ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 556–567

СУПЕРКОНФОРМНЫЕ ИНДЕКСЫ, ДУАЛЬНОСТИ ЗАЙБЕРГА И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

В. П. Спиридонов *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва

Кратко описывается связь между теорией специальных функций, с одной стороны, и суперконформными индексами и дуальностями Зайберга для четырехмерных $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теорий поля, с другой стороны.

This is a brief account of relations between the theory of special functions, on the one side, and superconformal indices and Seiberg dualities of four-dimensional $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric gauge field theories, on the other side.

PACS: 11.25.Tq; 11.30.Pb; 11.25.Hf

Памяти Ричарда Аски

ОБЫЧНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Поскольку это мемориальная конференция, я решил сделать презентацию, частично привязанную к истории событий. Очевидно, что история темы, указанной в названии доклада, начинается с теории специальных функций. Конкретно, необходимо вернуться во времена Исаака Ньютона, когда физика и математика формировали единую науку и не были разделены в той степени, как мы видим это сейчас. Среди своих многочисленных великих достижений в 1665 г. Ньютон доказал биномиальную теорему

$$ {}_1F_0(a;x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n = (1-x)^{-a}, \quad a, x \in \mathbb{C}, \quad |x| < 1, \tag{1} $$

где $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ в настоящее время называется символом Похгаммера. На самом деле он установил это простейшее тождество

*E-mail: spiridon@theor.jinr.ru

для гипергеометрических функций при дробных значениях a и его главное достижение состояло в работе с бесконечным рядом.

Основное развитие теории специальных функций гипергеометрического типа произошло в трудах Леонарда Эйлера [1] (я использую этот учебник в качестве основного источника исторических данных). Из огромного списка его прославленных открытий можно выделить следующие: с 1729 г. он последовательно ввел гамма-функцию $\Gamma(x)$,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt, \quad \mathrm{Re}\,(x) > 0, \tag{2}$$

бета-функцию (интеграл) $B(x,y)$,

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \mathrm{Re}\,(x),\ \mathrm{Re}\,(y) > 0, \tag{3}$$

и ключевую гипергеометрическую ${}_2F_1$-функцию,

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n} x^n, \quad |x| < 1. \tag{4}$$

Интегральное представление Эйлера

$${}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a}\,dt, \tag{5}$$

где $\mathrm{Re}\,(c) > \mathrm{Re}\,(b) > 0$ и $x \notin [1,\infty[$, мгновенно вытекает из разложения множителя $(1-xt)^{-a}$ в подынтегральной функции в ряд Тейлора согласно формуле (1) и использования точной формулы интегрирования (3).

Гаусс (1812), Куммер (1836), Риман (1857), Барнс (1908) детально исследовали свойства ${}_2F_1$-функции [1]. В частности, гипергеометрическое уравнение (рассмотренное Эйлером еще в 1769 г.), которому она удовлетворяет:

$$x(1-x)y''(x) + (c-(a+b+1)x)y'(x) - aby(x) = 0.$$

Широкая популярность этого уравнения объясняется тем фактом, что оно представляет собой вполне геометрический объект — общее дифференциальное уравнение второго порядка с тремя регулярными сингулярными точками (фиксированными в $0, 1$ и ∞). Все разложения решений в ряды в этих сингулярных точках выражаются через ${}_2F_1$-функцию ($y(x) = {}_2F_1(a,b;c;x)$ является аналитическим решением вблизи точки $x=0$).

