ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2022. Т. 53, вып. 2. С. 518–534

C-, P-, T-СИММЕТРИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА В ТЕОРИИ СУПЕРАЛГЕБРАИЧЕСКИХ СПИНОРОВ

В. В. Монахов *, *А. В. Кожедуб* **

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Показана связь C и T с операторами клиффордова комплексного сопряжения и клиффордова транспонирования, и из этого следует, что они могут быть точными симметриями только в явлениях, в которых фигурируют тензорные величины, или в тех, где участвуют только спиноры или только сопряженные спиноры. P, CT и CTP могут быть точными симметриями спиноров. Для электрически заряженных спиноров также существует оператор симметрии iQ. Это оператор отражения двух базисных клиффордовых векторов, соответствующих внутренним степеням свободы спиноров.

We have shown that C and T are related to the Clifford complex conjugation and Clifford transposition operators, and that they can be exact symmetries only in phenomena in which tensor quantities appear or in those where only spinors or only conjugated spinors are involved. P, CT and CTP can be exact symmetries of spinors. The symmetry operator iQ also exists for electrically charged spinors. This is operator of reflection of the two basis Clifford vectors corresponding to the internal degrees of freedom of spinors.

PACS: 03.65.Fd; 11.30.Er; 11.30.Ly

ВВЕДЕНИЕ

Квантование полей фермионов на основе канонических антикоммутационных отношений (CAR) ввели Джордан и Вигнер [1]. Математическое обоснование подход получил в работах [2–5]. В современном подходе алгебра канонических антикоммутационных соотношений (CAR-алгебра) рассматривается как основополагающая при описании свойств фермионов. Алгебра вторичного квантования бесконечномерна, и в ней существует бесконечное количество унитарно-неэквивалентных представлений [2, 3, 6]. Важнейшим из представлений CAR-алгебры является фоковское. Это единственное неприводимое представление CAR-алгебры, для которого существует вектор состояния вакуума [3].

* E-mail: v.v.monahov@spbu.ru

** E-mail: a.kojedub@spbu.ru

На основе принципов релятивистской ковариантности и постулатов локальности элементов C^*-алгебр в [6–8] был предложен подход, получивший название аксиоматической алгебраической квантовой теории поля. Мы предлагаем теорию суперрaлгебраических спиноров [9–14], которая является алгебраической квантовой теорией поля, развивающей теорию алгебраических спиноров [15]. Она позволяет явным образом построить вектор состояния вакуума в фоковском представлении и получить операторы поля фермионов, удовлетворяющие уравнению Дирака и его обобщениям, без использования каких-либо физических соображений. В данной работе показано применение этой теории для изучения свойств C-, P-, T-отражений, с обобщением преобразований группы Лоренца на внутренние степени свободы спиноров.

1. СООТНОШЕНИЯ CAR-АЛГЕБРЫ И ГАММА-ОПЕРАТОРЫ

В супералгебраическом представлении 4-спиноров в качестве базисных спиноров выступают грассмановы плотности $\theta^a(p)$ в импульсном пространстве и производные по ним $\partial/(\partial\theta^a(p))$, $a = 1, 2, 3, 4$ [9–14]. Они являются образующими CAR-алгебры, порождаемой антикоммутационными соотношениями

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^k(p)}, \theta^l(p')\right\} = \delta^l_k\delta(p - p'), \tag{1}$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta^k(p)}, \frac{\partial}{\partial\theta^l(p')}\right\} = \{\theta^k(p), \theta^l(p')\} = 0. \tag{2}$$

Произвольный спинор Ψ является линейной комбинацией базисных спиноров

$$\Psi = \int d^3p\left(\psi^\alpha(p)\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha(p)} + \psi^\tau(p)\theta^\tau(p)\right), \tag{3}$$

где $\psi^\alpha(p)$ — комплексные коэффициенты, $\alpha = 1, 2$; $\tau = 3, 4$. Условие нормировки

$$|\Psi|^2 = \int d^3p\left(|\psi^\alpha(p)|^2 + |\psi^\tau(p)|^2\right) = 1. \tag{4}$$

Грассманова плотность $\partial/(\partial\theta^\alpha(0))$ — оператор уничтожения покоящегося спинора, а $\theta^\alpha(0)$ — оператор рождения такого спинора. Грассмановым плотностям можно сопоставить матричные столбцы теории Дирака [9, 10, 13]

$$\frac{\partial}{\partial\theta^1(p)} \cong \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial\theta^2(p)} \cong \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \theta^3(p) \cong \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \theta^4(p) \cong \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Эрмитово сопряжение выражений (5) дает соответствие

$$\begin{aligned} \theta^1(p) &\cong (\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ), & \theta^2(p) &\cong (\ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ ), \\ \frac{\partial}{\partial\theta^3(p)} &\cong (\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ ), & \frac{\partial}{\partial\theta^4(p)} &\cong (\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ ). \end{aligned} \tag{6}$$

Инфинитезимальные преобразования базисных спиноров (5), (6), сохраняющие соотношения (1), (2) CAR-алгебры, приводят к преобразованиям операторов поля $\Psi(p)$ из (3) в $\Psi'(p)$ [11]

$$\Psi'(p) = \left(1 + i\widehat{\gamma}^a d\omega_a + \frac{1}{4}\widehat{\gamma}^{ab} d\omega_{ab}\right)\Psi(p), \tag{7}$$

где $d\omega_a$ и $d\omega_{ab} = -d\omega_{ba}$ — вещественные параметры преобразований; $\widehat{\gamma}^a = [\gamma^a, \bullet]$, $a = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ и $\widehat{\gamma}^{ab} = \widehat{\gamma}^a\widehat{\gamma}^b = -\widehat{\gamma}^b\widehat{\gamma}^a = [\gamma^{ab}, \bullet]$, $a \neq b$; $a, b = 0, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7$.

Оператор

$$\widehat{A} = [A, \bullet] \tag{8}$$

означает коммутатор. При этом A является линейной комбинацией элементов вида $\partial/(\partial\theta^i(p))\ \partial/(\partial\theta^j(p))$, $\partial/(\partial\theta^i(p))\,\theta^j(p)$, $\theta^i(p)\theta^j(p)$ и $\widehat{A}\Psi = [A, \bullet]\Psi = [A, \Psi] = A\Psi - \Psi A$.

