ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2018. Т. 49. ВЫП. 1. С. 205–213

О ПРОПАГАТОРАХ НЕЛОКАЛЬНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИФФУЗИИ ГАЛАКТИЧЕСКИХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

В. В. Учайкин, Р. Т. Сибатов *

Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия

В докладе обсуждаются пропагаторы космических лучей (КЛ) в Галактике в связи с качественными особенностями порождаемых ими траекторий. Отмечаются несоответствия известных моделей релятивистскому принципу ограниченности скорости и крупномасштабной турбулентности межзвездной среды. Приведены аналитические выражения для пропагаторов разрабатываемой авторами нелокальной теории переноса КЛ, свободной от указанных недостатков.

Some propagators of cosmic rays (CR) in the Galaxy in view of qualitative features of the trajectories generated by them are discussed. Inconsistencies of known models with the relativistic principle of limited speed and with large-scale turbulence of the interstellar medium are indicated. Analytical expressions for propagators of the nonlocal transport theory being free from these shortcomings are presented.

PACS: 98.70.Sa

ВВЕДЕНИЕ

В рамках линейного приближения теории переноса эволюция системы частиц во времени может быть сформулирована в двух представлениях: эйлеровом и лагранжевом. В эйлеровом представлении мы следим за изменением вероятности появления частицы в фиксированном элементе dx фазового пространства. Фазовую плотность этой вероятности при фиксированном начальном положении частицы x_0, t_0 обычно называют *пропагатором*. Этот пропагатор может дать исчерпывающую информацию о движении частиц лишь при дополнительном предположениии о марковском характере процесса: в этом случае знания только двухточечной плотности вероятности (*переходной плотности* в терминах теории марковских процессов) достаточно для описания всех его свойств. Полное описание динамики случайного процесса дается лишь ансамблем его траекторий. В механике такое описание

*E-mail: ren_sib@bk.ru

процесса называют лагранжевым: оно представляет процесс не как временную последовательность сменяющих друг друга распределений частиц (или вероятности одной частицы) в фазовом пространстве, а как совокупность независимых траекторий разных частиц (разных реализаций одной случайной траектории). Этот *случайный процесс* мы будем называть лагранжевым (или *стохастическим*) пропагатором. Он является решением стохастического уравнения типа уравнения Ланжевена и чаще задается распределениями своих случайных элементов, чем явной формулой. Естественным математическим аппаратом изучения стохастических пропагаторов является теория случайных процессов, а численным методом — метод Монте-Карло. Разумеется, текст монте-карловской программы может выглядеть сложнее уравнения (или системы уравнений) для эйлерова пропагатора, но формулировка самой модели (что, по большому счету, и является решением задачи) в лагранжевом представлении оказывается гораздо определеннее, компактнее и нагляднее. С этой точки зрения мы и рассмотрим проблему пропагатора применительно к задаче о распространении протонов КЛ в межзвездной среде.

1. ГАУССОВ ПРОПАГАТОР

В своей первой статье по происхождению КЛ [1] Э. Ферми нарисовал довольно простую картину явления: турбулентное (случайно неоднородное) межзвездное магнитное поле представляется в виде случайным образом распределенных в пространстве и медленно движущихся в нем магнитных облаков, попадая в которые заряженная частица слегка изменяет свою энергию, но покидает облако в совершенно другом направлении. Проведенный Ферми анализ баланса энергии в сочетании с гипотезой об экспоненциально распределенном возрасте регистрируемых частиц привел к степенной форме энергетического спектра, а многократное изменение направления блуждающих меж облаков частиц объясняло наблюдаемую изотропию углового распределения. В статье Гинзбурга [2] понятие случайного блуждания уже было конкретизировано в качестве броуновского движения. Диффузионное уравнение для пропагатора такого процесса обычно выводится комбинацией уравнения непрерывности и закона Фика. Решение диффузионного уравнения (гауссов пропагатор) выглядит особенно убедительным в свете центральной предельной теоремы (ЦПТ). Действительно, складываются векторы пробегов частицы между столкновениями с облаками Ферми, и сумма большего числа таких слагаемых согласно ЦПТ имеет гауссово распределение. Правда, для применимости ЦПТ необходимо, чтобы слагаемые векторы были *статистически независимы* и одинаково распределены с *конечным вторым моментом*. Для молекул идеального газа предположение о независимости допустимо: они не взаимодействуют друг с другом по определению и в отсутствие начальных корреляций эти молекулы остаются некоррелированными и впредь. Однако к магнитным неоднородностям, названным Ферми *облаками*, это предположение явно не имеет отношения: облака являются частями общей магнитогидродинамической системы и связаны между собой магнитными силовыми линиями. В этом — первое несоответствие стандартной диффузионной модели (характеристическим признаком которой является наличие оператора Лапласа или его аналога в кинетическом уравнении) реальному процессу.