Что касается специальных функций многих переменных, я упомяну только многократный бета-интеграл, вычисленный Атле Сельбергом в 1944 г. [1]:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} |x_i - x_j|^{2\gamma} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha-1}(1-x_j)^{\beta-1}\, dx_j = \\ = \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+(j-1)\gamma)\Gamma(\beta+(j-1)\gamma)\Gamma(1+j\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+(N+j-2)\gamma)\Gamma(1+\gamma)}, \quad (6)$$

$$\mathrm{Re}\,(\alpha),\ \mathrm{Re}\,(\beta) > 0, \quad \mathrm{Re}\,(\gamma) > -\min\left(\frac{1}{n}, \frac{\mathrm{Re}\,(\alpha)}{n-1}, \frac{\mathrm{Re}\,(\beta)}{n-1}\right).$$

Он был предложен для некоторых теоретико-числовых нужд, но его наиболее важные приложения были найдены в математической физике: случайные матрицы, интегрируемые n-частичные проблемы, ортогональные многочлены многих переменных и т. д.

q-ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Опять систематическое рассмотрение второго уровня гипергеометрических функций было запущено Эйлером, который сконструировал в 1748 г. q-экспоненциальные функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(x;q)_\infty}, \quad |x|<1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n}(-x)^n = (x;q)_\infty, \quad |q|<1,$$

где произведение $(x;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-xq^k)$ известно в наше время как q-символ Похгаммера. Многие математики рассматривали обобщения этих точных формул суммирования. В частности, Роте, Коши, Гейне, Гаусс установили справедливость следующего тождества:

$${}_1\varphi_0(t;q,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t;q)_n}{(q;q)_n}\, x^n = \frac{(tx;q)_\infty}{(x;q)_\infty}, \quad |x|,\ |q|<1,$$

которое называется q-биномиальной теоремой. В 1847 г. Гейне сконструировал q-аналог ${}_2F_1$-функции

$${}_2\varphi_1(s,t;w;q,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s;q)_n(t;q)_n}{(q;q)_n(w;q)_n}\, x^n,$$

такой что

$$ {}_2\varphi_1(q^a, q^b; q^c; q, x) \to {}_2F_1(a, b; c; x) \text{ для } q \to 1. \tag{7} $$

Теория гипергеометрических функций развивалась более чем 300 лет на следующих двух классах примеров:

$$ {}_{r+1}F_r\left(\begin{matrix} u_1, \ldots, u_{r+1} \\ v_1, \ldots, v_r \end{matrix}; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u_1)_n \cdots (u_{r+1})_n}{n!(v_1)_n \cdots (v_r)_n}\, x^n $$

и

$$ {}_{r+1}\varphi_r\left(\begin{matrix} t_1, \ldots, t_{r+1} \\ w_1, \cdots, w_r \end{matrix}; q, x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t_1; q)_n \cdots (t_{r+1}; q)_n}{(q; q)_n (w_1; q)_n \ldots (w_r; q)_n}\, x^n, $$

совместно с их расширениями на функции многих переменных в обеих формах — и в виде рядов, и в виде интегралов. В 1980-х гг. некоторые ученые высказывали мнение, что не существует хороших специальных функций гипергеометрического типа помимо этих классов. Поэтому на рубеже тысячелетий явилось очень большим сюрпризом открытие следующих функций.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ [2, 3]

Что является в настоящее время вершинами обобщений биномиальной теоремы, бета-интеграла Эйлера и т. д., и где они были найдены? Мне повезло сделать один из ключевых вкладов в ответ на этот вопрос во время работы в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ *. А именно, в 2000 г. был открыт эллиптический бета-интеграл и он был точно вычислен в результате доказательства следующей теоремы [4].

Теорема. *Пусть* $p, q, t_j \in \mathbb{C}$, $|p|, |q|, |t_j| < 1$ *и* $\prod_{j=1}^{6} t_j = pq$. *Тогда*

$$ \frac{(p;p)_\infty (q;q)_\infty}{4\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\prod_{j=1}^{6} \Gamma(t_j z^{\pm 1}; p, q)}{\Gamma(z^{\pm 2}; p, q)} \frac{dz}{z} = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant 6} \Gamma(t_j t_k; p, q), \tag{8} $$

*Здесь необходимо упомянуть, что я являюсь членом школы Н. Н. Боголюбова, начиная с учебы в 1982 г. в аспирантуре при кафедре квантовой статистики и теории поля физического факультета Московского государственного университета. Научными руководителями моей кандидатской диссертации были В. А. Матвеев и К. Г. Четыркин — члены этой школы предыдущего поколения.