Антикоммутирующие гамма-операторы $\widehat{\gamma}^a$ являются образующими алгебры Клифорда, которая определена при действии этих операторов на векторы поля спиноров.

В разложении (7) участвует оператор $\widehat{\gamma}^4 = i\widehat{\gamma}^5$, а не $\widehat{\gamma}^5$, и возникают дополнительные базисные клиффордовы векторы, гамма-операторы $\widehat{\gamma}^6$ и $\widehat{\gamma}^7$ [11–13]. Они не могут быть базисными векторами четырехмерного пространства-времени и соответствуют внутренним степеням свободы фермионов.

Гамма-операторы $\widehat{\gamma}^\mu = [\gamma^\mu, \bullet]$, $\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, являются аналогами матриц Дирака γ_D^μ [11]. Результат их действия на грассмановы плотности $\partial/(\partial\theta^1(p))$, $\partial/(\partial\theta^2(p))$, $\theta^3(p)$, $\theta^4(p)$ соответствует действию гамма-матриц Дирака на столбцы (5).

Лоренцев поворот $\exp(\widehat{\gamma}^{0k}\varphi_k)$, $k = 1,\ 2,\ 3$, преобразует оператор $\partial/(\partial\theta^\alpha(0))$ уничтожения покоящегося спинора в оператор $b_\alpha(p)$ уничтожения спинора с импульсом p. Это активное преобразование Лоренца — состояние с нулевым импульсом преобразуется в состояние с импульсом p. При этом φ_k — вещественные углы поворота 4-вектора от положения с пространственным импульсом 0 к положению с пространственным импульсом p.

Наиболее общий вид обобщенного дираковского сопряжения, обеспечивающий лоренц-ковариантность преобразования сопряженных спиноров, представим как

$$\overline{\Psi} = (M\Psi)^+, \tag{9}$$

где M — оператор, построенный из гамма-операторов [11]. Форма этого оператора однозначно задается сигнатурой пространства-времени. В случае сигнатуры (1, –1, –1, –1) он, как показано в [11], должен иметь вид

$$M = \lambda_1 \widehat{\gamma}^0 + \lambda_2 \widehat{\gamma}^0 \widehat{\gamma}^5, \tag{10}$$

где λ_1 и λ_2 — числовые коэффициенты. Выбором соответствующего представления супералгебраических спиноров можно добиться равенств

$$M = \mathrm{e}^{i\varphi} \widehat{\gamma}^0, \quad \overline{\Psi} = \mathrm{e}^{-i\varphi} (\widehat{\gamma}^0 \Psi)^+ = \mathrm{e}^{-i\varphi} (\bullet)^+ \widehat{\gamma}^0 \Psi. \tag{11}$$

Оператор $\overline{b_\alpha}(p)$ является оператором рождения спинора с импульсом p.

Требование, чтобы сопряженным с $\partial/(\partial\theta^a(0))$ оператором был $\theta^a(0)$, приводит к условию

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = 1. \tag{12}$$

Поэтому

$$M = \widehat{\gamma}^0, \tag{13}$$

$$\overline{\Psi} = (\widehat{\gamma}^0 \Psi)^+ = (\bullet)^+ \widehat{\gamma}^0 \Psi. \tag{14}$$

В соответствии с (13), (14) повторное сопряжение спиноров дает

$$\overline{\overline{\Psi}} = -\Psi. \tag{15}$$

Этот вариант рассматривался во всех наших предыдущих работах [9–14]. Однако из-за наличия внутренних степеней свободы супералгебраических спиноров возможен второй вариант обобщенного дираковского сопряжения, при котором оператор M отличен от (13). Для произвольного спинора Ψ и сопряженного спинора $\overline{\Psi}$

$$\widehat{Q}\Psi = \Psi, \quad \widehat{Q}\overline{\Psi} = -\overline{\Psi}, \tag{16}$$

где

$$\widehat{Q} = i\widehat{\gamma}^6 \widehat{\gamma}^7 \tag{17}$$

является генератором вращений в плоскости $\widehat{\gamma}^6$, $\widehat{\gamma}^7$.

В результате с учетом (16) помимо (13), (14) возможен вариант

$$M = \widehat{\gamma}^0 \widehat{Q} = i\widehat{\gamma}^0 \widehat{\gamma}^6 \widehat{\gamma}^7, \tag{18}$$

$$\overline{\Psi} = (\widehat{\gamma}^0 \widehat{Q} \Psi)^+ = (i\widehat{\gamma}^0 \widehat{\gamma}^6 \widehat{\gamma}^7 \Psi)^+. \tag{19}$$

При сопряжении спиноров эти варианты совпадают. Однако при повторном сопряжении в варианте (13), (14) выполняется (15), а в варианте (18), (19) выполняется

$$\overline{\overline{\Psi}} = \Psi. \tag{20}$$

Легко проверить, что вариант сопряжения (13), (14) не сохраняет соотношение (1) CAR-алгебры, и поэтому следует использовать вариант (18), (19).

В соответствии с [11] из (18), (19) следует, что в разложении (7) операторы $\widehat{\gamma}^6$ и $\widehat{\gamma}^7$ должны иметь положительную сигнатуру. Во всех предыдущих работах мы использовали вариант сопряжения (13), (14) и считали, что сигнатура $\widehat{\gamma}^6$ и $\widehat{\gamma}^7$ отрицательна. Это никак не сказывалось на полученных результатах. Однако в данной работе положительность их сигнатуры очень существенна, и мы будем использовать $\widehat{\gamma}^6 = i\widehat{\gamma}^{6\prime}$ и $\widehat{\gamma}^7 = -i\widehat{\gamma}^{7\prime}$, где $\widehat{\gamma}^{6\prime}$ и $\widehat{\gamma}^{7\prime}$ — это $\widehat{\gamma}^6$ и $\widehat{\gamma}^7$ из статей [11, 12]. При этом $\widehat{\gamma}^6\widehat{\gamma}^7 = \widehat{\gamma}^{6\prime}\widehat{\gamma}^{7\prime}$, и формула (17) для оператора $\widehat{Q}$ остается в силе.