Второе несоответствие кроется в свойствах самих траекторий диффузионного процесса. В своих исследованиях Винер (именем которого и названа строгая математическая модель броуновского движения) установил, что всякая реализация этого процесса (т. е. марковского процесса с переходной плотностью гауссова типа) представляет собой бесконечно изломанную, нигде не дифференцируемую непрерывную кривую, длина любого элемента которой, заключенного между двумя сколь угодно близкими точками траектории, бесконечна, и в ее составе нет ни одного сколь угодно малого «гладкого» отрезка. Вероятность любого события (например, поглощения, рассеяния, фрагментации), пропорциональная элементарной длине участка траектории, оказывается бесконечной.

Этих соображений вполне достаточно, чтобы породить сомнения в применимости самой диффузионной модели даже с учетом различного рода усовершенствований, которыми она обросла за десятилетия ее эксплуатации.

2. БОЛЬЦМАНОВСКИЙ ПРОПАГАТОР

Необходимо, однако, отметить, что Ферми представлял себе траектории частиц КЛ скорее в виде больцмановских траекторий, чем в виде броуновских: частицы перемещались в пространстве от одного магнитного облака к другому, рассеиваясь на каждом из них. Вообще говоря, эволюция распределения заряженных частиц, порождаемых источником с фазовой плотностью $q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ и распространяющихся в детерминированном электромагнитном поле, описывается уравнением Власова

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right] f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\dot{\mathbf{v}}\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t).$$

Введя предположения о том, что: 1) линейные размеры облаков много меньше расстояний между ними, 2) рассеяния на облаках изотропны и рассматриваются как столкновения, 3) скорость движения частиц между облаками одна и та же по величине, $\mathbf{v} = v\boldsymbol{\Omega}$, $v = \mathrm{const}$, мы приходим к больцмановской модели пропагатора, простейшее уравнение для которой имеет вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right] f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) = \frac{v\Sigma}{4\pi}\int\limits_{4\pi} \left[f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', t) - f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)\right] d\boldsymbol{\Omega}' + q(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t). \quad (1)$$

Решение этого уравнения не выражается в элементарных функциях даже в случае однородной безграничной среды. Существует ряд методов (метод пространственно-угловых моментов, метод интегральных преобразований, метод Монте-Карло), позволяющих получить пропагатор в численном виде, или исследовать асимптотики. Заметим, что диффузионное уравнение является первым приближением метода сферических гамоник (P_1-приближение). В этом приближении искомое решение представляется в виде $f(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},t)=(4\pi)^{-1}\left[f_0(\mathbf{r},t)+3\mathbf{\Omega}\mathbf{f}_1(\mathbf{r},t)\right]$, где $f_0(\mathbf{r},t)=\int\limits_{4\pi}\Phi(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},t)d\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{f}_1(\mathbf{r},t)=\int\limits_{4\pi}f(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},t)\mathbf{\Omega}d\mathbf{\Omega}$. Полагая источник точечным мгновенным изотропным, $q(\mathbf{r},\mathbf{\Omega},t)=(4\pi)^{-1}\delta(\mathbf{r})\delta(t)$, и исключая из системы функцию $\mathbf{f}_1$ интегрированием по $\mathbf{\Omega}$, для функции $G(\mathbf{r},t)\equiv f_0(\mathbf{r},t)$ получаем уравнение диффузии с коэффициентом $D=lv/3$, где $l=1/\Sigma$ — средний пробег частицы между столкновениями. Эта формула, однако, вносит лишь некоторую определенность в масштаб времени, никоим образом не исправляя самого пропагатора: он по-прежнему простирается за пределами разрешенного релятивистским принципом конуса, трактории по-прежнему недифференцируемы и т. д.

Что же касается самой больцмановской модели, то в стационарной однородной среде она полностью определяется дифференциальным и полным сечениями рассеяния на единице длины пути. Соответствующие траектории представляются в пространственно-временном континууме случайными ломаными с экспоненциально распределенными по длине и изотропно распределенными по направлениям прямолинейными отрезками. Несмотря на случайный характер, ни одна из этих траекторий не выходит за пределы светового конуса, удовлетворяя тем самым принципам теории относительности. Следуя терминологии работы [4], мы называем такие пропагаторы *релятивистскими*.