где $\mathbb{T}$ обозначает единичную окружность и обе стороны равенства сконструированы из эллиптической гамма-функции

$$\Gamma(z;p,q) := \prod_{j,k=0}^{\infty} \frac{1-z^{-1}p^{j+1}q^{k+1}}{1-zp^jq^k}, \quad |p|,|q|<1,$$

согласно правилам

$$\Gamma(t_1,\ldots,t_k;p,q) := \Gamma(t_1;p,q)\cdots\Gamma(t_k;p,q),$$
$$\Gamma(tz^{\pm 1};p,q) := \Gamma(tz;p,q)\Gamma(tz^{-1};p,q).$$

Подынтегральная функция в (8) удовлетворяет линейному q-разностному уравнению первого порядка с коэффициентом, заданным специальной эллиптической функцией, что следует из генерирующего уравнения

$$\Gamma(qz;p,q) = \theta(z;p)\Gamma(z;p,q), \quad \theta(z;p) = (z;p)_\infty(pz^{-1};p)_\infty,$$

в котором $\theta(z;p)$ обозначает тета-функцию Якоби в специфической нормировке

$$\theta(z;p) = \frac{1}{(p;p)_\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k p^{k(k-1)/2} z^k.$$

Соотношение (8) является уникальным и претендует на звание самой важной точной формулы вычисления однократного интеграла, найденной к настоящему времени. Это утверждение оправдывается следующими фактами.

• Тождество (8) является эллиптическим аналогом биномиальной теоремы.

• Эта формула представляет собой самый сложный известный однократный интеграл, обобщающий бета-интеграл Эйлера (который включает в себя и гауссовский интеграл).

• Этот интеграл определяет меру для двухиндексных биортогональных функций — наиболее общего класса специальных функций одной переменной, обладающих классическими свойствами [5].

• Он служит зародышем для всех эллиптических гипергеометрических интегралов, допускающих точное вычисление (включая эллиптический аналог интеграла Сельберга), и всей теории трансцендентных эллиптических гипергеометрических функций [2].

• Это соотношение доказывает явление конфайнмента в специальном секторе состояний простейшей $4d$ суперсимметричной теории поля (как равенство суперконформных индексов дуальных теорий) [6].

• Оно определяет эллиптическое преобразование Фурье [7] с замечательным свойством обращения [8]. Ключевое алгебраическое тождество, возникающее в соответствующей лемме Бейли, — это не что иное, как соотношение звезда–треугольник в операторной форме, которое совпадает с соотношением сплетания для генераторов группы перестановок [9]. Функциональная форма этого соотношения служит основополагающим тождеством для точно решаемых $2d$ спиновых решеточных систем типа модели Изинга [10].

Классические (би)ортогональные специальные функции

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{{}_2F_1} \begin{pmatrix}\text{Якоби,}\\ \text{1826}\end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d] & {}_2\varphi_1 \begin{pmatrix}\text{Роджерс,}\\ \text{1894}\end{pmatrix} \arrow[d] & \\
{}_3F_2 \begin{pmatrix}\text{Чебышев,}\\ \text{1875}\\ \text{Хан,}\\ \text{1949}\end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d] & {}_3\varphi_2 \begin{pmatrix}\text{Хан,}\\ \text{1949}\end{pmatrix} \arrow[d] & \\
{}_4F_3 \begin{pmatrix}\text{Рака,}\\ \text{1942}\\ \text{Вильсон,}\\ \text{1978}\end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d, "\text{Самодуальные ортогональные многочлены}"] & \boxed{{}_4\varphi_3} \begin{pmatrix}\text{Аски,}\\ \text{Вильсон,}\\ \text{1985}\end{pmatrix} \arrow[d] & \\
{}_9F_8 \begin{pmatrix}\text{Вильсон,}\\ \text{1978}\\ \text{Рахман,}\\ \text{1986}\end{pmatrix} \arrow[r] & {}_{10}\varphi_9 \begin{pmatrix}\text{Рахман,}\\ \text{1986}\\ \text{Вильсон,}\\ \text{1991}\end{pmatrix} \arrow[r] \arrow[d, "\text{Самодуальные биортогональные рациональные функции}"'] & \boxed{{}_{12}V_{11}} \begin{pmatrix}\text{Спиридонов,}\\ \text{Жеданов, 1999}\\ \text{Спиридонов, 2000}\end{pmatrix} \arrow[d] \\
 & {}_{10}\varphi_9 \times {}_{10}\varphi'_9 \arrow[r] & \boxed{{}_{12}V_{11} \times {}_{12}V'_{11}}
\end{tikzcd}
$$