Таким образом, для сигнатуры пространства-времени $(1, -1, -1, -1)$ оператор M в формуле (9) обобщенного дираковского сопряжения, сохраняющего CAR-алгебру, может быть приведен к виду $M = \widehat{\gamma}^0\widehat{Q}$ путем выбора соответствующего представления гамма-операторов (аналогов матриц Дирака). В работе [14] показано, что такой вариант сопряжения является эрмитовым сопряжением, которое мы обозначили как $\#$, для второго варианта скалярного произведения, $\overline{b_\alpha}(p) = b_\alpha(p)^{\#}$ и $b_\alpha(p)^{\#\#} = b_\alpha(p)$. Поэтому операторы рождения и уничтожения оказываются эрмитово-сопряженными друг относительно друга, как в обычной квантовой теории поля. Однако необходимо учитывать, что при преобразованиях, оставляющих одно из двух различных скалярных произведений инвариантным, второе не будет сохраняться.

2. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА ИМПУЛЬСОВ И СПИНОРНЫЕ ВАКУУМЫ

Дискретизация пространства импульсов проводится в соответствии с процедурой, описанной в [9] и [12]. Мы разбиваем пространство импульсов на сетку ячеек физически бесконечно малых объемов $\Delta^3 p_i$ и каждой ячейке приписываем конкретное дискретное значение импульса. При такой дискретизации правую часть (1) в соответствии с [9, 12] необходимо заменить на дискретное приближение дельта-функции Дирака $\delta(p_i - p_j) = (1/(\Delta^3 p_i))\delta^i_j$. При этом интегралы в формулах (3), (4) и т. д. превращаются в дискретные суммы. Вектор состояния вакуума

$$\Psi_V = \prod_i \Psi_V(p_i) \tag{21}$$

задается через локальные в пространстве импульсов множители

$$\Psi_V(p_i) = (\Delta^3 p_i)^4\, b_1(p_i)\, \overline{b}_1(p_i)\, b_2(p_i)\, \overline{b}_2(p_i)\, b_3(p_i)\, \overline{b}_3(p_i)\, b_4(p_i)\, \overline{b}_4(p_i). \tag{22}$$

Для $p = 0$ выражение такого множителя

$$\Psi_V(0) = (\Delta^3 p|_{p=0})^4\, \frac{\partial}{\partial\theta^1(0)}\theta^1(0)\frac{\partial}{\partial\theta^2(0)}\theta^2(0)\frac{\partial}{\partial\theta^3(0)}\theta^3(0)\frac{\partial}{\partial\theta^4(0)}\theta^4(0). \tag{23}$$

$\Psi_V(p_i)$ получаем из $\Psi_V(0)$ с помощью лоренцевых поворотов $\exp(\widehat{\gamma}^{0k}\varphi_k)$ каждого из множителей (23):

$$\begin{aligned} b_l(p_i) &= \exp(\widehat{\gamma}^{0k}\varphi_k)\frac{\partial}{\partial\theta^l(0)}\bigg|_{p=0\to p=p_i}, \\ \overline{b}_l(p_i) &= \exp(\widehat{\gamma}^{0k}\varphi_k)\theta^l(0)|_{p=0\to p=p_i}. \end{aligned} \tag{24}$$

Они обладают антикоммутационным соотношением CAR-алгебры, аналогичным соотношениям для $\partial/(\partial\theta^k(p_i))$ и $\theta^l(p_j)$ [9]:

$$\{b_k(p_i), \overline{b}_l(p_j)\} = \delta_k^l \frac{1}{\Delta^3 p_i}\delta_j^i, \tag{25}$$

$$\{b_k(p_i), b_l(p_j)\} = \{\overline{b}_k(p_i), \overline{b}_l(p_j)\} = 0. \tag{26}$$

Каждый множитель $\Psi_V(p_i)$ соответствует вакууму алгебраических спиноров [16]. Единственное отличие заключается в том, что он соответствует не всем спинорам, а только состояниям с импульсом p_i. Легко проверить, что $\Psi_V^{\#} = \Psi_V$ и $(\Psi_V)^2 = \Psi_V$.

Существует счетное бесконечное число неэквивалентных операторов вакуума. Достаточно заменить в формуле (21) в $\Psi_V(p_i)$ из (22) порядок следования произвольного числа множителей $b_\alpha(p_i)$ и $\overline{b}_\alpha(p_i)$. Такие векторы состояния вакуума Ψ_V алгебраически полностью эквивалентны, если считать изменившие порядок следования $b_\alpha(p_i)$ операторами рождения, а соответствующие операторы $\overline{b}_\alpha(p_i)$ — операторами уничтожения. В полном соответствии с [2] мы имеем бесконечное количество различных векторов состояния вакуума, только для одного из которых при заданном наборе операторов рождения и уничтожения имеет смысл оператор числа частиц. Однако задание данных векторов состояния вакуума в явном виде позволило обнаружить осмысленность всех этих векторов состояния вакуума, если не фиксировать заранее, являются ли образующие CAR-алгебры операторами рождения или операторами уничтожения. Вакуумы отличаются только ролью этих образующих: являются они операторами рождения или операторами уничтожения.

В теории алгебраических спиноров существуют различные трактовки дополнительных столбцов-спиноров, возникающих в ней дополнительно к теории Дирака. Проведенное рассмотрение показывает, что эти дополнительные спиноры принадлежат пространству с другим вакуумом, который не является фоковским вектором состояния для рассматриваемых операторов рождения и уничтожения спиноров. Вакуумные средние состояний, относящихся к нашей Вселенной, для этих вакуумов равны нулю. Поэтому состояния с альтернативными вакуумами можно считать относящимися к другим вселенным, не взаимодействующими с нашей.

3. ОПЕРАТОРЫ P И P_1 ПРОСТРАНСТВЕННОГО ОТРАЖЕНИЯ

Построение операторов сопряжения P, T, C обычно основано на физических соображениях [17–22]. При этом базисные векторы пространства-времени, т. е. базисные клиффордовы векторы, оставляют неизменными, а преобразуют координаты векторов. Такой подход удобен для тензорных величин, но плохо применим к спинорам при наличии у них внутренних степеней свободы, про которых неизвестно, как они влияют на результаты таких преобразований.