Обзор релятивистских пропагаторов дан в работах [3, 4], а примеры их применения к переносу космических лучей в Галактике рассмотрены в работах [5, 6]. Все эти модели сформулированы посредством локальных (дифференциальных целого порядка) операторов, описывающих диффузию в однородных средах. Диффузия в самоподобно-неоднородных (фрактальных) средах носит нелокальный характер и для своего описания требует применения нелокальных операторов. Нелокальными операторами, сохраняющими самоподобие (автомодельность) функций, являются дифференциальные операторы дробного порядка, к числу которых принадлежит и дробный лапласиан.

3. ПРОПАГАТОР ЛЕВИ–ФЕЛЬДГЕЙМА

Определяющим свойством фрактальной среды и происходящих в ней процессов является самоподобная неоднородность. Конечно, это модель, имеющая чаще всего асимптотический смысл. Примером построения такой модели может служить колмогоровская феноменология турбулентности. На ее принципах Монин построил модель турбулентной диффузии, управляющее уравнение которой содержало нелокальный оператор: лапласиан дробной степени [8]. В статье [7], написанной с участием одного из соавторов доклада, такой подход был применен для вывода пропагатора, описывающего диффузию заряженной компоненты КЛ в межзвездной среде с учетом турбулентности последней. В качестве исходной конструкции модели была взята последовательность интегродифференциальных уравнений скачкообразного процесса в трехмерном пространстве:

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial s} = \sigma \int \left[f_\epsilon(\mathbf{r}', s) - f_\epsilon(\mathbf{r}, s)\right] W\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{\epsilon}\right) \frac{d\mathbf{r}'}{\epsilon^3} + S_\epsilon(\mathbf{r}, t).$$

Полагая, в духе колмогоровской феноменологии, асимптотику ядра W степенной (степенные функции самоподобны):

$$W(\mathbf{r}) \sim A r^{-3-\alpha}, \quad r \to \infty,$$

вводя обозначения $A' = A\sigma$, $t = \epsilon^\alpha s$, $N(\mathbf{r}, t) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(\mathbf{r}, t\epsilon^{-\alpha})$, $S(\mathbf{r}, t) = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \epsilon^\alpha S_\epsilon(\mathbf{r}, t)$ и положив $S(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t)$, в пределе $\epsilon \to 0$ получим уравнение

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -D_\alpha(-\Delta)^{\alpha/2} + \delta(\mathbf{r})\delta(t), \quad 0 < \alpha \leqslant 2, \tag{2}$$

решением которого является трехмерное (в общем случае многомерное) *устойчивое распределение Леви–Фельдгейма*, определяемое трансформантой Фурье

$$\int\limits_{\mathbf{r}^3} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \mathrm{e}^{-|\mathbf{k}|^\alpha D_\alpha t}.$$

Как частные случаи в это семейство входят распределения Гаусса и Коши.

С физической точки зрения дробный лапласиан может рассматриваться как следствие усреднения диффузионного оператора со случайным коэффициентом диффузии $\tilde{D}$:

$$\langle \nabla(\tilde{D}\nabla N(\mathbf{r}, t))\rangle \mapsto -D_\alpha(-\triangle)^{\alpha/2}\langle N(\mathbf{r}, t)\rangle.$$

В последующих работах А. А. Лагутина с соавт. первая производная по времени также была заменена дробной:

$$\frac{\partial^\beta G(\mathbf{r}, t)}{\partial t^\beta} = -D_\alpha(-\Delta)^{\alpha/2} + \delta(\mathbf{r})\delta^{(\beta)}(t), \quad 0 < \alpha < 2, \quad 0 < \beta \leqslant 1. \tag{3}$$

Дробный (меньший единицы) порядок производной по времени интерпретируется как признак наличия в среде ловушек, задерживающих частицы на долгое (распределенное по степенному закону) случайное время. Решение последнего уравнения выражается через *дробно-устойчивое распределение Леви–Фельдгейма* [9]. Подобно устойчивым распределениям дробно-устойчивые характеризуются тяжелыми степенными хвостами, приводящими к бесконечной дисперсии при всех $\alpha < 2$, но, кроме того, имеют существенные отличия и вблизи начала координат. Траектории же этих процессов отличаются от броуновских наличием горизонтальных (пространственных) разрывов, отвечающих мгновенным перелетам (*полетам Леви*), в модели (2) и дополнительными (временными) разрывами, соответствующими пребыванию в ловушках. Дробно-устойчивые пропагаторы с начала 2000-х гг. систематически используются группой Лагутина, а также в работах других авторов ([10–13] и др).

4. РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПРОПАГАТОРЫ ДЛЯ КЛ В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Однако ни (2), ни (3) не удовлетворяют условию ограниченности скорости распространения диффузионных пакетов и потому не могут считаться релятивистскими. Естественный способ получить из них ограниченный пропагатор — это связать независимые в модели (3) времена задержки и длины перелетов коэффициентом пропорциональности — скоростью свободного движения частицы. Эта процедура выполнена в работах [14–16], где получены уравнения для фурье-лапласовских образов асимптотики пропагатора в разных интервалах показателя α. В пространственно-временных переменных эти уравнения приведены в обзоре [17]. Их характерной особенностью является наличие дробных степеней оператора материальной производной, усредненного по направлениям $\mathbf{\Omega}$: $\langle {}_0\mathsf{D}_t^\alpha \rangle \equiv \langle ((\partial/\partial t) + v\mathbf{\Omega}\nabla)^\alpha \rangle$. В частности, для $\alpha < 1$ уравнение ОАД записывается в виде

$$\langle \, {}_0\mathsf{D}_t^\alpha \rangle \, [G(\mathbf{r}, t) - \delta(\mathbf{r})\delta(t)] = 0 \tag{4}$$

(переменные $\mathbf{r}$ и t обезразмерены).

Построенная на основе этого подхода модель в работе [15] названа моделью *ограниченной аномальной диффузии* (ОАД), чтобы отличать ее от модели неограниченной аномальной диффузии (НАД), не удовлетворяющей принципу ограничения скорости. ОАД-пропагатор одномерного блуждания при $0 < \alpha < 1$ имеет вид

$$G(x,t) = \frac{2\sin\pi\alpha}{\pi v t} \frac{\left(1 - x^2/v^2t^2\right)^{\alpha-1}}{(1 - x/vt)^{2\alpha} + (1 + x/vt)^{2\alpha} + 2\left(1 - x^2/v^2t^2\right)^{\alpha}\cos\pi\alpha}. \tag{5}$$

Траектории в пространстве (x, t) представляют собой непрерывные ломаные, составленные из отрезков с углом наклона $\operatorname{arctg}(v/c)$ к оси времени.

Для вывода изотропных пропагаторов в пространствах бóльших размерностей нет необходимости решать соответствующие уравнения, достаточно воспользоваться теоремой, связывающей эти распределения с помощью дифференцирования (см. п. 7.4. в [18]). Результат для радиальной плотности $f(\rho)$ $(\rho = r/vt)$ представляется в виде [19]

$$f(\rho) = \frac{8(\alpha+1)}{\alpha\pi} \sin(\alpha\pi)\rho(1-\rho^2)^{\alpha-1} \times$$
$$\times \frac{(1+\rho)^{2+2\alpha}(1+\alpha-\rho) - (1-\rho)^{2+2\alpha}(1+\alpha+\rho) - 2\rho(1-\rho^2)^{1+\alpha}\cos(\alpha\pi)}{[(1+\rho)^{2+2\alpha} + (1-\rho)^{2+2\alpha} + 2(1-\rho^2)^{1+\alpha}\cos(\alpha\pi)]^2}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение перечислим некоторые результаты, полученные нами на основе модели ОАД и заметно отличающиеся от результатов НАД. В [20] показано влияние релятивистского ограничения скорости распространения на равновесный спектр ГКЛ. Примечательный результат заключается в том, что при принятых предположениях о происхождении космических лучей релятивистский принцип ограниченности скорости приводит к излому в энергетическом спектре КЛ, формируемом ансамблем распределенных в диске источников [20]. Важно отметить принципиальное отличие указанного механизма от обсуждавшегося в прежних работах Лагутина и Учайкина, связывавших излом только с фрактальной структурой межзвездной среды. Предлагаемая интерпретация не связана также с привлечением новых процессов взаимодействия ГКЛ со средой. В [21] рассчитаны распределения времени выхода из галактики для различных моделей аномальной диффузии КЛ. В [22] рассматривается вопрос об анизотропии КЛ в однородной среде в рамках НАД- и ОАД-моделей, а в [23] и [24] продемонстрированы особенности прохождения КЛ через границу областей с разными турбулентными свойствами (в частности, изучен феномен инверсии анизотропии от точечного мгновенного источника). В [25, 26] показано, что демпфирование (плавное усечение степенного хвоста экспоненциальной функцией) позволяет согласовать модель ОАД с классическими результатами, удовлетворив в определенном смысле принципу соответствия.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках гос. задания 3.2111.2017/4.6 и РФФИ (гранты 16-01-00556 и 16-01-00542).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fermi E.* On the Origin of the Cosmic Radiation // Phys. Rev. 1949. V. 75. P. 1169.
2. *Гинзбург В. Л.* Происхождение космических лучей и радиоастрономия // УФН. 1953. Т. 51. С. 343–392.