Самодуальные биортогональные функции (Спиридонов, 2000)

КЛАССИЧЕСКИЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Раскроем шире некоторые из аргументов, приведенных выше. Сначала мы дадим явное определение совершенно уравновешенных эллиптических гипергеометрических рядов [2]:

$$
{}_{r+1}V_r(t_0; t_1, \ldots, t_{r-4}; q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta(t_0 q^{2n}; p)}{\theta(t_0; p)} \prod_{m=0}^{r-4} \frac{\theta(t_m)_n}{\theta(q t_0 t_m^{-1})_n} q^n, \tag{9}
$$

где $\theta(z)_n = \prod_{k=0}^{n-1} \theta(zq^k; p)$ обозначает эллиптический символ Похгаммера. Словосочетание «эллиптический ряд» в этом контексте означает, что параметры в (9) удовлетворяют условию балансировки $\prod_{k=1}^{r-4} t_k = t_0^{(r-5)/2} q^{(r-7)/2}$, которое гарантирует, что каждый член этого ряда является эллиптической функцией (мероморфной дважды периодической функцией) всех своих параметров. Однако бесконечная сумма эллиптических функций (9) в общем случае не сходится. Поэтому приходится ее обрывать наложением ограничения

$t_j = q^{-N}$, $N = 0, 1, \ldots$, для некоторого фиксированного j. Подобно предельному соотношению (7) для фиксированных параметров t_m

$$\lim_{p\to 0} {}_{r+1}V_r =$$
$$= \text{совершенно уравновешенный, сбалансированный } {}_{r-1}\varphi_{r-2}\text{-ряд}. \quad (10)$$

Сумма Френкеля–Тураева [11] определяет замкнутое выражение для обрывающегося ${}_{10}V_9$-ряда и является предельным случаем эллиптического бета-интеграла (8). Обрывающийся ${}_{12}V_{11}$-ряд возникает в решениях уравнения Янга–Бакстера IRF-типа [11] и уравнений пары Лакса для $2d$-цепочки с дискретным временем, обобщающей решетку Тоды [12]. Множество классических (би)ортогональных функций описано в приложенной схеме — расширении схемы Аски для ортогональных многочленов. Ее левый верхний угол принадлежит многочленам Якоби, определяемым обрывающимся ${}_2F_1$-рядом (4), которые ортогональны по отношению к мере (3). И это все, что описывается дифференциальными уравнениями в этом контексте. Наиболее общие классические ортогональные многочлены были найдены Аски и Вильсоном [13], и они определяются обрывающимся ${}_4\varphi_3$-рядом. Самодуальность означает, что эти многочлены удовлетворяют конечно-разностным уравнениям второго порядка по обеим переменным — и по степени многочленов, и по их аргументам, с одними и теми же коэффициентами (т. е. существует перестановочная симметрия между соответствующими переменными).