В данной работе используется другой подход. Мы рассматриваем активные линейные преобразования клиффордовых векторов, в том числе не только базисных векторов пространства-времени $\widehat{\gamma}^0$, $\widehat{\gamma}^1$, $\widehat{\gamma}^2$, $\widehat{\gamma}^3$, но и клиффордовых векторов $\widehat{\gamma}^4$, $\widehat{\gamma}^6$, $\widehat{\gamma}^7$, соответствующих внутренним степеням свободы спиноров. При таком преобразовании клиффордовы векторы, в том числе базисные, вращаются и отражаются (при несобственном преобразовании) вместе с выбранной системой координат. При этом компоненты векторов (координаты в данной системе координат) не меняются. Такое преобразование вектора X оператором A осуществляется по закону

$$V' = AXA^{-1}, \tag{27}$$

при этом спинор Ψ преобразуется как

$$\Psi' = A\Psi. \tag{28}$$

Для клиффордовых вращений существует произвол в числовом множителе в операторе A. Требование сохранения оператором A нормировки (4) и соотношений (25), (26) ограничивает его значениями 1 и -1.

Действие оператора (7) инфинитезимальных преобразований $1 + d\widehat{G} = 1 + [dG, \bullet]$ на оператор поля $\Psi_1\Psi_2\cdots\Psi_k$ k-частичного состояния задается формулой

$$(1 + d\widehat{G})\Psi_1\Psi_2\cdots\Psi_k = 1 + [dG, \Psi_1]\Psi_2\cdots\Psi_k + \Psi_1[dG, \Psi_2]\cdots\Psi_k + \ldots = \\ = (\mathrm{e}^{d\widehat{G}}\Psi_1)(\mathrm{e}^{d\widehat{G}}\Psi_2)\cdots(\mathrm{e}^{d\widehat{G}}\Psi_k), \tag{29}$$

где скобки ограничивают область действия операторов $\mathrm{e}^{d\widehat{G}}$.

Интегрирование (29) дает результат действия на $\Psi_1\Psi_2\cdots\Psi_k$ конечного оператора $\mathrm{e}^{\widehat{G}}$:

$$\mathrm{e}^{\widehat{G}}\,\Psi_1\Psi_2\cdots\Psi_k = (\mathrm{e}^{\widehat{G}}\,\Psi_1)(\mathrm{e}^{\widehat{G}}\,\Psi_2)\cdots(\mathrm{e}^{\widehat{G}}\,\Psi_k). \tag{30}$$

Преобразование (7) по построению сохраняет CAR-алгебру и переводит спиноры в алгебраически эквивалентные, т. е. является преобразованием симметрии. Поэтому и преобразование (30) является преобразованием симметрии. Видно, что оператор симметрии преобразует одновременно все множители в (30).

Если мы выберем $d\widehat{G} = i\widehat{\gamma}^0 d\omega_0$, то оператор $e^{\widehat{G}}$ превратится в $e^{i\widehat{\gamma}^0\omega_0} = \cos\omega_0 + i\widehat{\gamma}^0 \sin\omega_0$, где ω_0 — вещественная константа. Выберем $\omega_0 = \pi/2$. Тогда получим оператор симметрии $P_{i\widehat{\gamma}^0}$, который действует на одночастичное состояние так же, как коммутатор $i\widehat{\gamma}^0 = [i\gamma^0, \bullet]$:

$$P_{i\widehat{\gamma}^0}\Psi = i[\gamma^0, \Psi]. \tag{31}$$

Поэтому для одночастичных состояний $P_{i\widehat{\gamma}^0}$ и $i\widehat{\gamma}^0$ можно не различать. Однако при действии на произведение операторов поля $P_{i\widehat{\gamma}^0}$ действует на каждый из множителей:

$$P_{i\widehat{\gamma}^0}\Psi_1\Psi_2\cdots\Psi_k = i[\gamma^0, \Psi_1]\, i[\gamma^0, \Psi_2]\cdots i[\gamma^0, \Psi_k] = (P_{i\widehat{\gamma}^0}\Psi_1)(P_{i\widehat{\gamma}^0}\Psi_2)\cdots(P_{i\widehat{\gamma}^0}\Psi_k). \tag{32}$$

Оператор $P_{i\widehat{\gamma}^0}$ унитарен. Произвольный клиффордов вектор X преобразуется как

$$X' = P_{i\widehat{\gamma}^0} X P^{-1}_{i\widehat{\gamma}^0} = i\widehat{\gamma}^0 X(-i\widehat{\gamma}^0) = \widehat{\gamma}^0 X \widehat{\gamma}^0. \tag{33}$$

Из (33) сразу следует

$$\widehat{\gamma}^{0\prime} = \widehat{\gamma}^0, \quad \widehat{\gamma}^{k\prime} = -\widehat{\gamma}^k, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7. \tag{34}$$

Таким образом, оператор

$$P = P_{i\widehat{\gamma}^0} \tag{35}$$

отражает все базисные векторы, кроме $\widehat{\gamma}^0$, в том числе $\widehat{\gamma}^6$ и $\widehat{\gamma}^7$. То есть это оператор пространственного отражения, умноженного на оператор отражения осей $\widehat{\gamma}^6$ и $\widehat{\gamma}^7$.

Проводя аналогичные рассуждения для $d\widehat{G} = \widehat{\gamma}^{67} d\omega_{67} = -i\widehat{Q} d\omega_{67}$, получаем оператор симметрии $P_{-i\widehat{Q}}$, обеспечивающий отражение составляющих векторов вдоль осей $\widehat{\gamma}^6$ и $\widehat{\gamma}^7$ и оставляющий неизменными все остальные составляющие. В результате для оператора чисто пространственного отражения мы получаем выражение

$$P_1 = P_{i\widehat{\gamma}^0} P_{-i\widehat{Q}} = P_{\widehat{\gamma}^0\widehat{Q}}. \tag{36}$$

При этом оператор P_1 действует на каждый множитель аналогично оператору $P_{i\widehat{\gamma}^0}$ в (31), и то же относится к $P_{-i\widehat{Q}}$ и всем другим операторам преобразования симметрий.

