ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 450–458

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВУ $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)/SL(2,\mathbf{R})$

В. В. Белокуров [1,2,*], *Е. Т. Шавгулидзе* [1,**]

[1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

[2] Институт ядерных исследований РАН, Москва

Получен явный вид функциональной меры на фактор-пространстве $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)/SL(2,\mathbf{R})$, что делает вычисление шварциановских функциональных интегралов более простым и прозрачным.

An explicit form of the functional measure on the factor space $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)/SL(2,\mathbf{R})$ is obtained that makes Schwarzian functional integrals calculus more simple and transparent.

PACS: 02.30.Sa

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы стало понятно [1–7], что квантово-механическая модель майорановских фермионов со случайным взаимодействием (SYK-модель), голографическое описание дилатонной гравитации Джекива–Тейтельбойма и некоторые другие модели приводят к одной и той же эффективной теории со шварциановским действием

$$A_{\mathrm{Sch}} = -\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{S^1} \left[\mathrm{Sch}\,\{h,\,t\} + 2\pi^2 (h'(t))^2\right] dt, \tag{1}$$

где $h(t)$ является сохраняющим ориентацию $(h'(t) > 0)$ диффеоморфизмом единичной окружности $S^1 (h \in \mathrm{Diff}^1_+(S^1))$, а

$$\mathrm{Sch}\,\{h,\,t\} = \left(\frac{h''(t)}{h'(t)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{h''(t)}{h'(t)}\right)^2$$

— производная Шварца.

*E-mail: vvbelokurov@yandex.ru
**E-mail: shavgulidze@bk.ru

Функциональные интегралы в этих теориях представляют собой интегралы по группе $\mathrm{Diff}_{+}^{1}(S^1)$ с мерой

$$\tilde{\mu}_\sigma(dh) = \exp\left\{-A_{\mathrm{Sch}}\right\}\, dh = \exp\left\{\frac{2\pi^2}{\sigma^2}\int\limits_{S^1} \left(h'(t)\right)^2\, dt\right\} \mu_\sigma(dh), \qquad (2)$$

где

$$\mu_\sigma(dh) = \exp\left\{\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_{S^1} \mathrm{Sch}\left\{h,\, t\right\} dt\right\} dh \qquad (3)$$

есть квазиинвариантная мера на $\mathrm{Diff}_{+}^{1}(S^1)$ [8,9].

Однако непосредственное функциональное интегрирование по мере (2) может приводить к бессмысленным бесконечным результатам. Причина состоит в том, что мера (2) инвариантна относительно левого действия группы $SL(2,\mathbf{R})$ на пространстве $\mathrm{Diff}_{+}^{1}(S^1)$:

$$h = \varphi \circ f \quad (h(t) = \varphi(f(t))), \quad \varphi \in SL(2,\mathbf{R}), \quad h,\, f \in \mathrm{Diff}_{+}^{1}(S^1). \qquad (4)$$

Для доказательства инвариантности

$$\mathrm{Sch}\left\{h,\, t\right\} + 2\pi^2 \left(h'(t)\right)^2 = \mathrm{Sch}\left\{f,\, t\right\} + 2\pi^2\left(f'(t)\right)^2 \qquad (5)$$

рассмотрим следующую реализацию группы $SL(2,\mathbf{R})$:

$$\varphi(f) = \frac{1}{i2\pi}\, \log\, \frac{\mathrm{e}^{i2\pi f} + z}{\bar{z}\,\mathrm{e}^{i2\pi f} + 1} \qquad (6)$$

и используем известное свойство производной Шварца

$$\mathrm{Sch}\left\{\varphi \circ f,\, t\right\} = \mathrm{Sch}\left\{\varphi,\, f(t)\right\}\, \left(f'(t)\right)^2 + \mathrm{Sch}\left\{f,\, t\right\}. \qquad (7)$$

Для получения конечных результатов для функциональных интегралов необходимо выделить бесконечный вклад некомпактной группы $SL(2,\mathbf{R})$, т. е. нужно интегрировать по фактор-пространству $\mathrm{Diff}_{+}^{1}(S^1)/SL(2,\mathbf{R})$.