Эллиптические аналоги обычных и q-гипергеометрических классических специальных функций появляются естественным образом только на самом верхнем q-гипергеометрическом уровне. А именно, два специальных обрывающихся ${}_{12}V_{11}$-ряда образуют пару биортогональных рациональных функций, представляющих собой эллиптическое расширение q-многочленов Рака, как это описано в работе [12]. Соответствующее обобщение многочленов Аски–Вильсона было построено в работе [5]. Более того, на этом уровне возникает принципиально новое явление двухиндексной биортогональности (нерациональных!) функций, как указано в правом нижнем углу схемы. Эти наиболее общие классические функции также были открыты в ЛТФ ОИЯИ [5]. Представленная схема далеко не полная, поскольку в ней не отражены все возможные предельные переходы и потенциальные обобщения.

СУПЕРКОНФОРМНЫЙ ИНДЕКС

Четырехмерные минимальные суперконформные квантовые теории поля основаны на полной группе симметрий $G_{\rm st} \times G \times F$, где $G_{\rm st} = SU(2,2|1)$ является группой симметрии плоского пространства-времени, G обозначает группу локальной калибровочной инвариантности и F есть группа симметрий ароматов, описывающая глобальные внутренние симметрии. Супергруппа $SU(2,2|1)$ генерируется $J_i, \overline{J}_i$ (генераторы $SL(2,\mathbb{C})$-группы, или группы лоренцевых поворотов), $P_\mu, Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}$ (супертрансляции), $K_\mu, S_\alpha, \overline{S}_{\dot\alpha}$ (специальные суперконформные преобразования), H (дилатации) и R ($U(1)_R$-повороты). Выделим определенную пару суперзарядов, например $Q \propto \overline{Q}_1$, $Q^\dagger \propto \overline{S}_1$, и генераторы максимальной подалгебры Картана, коммутирующие с ними, $H - R/2$, J_3, и F_k (генераторы максимального тора F). Тогда имеем

$$Q^2 = (Q^\dagger)^2 = 0, \quad \{Q, Q^\dagger\} = 2\mathcal{H}, \quad \mathcal{H} = H - 2\overline{J}_3 - \frac{3R}{2}, \tag{11}$$

и суперконформный индекс определяется как след следующего оператора [14, 15]

$$I(p, q, y_k) = \mathrm{Tr}\Big((-1)^{\mathrm{F}} p^{\mathcal{R}/2+J_3} q^{\mathcal{R}/2-J_3}\, \mathrm{e}^{-\beta\mathcal{H}} \prod y_k^{F_k}\Big), \tag{12}$$

где $\mathcal{R} = H - R/2$, $(-1)^F$ обозначает $\mathbb{Z}_2$-градуирующий оператор и p, q, y_k являются фугитивностями (групповыми параметрами). Только BPS-состояния $Q|\psi\rangle = Q^\dagger|\psi\rangle = \mathcal{H}|\psi\rangle = 0$ могут давать ненулевые вклады в след, так что зависимость от параметра β сокращается. Эвристические вычисления приводят к матричному интегралу

$$I(y; p, q) = \int\limits_G d\mu(z)\, \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{ind}\left(p^n, q^n, z^n, y^n\right)\right), \tag{13}$$

где $\mu(z)$ обозначает меру Хаара для группы G и

$$\operatorname{ind}(p, q, z, y) = \frac{2pq - p - q}{(1-p)(1-q)} \chi_{\mathrm{adj}_G}(z) + \\ + \sum_j \frac{(pq)^{r_j} \chi_{R_F, j}(y) \chi_{R_G, j}(z) - (pq)^{1-r_j} \chi_{\bar{R}_F, j}(y) \chi_{\bar{R}_G, j}(z)}{(1-p)(1-q)}. \tag{14}$$

Здесь $\chi_{R_F,j}(y)$, $\chi_{\bar{R}_F,j}(y)$ и $\chi_{R_G,j}(z)$ — характеры соответствующих групповых представлений, описывающих поля, а $2r_j \in \mathbb{Q}$ — их R-заряды.