Как оператор $P_{i\widehat{\gamma}^0}$ (или $P_{-i\widehat{\gamma}^0}$), так и оператор $P_{\widehat{\gamma}^0\widehat{Q}}$ можно считать оператором пространственного отражения. В операторе $P_{\widehat{\gamma}^0\widehat{Q}}$ знак фиксируется требованием, чтобы сопряженным с $\partial/(\partial\theta^a(0))$ оператором был $\theta^a(0)$, а для оператора P возможны варианты $P = P_{i\widehat{\gamma}^0}$ и $P = P_{-i\widehat{\gamma}^0}$. Далее мы будем указывать $P_{i\widehat{\gamma}^0}$, подразумевая при этом возможность наличия вместо него оператора $P_{-i\widehat{\gamma}^0}$. Различие между $P_{i\widehat{\gamma}^0}$ и $P_{\widehat{\gamma}^0\widehat{Q}}$ в том, что $P_{i\widehat{\gamma}^0}$ отражает не только пространственные оси $\widehat{\gamma}^1$, $\widehat{\gamma}^2$, $\widehat{\gamma}^3$, но и соответствующие внутренним степеням свободы оси $\widehat{\gamma}^6$, $\widehat{\gamma}^7$.

Операторы $\widehat{\gamma}^0$ и $-\widehat{\gamma}^0$ в отличие от обычной алгебры Клиффорда не являются равноправными, так как имеют разные знаки в правой части уравнений

$$\begin{gathered} \widehat{\gamma}^0 \frac{\partial}{\partial\theta^k(p_i)} = \frac{\partial}{\partial\theta^k(p_i)}, \\ (-\widehat{\gamma}^0)\frac{\partial}{\partial\theta^k(p_i)} = -\frac{\partial}{\partial\theta^k(p_i)}. \end{gathered} \tag{37}$$

Оператор $-\widehat{\gamma}^0$ ведет себя аналогично $\widehat{\gamma}^0$ только при замене операторов уничтожения на операторы рождения, так как

$$(-\widehat{\gamma}^0)\theta^k(p_i) = \theta^k(p_i), \quad \widehat{\gamma}^0\theta^k(p_i) = -\theta^k(p_i). \tag{38}$$

С учетом такой замены вакуум (21) должен быть заменен на альтернативный вакуум

$$\Psi_{\mathrm{alt}\,V} = \prod_i \Psi_{\mathrm{alt}\,V}(p_i), \tag{39}$$

где $\Psi_{\mathrm{alt}\,V}(p_i)$ соответствуют $\Psi_V(p_i)$ из формулы (22), в которых порядок множителей (операторов рождения и уничтожения) изменен на противоположный:

$$\Psi_{\mathrm{alt}\,V}(p_i) = (\Delta^3 p_i)^4\, \overline{b}_1(p_i)\, b_1(p_i)\, \overline{b}_2(p_i)\, b_2(p_i)\, \overline{b}_3(p_i)\, b_3(p_i)\, \overline{b}_4(p_i)\, b_4(p_i). \tag{40}$$

В соответствии с (39), (40) во Вселенной с вакуумом (39) роль операторов рождения и уничтожения меняется: операторы $\overline{b}_k(p_i)$ являются не операторами рождения, как для Вселенной с вакуумом (21), а операторами уничтожения. И операторы $b_k(p_i)$ являются не операторами уничтожения, а операторами рождения.

Рассмотрим вопрос об эквивалентности или неэквивалентности операторов $P_{i\widehat{\gamma}^0}$ и $P_{\widehat{\gamma}^0\widehat{Q}}$. Оператор $\widehat{Q}$ (17) является аналогом оператора электрического заряда в методе вторичного квантования и отличается от него только наличием коммутатора [10–12]. Калибровочное преобразование

$$\Psi' = \mathrm{e}^{i\widehat{Q}\varphi}\,\Psi = \mathrm{e}^{i\varphi}\,\Psi, \quad \overline{\Psi}' = \mathrm{e}^{i\widehat{Q}\varphi}\,\overline{\Psi} = \mathrm{e}^{-i\varphi}\,\overline{\Psi}, \tag{41}$$

где φ — произвольный вещественный параметр, обеспечивает перевод спиноров и антиспиноров в физически эквивалентные состояния, что при $\varphi = \pm\pi/2$ дает

$$\Psi' = i\widehat{Q}\Psi = i\Psi, \quad \overline{\Psi}' = i\widehat{Q}\overline{\Psi} = -i\overline{\Psi}. \tag{42}$$

Поэтому для электрически заряженных спиноров и антиспиноров умножение оператора поля на $i\widehat{Q}$ дает физически эквивалентное состояние, из-за чего операторы пространственного отражения $P_{i\widehat{\gamma}^0}$ и $P_{\widehat{\gamma}^0\widehat{Q}}$ для них физически эквивалентны. Однако, как будет показано далее, для *CTP*-сопряжения они неэквивалентны.

4. ОПЕРАТОР T_1 КЛИФФОРДОВА ОТРАЖЕНИЯ ОСИ ВРЕМЕНИ

Оператор $\widehat{\gamma}^{kl} = (1/2)(\widehat{\gamma}^k\widehat{\gamma}^l - \widehat{\gamma}^l\widehat{\gamma}^k)$, $k \neq l$, $k, l = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7$, как и в обычном формализме алгебр Клиффорда, является оператором отражения двух осей $\widehat{\gamma}^k$ и $\widehat{\gamma}^l$. В случае, когда сигнатура осей $\widehat{\gamma}^k$ и $\widehat{\gamma}^l$ совпадает, аналогично тому, как мы вводили оператор $P_{i\widehat{\gamma}^0}$, можно ввести оператор $P_{\widehat{\gamma}^{kl}}$, который действует на одночастичное состояние так же, как коммутатор $\widehat{\gamma}^{kl}$. Поэтому для одночастичных состояний $P_{\widehat{\gamma}^{kl}}$ и $\widehat{\gamma}^{kl}$ можно не различать. Но при действии на произведение операторов одночастичных состояний он действует одновременно на каждый из множителей. Операторы $P_{i\widehat{\gamma}^0}$ и $P_{\widehat{\gamma}^{kl}}$ имеют смысл только в рамках разложения (7). Они осмысленны только как результаты интегрирования преобразования (7), что приводит к уравнению (30), и одновременно преобразуют все операторы поля спиноров. То же относится к операторам преобразования Лоренца, поскольку они являются интегралами (30) инфинитезимальных преобразований (29).