Для этого в [10–12] мы предложили сначала вычислить регуляризованные функциональные интегралы по группе $\mathrm{Diff}_{+}^{1}(S^1)$, а затем нормировать их на соответствующие интегралы по группе $SL(2,\mathbf{R})$. Таким образом, мы вычислили функциональные интегралы для статистической суммы и корреляционных функций в шварциановских теориях.

В частности, в [12] мы вычислили явно функциональные интегралы, задающие двухточечную и четырехточечные корреляционные функции в SYK-модели. Поскольку в этом случае свойство марковости не выполняется и все точки окружности S^1 дают ненулевой вклад в интегралы, ни упорядоченная по времени четырехточечная корреляционная функция, ни четырехточечная функция с неправильным упорядочением не представляются в виде произведения двухточечных корреляционных функций.

Следует заметить, что результаты для корреляционных функций SYK-модели, определенных функциональными интегралами по $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)/SL(2,\mathbf{R})$, были получены впервые в [12].

В работах [13, 14], а также в более поздних статьях, изучающих корреляционные функции в двумерной гравитации [15–17], задача функционального интегрирования сводится к этой задаче в 1D-модели Лиувилля, или в теории нерелятивистской частицы на гиперболической верхней полуплоскости, помещенной в постоянное магнитное поле. Таким способом авторы этих работ вычислили корреляционные функции, задаваемые функциональными интегралами по $\mathrm{Diff}^1_+(\mathbf{R})/P$*. Совершенно естественно, что функциональное интегрирование по разным пространствам ($\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$ и $\mathrm{Diff}^1_+(\mathbf{R})$), соответствующим разным квантовым теориям, дают разные результаты при одном и том же подынтегральном выражении.

Существуют также некоторые другие схемы обращения со шварциановскими функциональными интегралами (см., например, [19–21]). Однако в настоящей статье мы развиваем метод непосредственного функционального интегрирования и находим явный вид функциональной меры на фактор-пространстве $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)/SL(2,\mathbf{R})$.

В разд. 1 мы даем обзор подхода к функциональному интегрированию, развитому в [10–12]. Мы показываем, как, используя квазиинвариантность меры (3) относительно группы Diff^3_+, можно вычислить регуляризованные функциональные интегралы по группе $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$, а затем нормировать их на соответствующие регуляризованные интегралы по группе $SL(2,\mathbf{R})$.

В разд. 2 мы предлагаем другой подход к функциональному интегрированию по фактор-пространству. Мы факторизуем меру на группе диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$ и строим явным образом меру на фактор-пространстве $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)/SL(2,\mathbf{R})$.

1. НОРМИРОВКА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ГРУППЕ $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$

Вначале мы напомним схему нормировки функциональных интегралов вида

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+(S^1)} \Psi(h)\,\tilde{\mu}_\sigma(dh). \tag{8}$$

*$SL(2,\mathbf{R})$ не является подгруппой группы $\mathrm{Diff}^1_+(\mathbf{R})$ (см., например, [18]). Но группа P, состоящая из преобразований $f \to af+b$ ($P \subset SL(2,\mathbf{R})$), есть некомпактная подгруппа группы $\mathrm{Diff}^1_+(\mathbf{R})$.

Регуляризуем (8) следующим образом ($\alpha < \pi$):

$$J^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+(S^1)} \Psi(h) \exp\left\{ \frac{2\alpha^2}{\sigma^2} \int\limits_{S^1} \left(h'(t)\right)^2 dt \right\} \mu_\sigma(dh) \tag{9}$$

и вычислим регуляризованный интеграл, используя квазиинвариантность меры (см. ниже).

Вообще говоря, функциональные интегралы (9) сходятся при $0 < \alpha < \pi$ и расходятся при $\alpha = \pi$.