Для унитарной группы $SU(N)$, $z = (z_1, \ldots, z_N)$, $\prod\limits_{a=1}^{N} z_a = 1$,

$$\int\limits_{SU(N)} d\mu(z) = \frac{1}{N!} \int\limits_{\mathbb{T}^{N-1}} \Delta(z)\Delta(z^{-1}) \prod_{a=1}^{N-1} \frac{dz_a}{2\pi \mathrm{i} z_a},$$

$$\Delta(z) = \prod_{1 \leqslant a < b \leqslant N} (z_a - z_b).$$

ДУАЛЬНОСТЬ ЗАЙБЕРГА

Рассмотрим электромагнитную дуальность следующих $4d$ $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных теорий поля, высказанную в виде гипотезы Зайбергом в 1994 г. [16].

Электрическая теория (режим слабой связи): $G=SU(2)$, $F=SU(6)$, состав представлений/полей

1) векторное суперполе: $(\mathrm{adj},1)$, $\qquad \chi_{SU(2),\mathrm{adj}}(z)=z^2+z^{-2}+1$,

2) киральное суперполе: (f,f), $\qquad \chi_{SU(2),f}(z)=z+z^{-1}, \quad r_f=1/6$,

$\chi_{SU(6),f}(y)=\sum_{k=1}^{6} y_k$, $\chi_{SU(6),\bar f}(y)=\sum_{k=1}^{6} y_k^{-1}$, $\prod_{k=1}^{6} y_k=1$.

Магнитная теория (сильная связь): $G=1$, $F=SU(6)$ с единственным полем/представлением T_A: $\Phi_{ij}=-\Phi_{ji}$,

$$\chi_{SU(6),T_A}(y)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6} y_iy_j, \qquad r_{T_A}=\frac{1}{3}.$$

Связь этих теорий с эллиптическим бета-интегралом была открыта Доланом и Осборном в 2008 г. [6]. Конкретнее, после явного вычисления суперконформных индексов этих теорий, I_E и I_M, и приравнивания их согласно гипотезе о дуальности Зайберга возникает в точности формула вычисления эллиптического бета-интеграла (8) в виде

$$I_E \text{ (выражение в левой части)} = I_M \text{ (выражение в правой части)}$$

с идентификацией параметров $t_k=(pq)^{1/6}y_k$, $k=1,\ldots,6$.

В общем случае точная вычислимость эллиптических гипергеометрических интегралов служит критерием конфайнмента в $4d$ $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных калибровочных теориях. При этом процесс вычисления интегралов имеет физический смысл перехода от режима слабой связи квантовой теории поля к режиму сильной связи. Среди множества концептуальных интерпретаций точных математических формул типа «$A=B$» этот пример, видимо, является наиболее ярким.

Общая дуальность Зайберга [16] имеет дело с намного более сложными теориями поля, описанными в приведенных ниже табл. 1 и 2, где adj, f и $\bar f$ обозначают присоединенное, фундаментальное и антифундаментальное представления, а последние два столбца содержат соответствующие значения зарядов для $U(1)$-групп.

Зайберг высказал гипотезу, что эти две неабелевы калибровочные теории эквивалентны друг другу в их инфракрасно стабильных точках при

Таблица 1. **Электрическая теория ($G = SU(N)$, $F = SU(M)_l \times SU(M)_r \times U(1)_B$, $\tilde{N} = M - N$)**

$SU(N)$	$SU(M)_l$	$SU(M)_r$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
f	f	1	1	$\tilde{N}/M$
$\overline{f}$	1	$\overline{f}$	-1	$\tilde{N}/M$
adj	1	1	0	1

Таблица 2. **Магнитная теория ($G = SU(\tilde{N})$, F та же самая)**

$SU(\tilde{N})$	$SU(M)_l$	$SU(M)_r$	$U(1)_B$	$U(1)_R$
f	$\overline{f}$	1	$N/\tilde{N}$	N/M
$\overline{f}$	1	f	$-N/\tilde{N}$	N/M
1	f	$\overline{f}$	0	$2\tilde{N}/M$
adj	1	1	0	1