3. *Debbasch F., Chevalier C.* Relativistic Stochastic Processes // Nonequilibr. Stat. Mechan. Nonlin. Phys. 2007. V. 913. P. 42–48.
4. *Dunkel J., Talkner P., Hänggi P.* Relativistic Diffusion Processes and Random Walk Models // Phys. Rev. D. 2007. V. 75. P. 043001.
5. *Webb G. M.* Relativistic Transport Theory for Cosmic Rays // Astrophys. J. 1985. V. 296. P.319–330.
6. *Aloisio R., Berezinsky V., Gazizov A.* The Problem of Superluminal Diffusion of Relativistic Particles and Its Phenomenological Solution // Astrophys. J. 2009. V. 693. P. 1275–1282.
7. *Lagutin A. A., Nikulin Y. A., Uchaikin V. V.* The “Knee” in the Primary Cosmic Ray Spectrum as Consequence of the Anomalous Diffusion of the Particles in the Fractal Interstellar Medium // Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 2001. V.97. P. 267–270.
8. *Монин А. С.* Уравнение турбулентной диффузии // Докл. АН СССР. 1955. Т. 105. С. 256–259.
9. *Учайкин В. В.* Аномальная диффузия и дробно-устойчивые распределения // ЖЭТФ. 2003. Т. 124. С. 903–920.
10. *Erlykin A. D., Lagutin A. A., Wolfendale A. W.* Properties of the Interstellar Medium and the Propagation of Cosmic Rays in the Galaxy // Astropart. Phys. 2003. V. 19. P. 351–362.
11. *Ketabi N., Fatemi J.* A Simulation on the Propagation of Supernova Cosmic Particles in a Fractal Medium // Transaction B: Mech. Engin. Sharif Univ. of Technol., 2009. V. 16. P. 269–272.
12. *Kermani H. A., Fatemi J.* Cosmic Ray Propagation in a Fractal Galactic Medium // South Afric. J. Sci. 2011. V. 107. P. 1–4.
13. *Doostmohammadi S., Fatemi S. J.* The Characteristics of Cosmic Rays in a Fractal Medium // ISRN High Energy Phys. 2012. P. 1–5.
14. *Учайкин В. В., Сибатов Р. Т.* Одномерное фрактальное блуждание с конечной скоростью свободного движения // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. С. 27–23.
15. *Учайкин В. В.* О дробно-дифференциальной модели переноса космических лучей в галактике // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. С. 115–120.
16. *Uchaikin V. V., Sibatov R. T.* On Fractional Differential Models for Cosmic Ray Diffusion // Grav. Cosmol. 2012. V. 18. P. 122–126.
17. *Учайкин В. В.* Дробно-дифференциальная феноменология аномальной диффузии космических лучей // УФН. 2013. Т. 183. С. 1175–1223.
18. *Uchaikin V. V., Zolotarev V. M.* Chance and Stability: Stable Distributions and Their Applications. Walter de Gruyter, 1999.
19. *Magdziarz M., Zorawik T.* Densities of 2D and 3D Lévy Walks. arXiv:1510.05614. 2015.
20. *Sibatov R. T., Uchaikin V. V.* On the Energy Spectrum of Cosmic Rays in the Model of Relativistic Nonlocal Diffusion // Proc. of the 34th Intern. Cosmic Ray Conf. 2015. P. 538.

21. *Учайкин В. В., Сибатов Р. Т., Саенко В. В.* Время выхода космических лучей из галактики в модели аномальной диффузии // Изв. РАН. Сер. физ. 2013. Т. 77. С. 688.

22. *Учайкин В. В.* Анизотропия космических лучей в дробно-дифференциальных моделях аномальной диффузии // ЖЭТФ. 2013. Т. 143. С. 1039–1047.

23. *Erlykin A. D., Sibatov R. T., Uchaikin V. V., Wolfendale A. A.* A Look at the Cosmic Ray Anisotropy with the Nonlocal Relativistic Transport Approach // Proc. of the 34th Intern. Cosmic Ray Conf. 2015. P. 463.

24. *Uchaikin V. V., Sibatov R. T., Harlova O. P.* Galaxies as Accelerators of Cosmic Rays // Ibid. P. 532.

25. *Сибатов Р.Т., Васильева П. Г.* Модель ограниченно-нелокальной релятивистской диффузии галактических космических лучей // Тр. XIII конф. «Фундаментальные и прикладные космические исследования». 2016. С. 13.

26. *Uchaikin V. V., Sibatov R. T.* Fractional Kinetics in Space: Anomalous Transport Models. World Sci., 2018.