Для получения конечных результатов функционального интегрирования нормируем (9) на соответствующие регуляризованные интегралы по группе $SL(2,\mathbf{R})$. Таким образом, мы определяем функциональные интегралы по фактор-пространству $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)/SL(2,\mathbf{R})$ как нормированные функциональные интегралы

$$J^N = \lim_{\alpha\to\pi-0} \frac{J^{\alpha}}{\int\limits_{SL(2,R)} \Psi\left(\varphi_z\right) \exp\left\{ \frac{2\alpha^2}{\sigma^2} \int\limits_{S^1} \left(\varphi_z'(t)\right)^2 dt \right\} d\nu_H}, \tag{10}$$

где $\varphi_z \in SL(2,\mathbf{R})$ и $d\nu_H$ — инвариантная мера Хаара на $SL(2,\mathbf{R})$.

Для $SL(2,\mathbf{R})$ инвариантных подынтегральных выражений $\Psi(h)$ (как в случае SYK-статсуммы [10] и SYK-корреляторов [12]) знаменатель пропорционален регуляризованному объему группы $SL(2,\mathbf{R})$, явно вычисленному в [11]:

$$V^{\alpha}_{SL(2,R)} = \int\limits_{SL(2,\,R)} \exp\left\{ -\frac{2\left[\pi^2-\alpha^2\right]}{\sigma^2} \int\limits_0^1 (\varphi'(t))^2\, dt \right\} d\nu_H =$$

$$= \frac{\pi\sigma^2}{\pi^2-\alpha^2} \exp\left\{ -\frac{2\left(\pi^2-\alpha^2\right)}{\sigma^2} \right\}.$$

Для $SL(2,\mathbf{R})$ неинвариантных подынтегральных выражений $\Psi(h)$ вид сингулярности при $\alpha \to \pi - 0$ может быть различным [11], но в любом случае сингулярности в числителе и знаменателе взаимно сокращаются в (10).

Продемонстрируем теперь кратко, как используется квазиинвариантность меры для явного вычисления функциональных интегралов (детали см. в [12]). В качестве первого шага удобно представить функциональные интегралы по группе $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$ как интегралы по группе $\mathrm{Diff}^1_+([0,1])$ со склеенными концами отрезка $[0,\,1]\,(\varphi'(0)=\varphi'(1))$. В [11] мы доказали следующее равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+(S^1)} F(h)\mu_\sigma(dh)=\int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])}\delta\left(\frac{h'(1)}{h'(0)}-1\right)F(h)\,\mu_\sigma(dh). \quad (11)$$

Квазиинвариантность меры (3) относительно левого действия подгруппы $\mathrm{Diff}^3_+([0,\,1])$ $(g\circ h,\ g\in\mathrm{Diff}^3_+([0,\,1]),\ h\in\mathrm{Diff}^1_+([0,\,1]))$ записывается [8,9] как

$$\int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])} F(\tilde h)\mu_\sigma(d\tilde h)=\frac{1}{\sqrt{g'(0)g'(1)}}\int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])} F\left(g(h)\right)\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{g''(0)}{g'(0)}h'(0)-\frac{g''(1)}{g'(1)}h'(1)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_0^1\mathrm{Sch}\left\{g,\,h(t)\right\}\,\left(h'(t)\right)^2\,dt\right\}\mu_\sigma(dh). \quad (12)$$

Пусть функция g имеет вид

$$g(t)=g_\alpha(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tan(\alpha/2)}\tan\left(\alpha\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)+1\right]. \quad (13)$$

В этом случае

$$\left(g_\alpha^{-1}(h)\right)(t)=\frac{1}{\alpha}\arctan\left[\tan\frac{\alpha}{2}\,\left(2h(t)-1\right)\right]+\frac{1}{2}. \quad (14)$$

В результате (12) J^α преобразуется в интеграл

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha}\int\limits_{\mathrm{Diff}^1([0,1])}\exp\left\{\frac{4\,\sin^2(\alpha/2)}{\sigma^2}\left(h'(0)+h'(1)\right)\right\}\times$$

$$\times\,\Psi\left(g_\alpha^{-1}(h)\right)\,\delta\left(\frac{h'(1)}{h'(0)}-1\right)\mu_\sigma(dh), \quad (15)$$

который сводится к обычным интегралам описанным в [12] методом.