$3N/2 < M < 3N$ (конформное окно). Эта гипотеза была доказана Доланом и Осборном [6] в секторе BPS-состояний с помощью математических теорем о свойствах симметрии специальных эллиптических гипергеометрических интегралов. Так, в подходящей параметризации электрический индекс принимает вид

$$I_E = \kappa_N \int_{\mathbb{T}^{N-1}} \frac{\prod_{i=1}^{M}\prod_{j=1}^{N} \Gamma(s_i z_j, t_i^{-1} z_j^{-1}; p, q)}{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \Gamma(z_i z_j^{-1}, z_i^{-1} z_j; p, q)} \prod_{j=1}^{N-1} \frac{dz_j}{2\pi \mathrm{i} z_j},$$

где $\prod_{j=1}^{N} z_j = 1$, $\kappa_N = (p;p)_\infty^{N-1} (q;q)_\infty^{N-1}/N!$. При этом магнитный индекс принимает вид

$$I_M = \kappa_{\tilde{N}} \prod_{i,j=1}^{M} \Gamma(s_i t_j^{-1}; p, q) \times$$
$$\times \int_{\mathbb{T}^{\widetilde{N}-1}} \frac{\prod_{i=1}^{M}\prod_{j=1}^{\tilde{N}} \Gamma(S^{1/N} s_i^{-1} x_j, T^{-1/N} t_i x_j^{-1}; p, q)}{\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant \widetilde{N}} \Gamma(x_i x_j^{-1}, x_i^{-1} x_j; p, q)} \prod_{j=1}^{\tilde{N}-1} \frac{dx_j}{2\pi \mathrm{i} x_j},$$

где $\prod_{j=1}^{\tilde{N}} x_j = 1$, $S = \prod_{i=1}^{M} s_i$, $T = \prod_{i=1}^{M} t_i$, $ST^{-1} = (pq)^{M-N}$.

Равенство $I_E = I_M$ в некоторых частных случаях было установлено или высказано в виде гипотезы в моих работах [4,5], и оно было доказано в самом общем виде Райнсом в [17].

Эллиптический аналог интеграла Сельберга был предложен в работе [18], а его связь с дуальностью типа Зайберга установлена в [19]. При $|p|, |q|, |t|$, $|t_m| < 1$ и $t^{2n-2}\prod_{m=1}^{6} t_m = pq$,

$$\frac{(p;p)_\infty^n (q;q)_\infty^n}{(4\pi\mathrm{i})^n n!}\int_{\mathbb{T}^n}\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n}\frac{\Gamma(tz_j^{\pm1}z_k^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_j^{\pm1}z_k^{\pm1};p,q)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\prod_{m=1}^{6}\Gamma(t_m z_j^{\pm1};p,q)}{\Gamma(z_j^{\pm2};p,q)}\frac{dz_j}{z_j} =$$
$$= \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\Gamma(t^j;p,q)}{\Gamma(t;p,q)}\prod_{1\leqslant m<s\leqslant 6}\Gamma(t^{j-1}t_m t_s;p,q)\right). \quad (15)$$

Систематический анализ [19] показал, что физика дуальностей типа Зайберга приводит к большому числу новых сложных математических гипотез (тождеств для специальных функций), в то время как математика эллиптических гипергеометрических интегралов генерирует множество новых электромагнитных дуальностей. В определенном смысле в рамках этой темы физика и математика снова работают рука об руку как единая наука. В качестве другого важного физического следствия я хотел бы упомянуть, что суперконформные индексы колчанных калибровочных теорий описывают статистические суммы $2d$ спиновых систем типа Изинга, для которых дуальность Зайберга служит условием интегрируемости [20].