Оператор $\lambda\widehat{\gamma}^{04}$ отражает ось времени и оставляет остальные оси неизменными. Он сохраняет соотношения CAR-алгебры только при $\lambda = \pm i$. Поэтому $P_{\pm\widehat{\gamma}^{05}}$ является оператором отражения оси времени. Будем называть его оператором T_1 клиффордова отражения оси времени. Покажем, что оператор $P_{\widehat{\gamma}^{05}}$ может быть оператором симметрии для векторных и тензорных величин, но не для спиноров. Рассмотрим унитарный инфинитезимальный оператор

$$U = \mathrm{e}^{idG} = 1 + idG = 1 + \widehat{\gamma}^{05} d\omega_{05}, \tag{43}$$

где $d\omega_{05}$ — бесконечно малый вещественный параметр.

Под действием оператора U спинор Ψ преобразуется как

$$\Psi' = U\Psi = (1 + \widehat{\gamma}^{05} d\omega_{05})\,\Psi. \tag{44}$$

При этом сопряженный спинор преобразуется как

$$\overline{\Psi}' = (\widehat{\gamma}^0(1 + \widehat{\gamma}^{05} d\omega_{05})\Psi)^+ = ((1 - \widehat{\gamma}^{05} d\omega_{05})\widehat{\gamma}^0\Psi)^+ = \\ = (1 - \widehat{\gamma}^{05} d\omega_{05})(\widehat{\gamma}^0\Psi)^+ = U^{-1}\overline{\Psi}. \tag{45}$$

Следовательно, $\overline{\Psi}$ преобразуется как

$$\overline{\Psi}' = U^{-1}\overline{\Psi} = U^+\overline{\Psi} = (1 - \widehat{\gamma}^{05} d\omega_{05})\,\overline{\Psi}, \tag{46}$$

что не соответствует закону преобразования (44) спинора. То есть U может рассматриваться как оператор только при отсутствии сопряженных спиноров $\overline{\Psi}$, поскольку он на них не может действовать. Ведь в рассматриваемой алгебре оператор должен действовать на все элементы одинаково, однако на сопряженные спиноры действует не U, а $U^{-1} = U^+$.

Результаты интегрирования преобразований (44) и (46) для конечного угла φ

$$\begin{aligned} \Psi' &= (\cos\varphi + \widehat{\gamma}^{05}\sin\varphi)\Psi, \\ \overline{\Psi}' &= (\cos\varphi - \widehat{\gamma}^{05}\sin\varphi)\overline{\Psi}. \end{aligned} \tag{47}$$

Из (47) получаем для $\varphi = \pi/2$

$$\Psi' = \widehat{\gamma}^{05}\Psi, \tag{48}$$

$$\overline{\Psi}' = -\widehat{\gamma}^{05}\overline{\Psi}. \tag{49}$$

В соответствии с (28) и (27) получаем как в случае (48), так и в случае (49)

$$\widehat{\gamma}^{0\prime} = -\widehat{\gamma}^{0}, \quad \widehat{\gamma}^{5\prime} = -\widehat{\gamma}^{5}, \quad \widehat{\gamma}^{k\prime} = \widehat{\gamma}^{k}, \quad k = 1,\, 2,\, 3,\, 6,\, 7. \tag{50}$$

Преобразованиям (48) и (5), несмотря на их различие в знаке, соответствуют одни и те же преобразования базисных клиффордовых векторов (50). Следовательно, при рассматриваемом варианте отражения оси времени

$$T_1 = P_{\widehat{\gamma}^{05}} \tag{51}$$

только сопряженные спиноры (49) преобразуются неправильным образом. А вот векторы и, следовательно, построенные из них тензоры при этом преобразуются правильным образом. То есть в макроскопическом мире, где все величины тензорные и спинорность величин не влияет на результаты измерений, отражение оси времени будет оператором симметрии.

Рассмотрим действие T_1 на оператор вакуума, считая, что $P_{\widehat{\gamma}^{05}}$ действует на сопряженный спинор либо как оператор $U = \widehat{\gamma}^{05}$, либо как $U^{-1} = -\widehat{\gamma}^{05}$. Оба этих варианта дают одинаковый вариант из-за того, что в Ψ_V из формулы (21) каждый множитель $\Psi_V(p_i)$ в соответствии с (22) содержит четное число множителей операторов поля сопряженных спиноров. Для $\Psi_V(0)$ из (23) находим

$$\begin{gathered} P_{\widehat{\gamma}^{05}}\Psi_V(0) = \Psi_{\mathrm{alt}\,V}(0), \\ \Psi_{\mathrm{alt}\,V}(0) = (\Delta^3 p|_{p=0})^4\, \theta^1(0)\frac{\partial}{\partial\theta^1(0)}\theta^2(0)\frac{\partial}{\partial\theta^2(0)}\theta^3(0)\frac{\partial}{\partial\theta^3(0)}\theta^4(0)\frac{\partial}{\partial\theta^4(0)}. \end{gathered} \tag{52}$$

Аналогично

$$P_{\widehat{\gamma}^{05}}\Psi_V(p_i) = \Psi_{\mathrm{alt}\,V}(p_i), \quad P_{\widehat{\gamma}^{05}}\Psi_V = \Psi_{\mathrm{alt}\,V}. \tag{53}$$

Как уже упоминалось, в $\Psi_{\mathrm{alt}\,V}(p_i)$ и в $\Psi_{\mathrm{alt}\,V}$ все множители реверсированы по отношению к $\Psi_V(p_i)$ и, соответственно, к Ψ_V. Для операторов $P_{i\widehat{\gamma}^{0a}}$, $a = 1,\, 2,\, 3,\, 6,\, 7$, которые помимо отражения оси $\widehat{\gamma}^a$ также отражают ось времени, действие на вакуум получается аналогичным. В результате действия этих операторов вакуум Ψ_V заменяется на альтернативный вакуум $\Psi_{\mathrm{alt}\,V}$, в котором последовательность умножения всех операторов рождения и уничтожения сменена на противоположную. Таким образом, оператор T_1 обращения времени приводит к замене вакуума на альтернативный $\Psi_{\mathrm{alt}\,V}$, который не эквивалентен вакууму Ψ_V. Для вакуума $\Psi_{\mathrm{alt}\,V}$ операторы рождения играют роль операторов уничтожения, а операторы уничтожения играют роль операторов рождения.

