} \right\| = 0, \tag{6}$$

отвечающих кратным корням уравнений (4) для спинора $\xi^{A'}$. В случае, когда соответствующие сингулярные подмножества ограничены в 3-мерном пространстве, они могут рассматриваться в качестве *частицеподобных образований*, имеющих даже некоторые свойства квантовых частиц. Например, электрический заряд кратен минимальному («элементарному») — заряду сингулярного кольца Керра–Ньюмена. Обнаружены также решения с электрически нейтральными сингулярностями.

Из системы (4), (6) при этом следует, что в ситуации общего вида такие образования имеют характер *замкнутых струн*. Таким образом, система алгебраических уравнений (4), (6), следующая из ГСУ, определяет нетривиальную *алгебраическую динамику системы замкнутых струн на* $\mathbb{M}$.

В частном случае такая система вырождается в множество точечных сингулярностей на *единой Мировой линии*, в духе известной концепции «одноэлектронной Вселенной» Уилера–Фейнмана. Такая коллективная алгебраическая динамика подробно рассмотрена в [6] и, по крайней мере в случае произвольной *полиномиальной* мировой линии, оказывается *консервативной* — выполняется набор лоренц-инвариантных законов сохранения. Имеются также другие универсальные и физически интересные свойства динамики корней исходной алгебраической системы, в том числе их (асимптотическое) слияние и *кластеризация*. Более сложный общий случай струнной алгебродинамики еще предстоит изучить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кассандров В. В.* Алгебраическая структура пространства-времени и алгебродинамика. М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1992.
2. *Kassandrov V. V.* // Grav. Cosmol. 1995. V. 1. P. 216;
Kassandrov V. V. // Acta Appl. Math. 1998. V. 50. P. 197.
3. *Kassandrov V. V.* // Phys. At. Nucl. 2009. V. 72. P. 813;
Kassandrov V. V. Space-Time Structure. Algebra and Geometry / Eds.: D. G. Pavlov, Gh. Atanasiu and V. Balan. M.: Lilia Print, 2007. P. 441.
4. *Kassandrov V. V., Rizcallah J. A.* // Grav. Cosmol. 2016. V. 22, No. 3. P. 230–233;
Kassandrov V. V., Rizcallah J. A. // Intern. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 2017. V. 14. P. 1750031.
5. *Kassandrov V. V., Rizcallah J. A.* // Gen. Rel. Grav. 2014. V. 46. P. 1772;
Kassandrov V. V., Rizcallah J. A. // Grav. Cosmol. 2015. V. 21. P. 273.
6. *Kassandrov V. V., Khasanov I. Sh., Markova N. V.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2015. V. 48. P. 395204.