В настоящее время вычисление суперсимметричных статистических сумм стало индустрией по производству тождеств для специальных функций с большим числом работников [21]. Я упомяну некоторые другие результаты: работа [22] имеет дело с приложениями к $2d$ топологическим теориям поля, работа [23] дает физическую интерпретацию $W(E_7)$-симметрии эллиптического аналога гипергеометрической функции Эйлера–Гаусса [2] в статье [24] высказана интригующая гипотеза о связи с некрасовскими инстантонными суммами, [25] содержит точное вычисление $4d$ суперсимметричных статистических сумм методом локализации, в интересной работе [26] дается более глубокая картина связей с $2d$ интегрируемыми системами в статистической механике, некоторые недавние развития сюжета отражены в статьях [27,28].

Сразу после этого доклада я написал свое последнее письмо Дику как часть коллекции «Liber Amicorum», приготовленной его многочисленными друзьями и вскоре подаренной ему, что было сделано исключительно своевременно.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории зеркальной симметрии НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ, договор № 14.641.31.0001.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andrews G. E., Askey R., Roy R.* Special Functions. Cambridge Univ. Press, 1999.
2. *Спиридонов В. П.* // УМН. 2008. Т. 63, № 3. С. 3.
3. *Rosengren H.* arXiv:1608.06161.
4. *Спиридонов В. П.* // УМН. 2001. Т. 56, № 1. С. 181.
5. *Spiridonov V. P.* // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, № 6. С. 161.
6. *Dolan F. A., Osborn H.* // Nucl. Phys. B. 2009. V. 818. P. 137.
7. *Спиридонов В. П.* // ТМФ. 2004. Т. 139. С. 104.
8. *Spiridonov V. P., Warnaar S. O.* // Adv. Math. 2006. V. 207. P. 91.
9. *Деркачев С. Э., Спиридонов В. П.* // УМН. 2013. Т. 68, № 6. С. 59.
10. *Bazhanov V. V., Sergeev S. M.* // ATMP. 2012. V. 16. P. 65.
11. *Frenkel I. B., Turaev V. G.* The Arnold–Gelfand Mathematical Seminars. Birkhäuser, 1997. P. 171.
12. *Spiridonov V. P., Zhedanov A. S.* // Commun. Math. Phys. 2000. V. 210. P. 49.
13. *Askey R., Wilson J.* // Mem. Amer. Math. Soc. 1985. V. 54, No. 319.
14. *Kinney J., Maldacena J. M., Minwalla S., Raju S.* // Commun. Math. Phys. 2007. V. 275. P. 209.
15. *Römelsberger C.* // Nucl. Phys. B. 2006. V. 747. P. 329; arXiv:0707.3702.
16. *Seiberg N.* // Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 6857; Nucl. Phys. B. 1995. V. 435. P. 129.
17. *Rains E. M.* // Ann. Math. 2010. V. 171. P. 169.
18. *van Diejen J. F., Spiridonov V. P.* // Math. Res. Lett. 2000. V. 7. P. 729.
19. *Spiridonov V. P., Vartanov G. S.* // Nucl. Phys. B. 2010. V. 824. P. 192; Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. P. 061603; Commun. Math. Phys. 2011. V. 304. P. 797; 2014. V. 325. P. 421; JHEP. 2012. V. 06. P. 016.
20. *Spiridonov V. P.* // Contemp. Math. 2012. V. 563. P. 181.
21. *Rastelli L., Razamat S. S.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. V. 50. P. 443013.
22. *Gadde A., Pomoni E., Rastelli L., Razamat S. S.* // JHEP. 2010. V. 03. P. 032.
23. *Dimofte T., Gaiotto D.* // JHEP. 2012. V. 10. P. 129.
24. *Gaiotto D., Kim H.-C.* // JHEP. 2017. V. 01. P. 019.
25. *Assel B., Cassani D., Martelli D.* // JHEP. 2014. V. 1408. P. 123.
26. *Yagi J.* // JHEP. 2015. V. 10. P. 065.
27. *Closset C., Kim H., Willett B.* // JHEP. 2017. V. 08. P. 090.
28. *Саркисян Г. А., Спиридонов В. П.* // Труды МИАН. 2020. Т. 309 (в печати); arXiv:1910.11747.