2. ФАКТОРИЗАЦИЯ МЕРЫ НА $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$

В этом разделе мы факторизуем меру на $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$

$$\tilde\mu_\sigma(dh)=\nu_H(d\varphi)\tilde\mu^X_\sigma(df) \quad (16)$$

и продемонстрируем тем самым, что как пространство интегрирования $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)$ эквивалентно декартову произведению

$$\mathrm{Diff}^1_+(S^1) \cong SL(2,\mathbf{R}) \times X, \quad X = \mathrm{Diff}^1_+(S^1)/SL(2,\mathbf{R}).$$

Сначала возьмем 3 точки на окружности $t_k = k/3$, $k = 0,1,2$, и представим интеграл (8) как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int d\tau_0\, d\tau_1\, d\tau_2 \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+(S^1)} \Psi(h) \prod_{k=0,\,1,\,2} \delta\left(h(t_k) - \tau_k\right) \tilde{\mu}_\sigma(dh). \tag{17}$$

Фиксируем теперь 3 параметра $SL(2,\mathbf{R})$, полагая $\varphi_\tau(t_k) = \tau_k$, где τ_k фиксированы. Используя равенство

$$\delta\left(\varphi_\tau(f(t_k)) - \tau_k\right) = \frac{1}{\varphi'_\tau(t_k)} \delta\left(f(t_k) - t_k\right),$$

преобразуем интеграл (17) к виду

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int \prod_{i=0,\,1,\,2} \frac{d\tau_i}{\varphi'_\tau(t_i)} \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+(S^1);\, SL(2,R)\ \text{gauge fixed}} \times$$
$$\times\, \Psi(\varphi_\tau \circ f) \prod_{k=0,\,1,\,2} \delta\left(f(t_k) - t_k\right) \tilde{\mu}_\sigma(df). \tag{18}$$

Удобно рассматривать следующую реализацию $SL(2,\mathbf{R})$:

$$\varphi_\tau(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccot}\{A \cot(\pi t - \pi\theta) + B\}, \tag{19}$$

где 3 параметра A, B, θ связаны с τ_0, τ_1, τ_2.

В терминах параметров A, B, θ мера $\prod\limits_{i=0,1,2} d\tau_i/\varphi'_\tau(t_i)$ в (18) записывается как

$$\mathrm{const}\, \frac{dB\, dA}{A^2}\, d\theta,$$

что есть мера Хаара $SL(2,\mathbf{R})\, \nu_H(d\varphi)$ [18].

Итак, интеграл (18) выглядит как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{SL(2,R)} \nu_H(d\varphi) \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+(S^1);\, SL(2,R)\ \text{gauge fixed}} \times$$
$$\times\, \Psi(\varphi_\tau \circ f) \prod_{k=0,1,2} \delta\left(f(t_k) - t_k\right) \tilde{\mu}_\sigma(df). \tag{20}$$

И при $SL(2,\mathbf{R})$ инвариантных подынтегральных выражениях $\Psi(\varphi_\tau \circ f) = \Psi(f)$ факторизуется:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{SL(2,R)} \nu_H(d\varphi) \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+(S^1)/SL(2,R)} \Psi(f) \prod_{k=0,1,2} \delta\left(f(t_k) - t_k\right) \tilde{\mu}_\sigma(df). \tag{21}$$

Заметим, что мы могли бы положить параметр τ_0 (и, соответственно, параметр θ) равными нулю с самого начала. Этот выбор фиксирует точку 0 на единичной окружности.