Аналогично доказывается, что операторами симметрии могут являться $P_{\widehat{\gamma}^{kl}}$, $k, l = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7$. А операторы $P_{i\widehat{\gamma}^{0a}}$, $a = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7$, которые помимо прочего приводят к отражению оси времени $\widehat{\gamma}^0$, унитарны, сохраняют соотношения CAR-алгебры, но не могут являться операторами симметрии для спиноров, в частности, оператор отражения оси времени $T_1 = P_{\widehat{\gamma}^{05}}$. Они могут соответствовать только приближенной симметрии, не затрагивающей сопряженные спиноры. Помимо прочего оператор T_1 меняет вакуум на альтернативный, в котором операторы рождения играют роль операторов уничтожения, а операторы уничтожения играют роль операторов рождения.

5. ОПЕРАТОРЫ ОТРАЖЕНИЯ ОСИ ВРЕМЕНИ T И ЗАРЯДОВОГО СОПРЯЖЕНИЯ C

Оператор транспонирования $(\bullet)^T$ меняет порядок всех множителей $\partial/(\partial\theta^a(p))$, $\theta^b(p')$ и преобразует $\partial/(\partial\theta^a(p))$ в $\theta^a(p)$, а $\theta^b(p')$ — в $\partial/(\partial\theta^b(p'))$. Легко показать [9, 12], что

$$\begin{aligned} &(\bullet)^T\widehat{\gamma}^a\Psi = -\widehat{\gamma}^a\Psi^T,\ a = 0,\ 2,\ 6, \\ &(\bullet)^T\widehat{\gamma}^b\Psi = \widehat{\gamma}^b\Psi^T,\ \ b = 1,\ 3,\ 7. \end{aligned} \tag{54}$$

Это означает, что оператор транспонирования $(\bullet)^T$ отражает оси $\widehat{\gamma}^0$, $\widehat{\gamma}^2$, $\widehat{\gamma}^6$ и не меняет другие базисные векторы алгебры Клиффорда. Умножив $(\bullet)^T$ на оператор $i\widehat{\gamma}^{26}$ отражения осей $\widehat{\gamma}^2$ и $\widehat{\gamma}^6$, получаем оператор отражения оси времени

$$T = i(\bullet)^T\widehat{\gamma}^{26} = i\widehat{\gamma}^{26}(\bullet)^T. \tag{55}$$

Формула (55) справедлива только для одночастичного случая. При наличии произведения одночастичных операторов ее необходимо заменить на

$$T = (\bullet)^T P_{i\widehat{\gamma}^{26}} = P_{i\widehat{\gamma}^{26}}(\bullet)^T. \tag{56}$$

При действии на одночастичные операторы поля действие оператора T совпадает с действием оператора T_1 клиффордова отражения оси времени. В частности, он сохраняет соотношения (1), (2) CAR-алгебры, именно для этого в формуле (55) введен множитель i. Кроме того, как и T_1, он дает для сопряженных спиноров противоположный знак по сравнению с тем, какой должен быть для согласованного с обобщенным дираковским сопряжением оператора. Поэтому он может быть оператором симметрии только для тензорных величин и либо только для спиноров, либо только для антиспиноров. Различие между T_1 и T в том, что при действии на произведение операторов поля T_1 не меняет их порядок, а T меняет их порядок на противоположный. Поэтому оператор T в отличие от T_1 оставляет вакуум инвариантным.

Оператор эрмитова сопряжения, как показано ранее, оставляет вакуум инвариантным, а он является произведением операторов транспозиции и комплексного сопряжения. Следовательно, оператор комплексного сопряжения также оставляет вакуум инвариантным. Операторы отражения всех осей, кроме оси времени, также оставляют вакуум инвариантным. Кроме оператора T_1 клиффордова отражения оси времени, никакой другой оператор не меняет вакуум на альтернативный. Следовательно, физически осмысленным является оператор отражения оси времени T, заданный в (55), а не T_1 из (51).

Унитарный оператор T_1 был введен Рака [25] и получил название «оператор обращения времени Рака» [26]. Вигнер [20, 21], Швингер [22] и Паули [26] рассматривали оператор T как антиунитарный. Однако операции комплексного сопряжения и транспонирования зависят от конкретного представления.

В рассматриваемом подходе операторы T_1 и T не содержат комплексного сопряжения и являются унитарными, а не антиунитарными. Напомним, что при отражении какой-либо оси $\widehat{\gamma}^a$ этот базисный клиффордов вектор меняется на $-\widehat{\gamma}^a$, но не меняют знак ни координата x_a, ни оператор импульса $i(\partial/\partial x^a)$, ни его собственные числа.

Операторы T_1 и T рассматривались Людерсом с соавторами [27], и ими было отмечено, что T_1 переводит представление CAR-алгебры спиноров в неэквивалентное и при этом, как было сказано авторами, обращает все одночастичное гильбертово пространство в нулевой вектор. По-видимому, этот ошибочный вывод был сделан из-за недостаточного понимания того, как оператор T_1 преобразует вакуум, и обнаружения факта, что операторы, считавшиеся для обычного вакуума операторами рождения, уничтожают вектор состояния вакуума. Также в работе [27] указывалось, что оператор T_1 унитарен, из чего делался вывод, что именно из-за этого он нефизичен. Как мы видели, его нефизичность связана с тем, что он преобразует вакуум в альтернативный.