Обратимся теперь к интегралу по фактор-пространству:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+(S^1)/SL(2,R)} \Psi(f) \prod_{k=0,1,2} \delta\left(f(t_k) - t_k\right) \tilde{\mu}_\sigma(df) =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])} \Psi(f)\delta\left(f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\right) \delta\left(f\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\right) \delta\left(\frac{f'(1)}{f'(0)} - 1\right) \tilde{\mu}_\sigma(df). \tag{22}$$

Разобьем отрезок $[0,1]$ на 3 части: $[0,1/3]$, $[1/3,\,2/3]$, $[2/3,1]$ — и представим функцию f как

$$f(t) = \frac{1}{3} f_1(3t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}; \quad f(t) = \frac{1}{3}\left[1 + f_2(3t-1)\right], \quad \frac{1}{3} \leqslant t \leqslant \frac{2}{3};$$

$$f(t) = \frac{1}{3}\left[2 + f_3(3t-2)\right], \quad \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1. \quad f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{Diff}^1_+([0,1]).$$

Используя развитую в [12] технику, получим сразу

$$\mu_\sigma(df) = \mu_{\sigma/\sqrt{3}}(df_1)\, \mu_{\sigma/\sqrt{3}}(df_2)\, \mu_{\sigma/\sqrt{3}}(df_3)$$

и

$$\delta\left(f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2} f_1'(1)\, \delta(f_2'(0) - f_1'(1)),$$

$$\delta\left(f\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\right) = 6 f_2'(1)\, \delta(f_3'(0) - f_2'(1)),$$

$$\delta\left(\frac{f'(1)}{f'(0)} - 1\right) = f_3'(1)\, \delta(f_1'(0) - f_3'(1)).$$

Таким образом, интеграл (22) записывается как

$$\int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])}\int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])}\int\limits_{\mathrm{Diff}^1_+([0,1])} \Psi(f_1,f_2,f_3) 3^3 f_1'(1) f_2'(1) f_3'(1)\times$$
$$\times\ \delta\left(f_2'(0)-f_1'(1)\right)\,\delta(f_3'(0)-f_2'(1))\,\delta(f_1'(0)-f_3'(1))\times$$
$$\times\ \exp\left\{\frac{2\pi^2}{3\sigma^2}\int\limits_0^1\left[\left(f_1'(t)\right)^2+\left(f_2'(t)\right)^2+\left(f_3'(t)\right)^2\right]dt\right\}\times$$
$$\times\,\mu_{\sigma/\sqrt{3}}(df_1)\,\mu_{\sigma/\sqrt{3}}(df_2)\,\mu_{\sigma/\sqrt{3}}(df_3). \quad (23)$$

Функциональное интегрирование в (23) методом, основанным на квазиинвариантности [12], очевидно приводит к несингулярному результату. (В этом случае $\alpha=\pi/3$, ср. (12)–(15).)

3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Явный вид меры на фактор-пространстве $\mathrm{Diff}^1_+(S^1)/SL(2,\mathbf{R})$

$$3^3 f_1'(1)\,f_2'(1)\,f_3'(1)\delta(f_2'(0)-f_1'(1))\,\delta(f_3'(0)-f_2'(1))\,\delta(f_1'(0)-f_3'(1))\times$$
$$\times\ \exp\left\{\frac{2\pi^2}{3\sigma^2}\int\limits_0^1\left[\left(f_1'(t)\right)^2+\left(f_2'(t)\right)^2+\left(f_3'(t)\right)^2\right]dt\right\}\times$$
$$\times\,\mu_{\sigma/\sqrt{3}}(df_1)\,\mu_{\sigma/\sqrt{3}}(df_2)\,\mu_{\sigma/\sqrt{3}}(df_3) \quad (24)$$

получен в настоящей работе впервые. (См., например, [19], замечание 7 на с. 9.)

Данная статья дополняет предыдущие исследования правил шварциановского функционального интегрирования [10–12]. Вместе с развитой там регулярной техникой вычисления функциональных интегралов полученный в этой работе результат дает новые возможности для изучения широкого класса теорий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sachdev S., Ye J.* Gapless Spin Fluid Ground State in a Random Quantum Heisenberg Magnet // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3339; arXiv:cond-mat/9212030.
2. *Kitaev A.* A Simple Model of Quantum Holography. Talks at KITP, April and May 2015; http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev/; http://online.kitp.ucsb.edu/online/entangled15/kitaev2/.

3. *Maldacena J., Stanford D.* Remarks on the Sachdev–Ye–Kitaev Model // Phys. Rev. D. 2016. V. 94. P. 106002; arXiv:1604.07818.
4. *Jevicki A., Suzuki K., Yoon J.* Bi-Local Holography in the SYK Model // JHEP. 2016. V. 07, No. 007; arXiv:1603.06246.
5. *Jensen K.* Chaos in AdS_2 Holography // Phys. Rev. Lett. 2016. V. 117. P. 111601; arXiv:1605.06098.
6. *Maldacena J., Stanford D., Yang Z.* Conformal Symmetry and Its Breaking in Two-Dimensional Nearly Anti-de-Sitter Space // PTEP. 2016. V. 12. P. 12C104; arXiv:1606.01857.
7. *Kitaev A., Suh S. J.* The Soft Mode in the Sachdev–Ye–Kitaev Model and Its Gravity Dual // JHEP. 2018. V. 05, No. 183; arXiv:1711.08467.
8. *Shavgulidze E. T.* An Example of a Measure Quasi-Invariant with Respect to the Action of a Group of Diffeomorphisms of the Circle // Funct. Anal. Appl. 1978. V. 12. P. 203.
9. *Shavgulidze E. T.* Some Properties of Quasi-Invariant Measures on Groups of Diffeomorphisms of the Circle // Russ. J. Math. Phys. 2000. V. 7. P. 464.
10. *Belokurov V. V., Shavgulidze E. T.* Exact Solution of the Schwarzian Theory // Phys. Rev. D. 2017. V. 96. P. 101701(R); arXiv:1705.02405.
11. *Belokurov V. V., Shavgulidze E. T.* Correlation Functions in the Schwarzian Theory // JHEP. 2018. V. 11, No. 036; arXiv:1804.00424.
12. *Belokurov V. V., Shavgulidze E. T.* Schwarzian Functional Integrals Calculus. arXiv:1908.10387v2.
13. *Bagrets D., Altland A., Kamenev A.* Sachdev–Ye–Kitaev Model As Liouville Quantum Mechanics // Nucl. Phys. B. 2016. V. 911. P. 191; arXiv:1607.00694.
14. *Mertens T. G., Turiaci G. J., Verlinde H. L.* Solving the Schwarzian via the Conformal Bootstrap // JHEP. 2017. V. 08, No. 136; arXiv:1705.08408.
15. *Kitaev A., Suh S. J.* Statistical Mechanics of a Two-Dimensional Black Hole // JHEP. 2019. V. 05, No. 198; arXiv:1808.07032.
16. *Yung Zh.* The Quantum Gravity Dynamics of near Extremal Black Holes // JHEP. 2019. V. 05, No. 205; arXiv:1809.08647.
17. *Iliesiu L. V., Pufu S. S., Verlinde H., Wang Y.* An Exact Quantization of Jackiw–Teitelboim Gravity. arXiv:1905.02726.
18. *Lang S.* $SL_2(\mathbf{R})$. Reading, MS; Sydney: Addison-Wesley Publ., 1975 (рус. пер.: *Ленг С.* $SL_2(\mathbf{R})$. М.: Мир, 1977).
19. *Stanford D., Witten E.* Fermionic Localization of the Schwarzian Theory // JHEP. 2017. V. 10, No. 008; arXiv:1703.04612.
20. *Belokurov V. V., Shavgulidze E. T.* Unusual View of the Schwarzian Theory // Mod. Phys. Lett. A. 2018. V. 33. P. 1850221; arXiv:1806.05605.
21. *Белокуров В. В., Шавгулидзе Е. Т.* Полярное разложение меры Винера: Шварциановская теория в сравнении с конформной квантовой механикой // ТМФ. 2019. Т. 200, № 3. С. 465; arXiv:1812.04039.