Теперь рассмотрим оператор комплексного сопряжения. В алгебре Клиффорда он отличается от обычного комплексного сопряжения, в том числе используемого в матричной алгебре [15], и которое зависимо от представления. Он оставляет неизменными базисные клиффордовы векторы, даже если в рассматриваемом представлении они комплексны. Поэтому для тех операторов, которые в рассматриваемом представлении мнимые, при комплексном сопряжении требуется дополнительное преобразование, которое зеркально отражает эти оси [15]. В нашем случае мнимыми являются операторы $\widehat{\gamma}^2$ и $\widehat{\gamma}^7$. Поэтому оператор

$$C = P_{i\widehat{\gamma}^{27}}(\bullet)^* = -(\bullet)^* P_{i\widehat{\gamma}^{27}} \tag{57}$$

является оператором инвариантного (клиффордова) комплексного сопряжения. Множитель i введен для того, чтобы оператор C не нарушал соотношения (1), (2) CAR-алгебры. Он меняет операторы рождения и уничтожения спинора на операторы рождения и уничтожения антиспинора. При этом в результате действия оператора C меняется знак собственных чисел оператора заряда $\widehat{Q}$. Следовательно, C является оператором зарядового сопряжения. В рассматриваемом представлении он антиунитарен.

Рассмотрим согласованность оператора C с обобщенным дираковским сопряжением

$$\begin{aligned} &\Psi' = C\Psi = i\widehat{\gamma}^{27}\Psi^*, \\ &\overline{\Psi}' = (\widehat{\gamma}^0\widehat{Q}i\widehat{\gamma}^{27}\Psi^*)^+ = -i\widehat{\gamma}^0\widehat{\gamma}^{27}\Psi^T, \\ &\overline{\Psi}' = C\overline{\Psi} = i\widehat{\gamma}^{27}\left(\overline{\Psi}\right)^* = i\widehat{\gamma}^0\widehat{\gamma}^{27}\Psi^T, \end{aligned} \tag{58}$$

т. е. $\overline{\Psi}' = -\overline{\Psi}'$ и согласованности нет. Оператор зарядового сопряжения C дает для сопряженных спиноров противоположный знак по сравнению с тем, какой должен быть для согласованного оператора.

Оператор P сохраняет операторы рождения спиноров (антиспиноров) операторами рождения спиноров (антиспиноров), а операторы уничтожения спиноров (антиспиноров) — операторами уничтожения спиноров (антиспиноров). Кроме того, он сохраняет правильную частотность коэффициентов перед этими операторами.

Оператор T преобразует операторы рождения спиноров (антиспиноров) в операторы уничтожения антиспиноров (спиноров), а операторы уничтожения спиноров (антиспиноров) — в операторы рождения антиспиноров (спиноров). Он нарушает частотность коэффициентов перед этими операторами: для операторов уничтожения они становятся отрицательно-частотными, а для операторов рождения — положительно-частотными.

Оператор C преобразует операторы рождения спиноров (антиспиноров) в операторы рождения антиспиноров (спиноров), а операторы уничтожения спиноров (антиспиноров) — в операторы уничтожения антиспиноров (спиноров). Он также нарушает частотность коэффициентов перед этими операторами: для операторов уничтожения они становятся отрицательно-частотными, а для операторов рождения — положительно-частотными.

В соответствии с (56) и (57)

$$CT = -TC = P_{\widehat{\gamma}^{67}}(\bullet)^+ = P_{-i\widehat{Q}}(\bullet)^+ = (\bullet)^+ P_{-i\widehat{Q}}. \tag{59}$$

Оператор CT преобразует операторы рождения спиноров (антиспиноров) в операторы уничтожения этих спиноров (антиспиноров), а операторы уничтожения спиноров (антиспиноров) — в операторы рождения этих спиноров (антиспиноров). Он сохраняет правильную частотность коэффициентов перед этими операторами. Поскольку T и C сохраняют соотношения (1), (2) CAR-алгебры, CT также их сохраняет. Как T, так и C дают противоположный знак преобразованного сопряженного спинора по сравнению с согласованным вариантом. Поэтому оператор CT дает правильный знак и оказывается согласованным с обобщенным дираковским сопряжением. То есть он может являться оператором симметрии при одновременном наличии как спиноров, так и сопряженных спиноров.

Для оператора CTP с учетом (59) получаем

$$CTP = (\bullet)^{+} P_{\widehat{\gamma}^0 \widehat{Q}}, \quad CTP\,\Psi = \left(\widehat{\gamma}^0 \widehat{Q} \Psi\right)^{+}. \tag{60}$$

Оператор CTP сохраняет соотношения (1), (2) CAR-алгебры и согласован с операцией обобщенного дираковского сопряжения и поэтому может являться оператором симметрии. Он сохраняет правильную частотность и совпадает с оператором обобщенного дираковского сопряжения. То есть операция CTP — это просто преобразование из спинора в антиспинор и наоборот.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В связи со сказанным понятно нарушение в природе симметрий C и T. Они могут быть симметриями только в явлениях, в которых фигурируют тензорные величины, или в тех, где участвуют только спиноры или только сопряженные спиноры. В то же время P, CT и CTP в рамках проведенного рассмотрения могут быть точными симметриями.

Для электрически заряженных спиноров существует еще один оператор симметрии, $i\widehat{Q} = P_{-\widehat{\gamma}^{67}}$, который является оператором отражения базисных клиффордовых векторов $\widehat{\gamma}^6$ и $\widehat{\gamma}^7$.

Причина нарушения пространственной симметрии, из-за которой оператор P не является оператором точной симметрии, пока непонятна. Возможно, она связана со спонтанным нарушением симметрии [23, 24]. Однако полученный вывод о принципиальной невозможности точных симметрий C и T для спиноров и возможности таких симметрий для тензорных величин является весьма важным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jordan P., Wigner E. P.* Über das Paulische Äquivalenzverbot // Z. Phys. 1928. V. 47. P. 631–651.
2. *Gårding L., Wightman A.* Representations of the Anticommutation Relations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1954. V. 40. P. 617–621.

3. *Golodets V. Ya.* A Description of the Representation of Anticommutation Relations // Usp. Mat. Nauk. 1969. V. 24. P. 3–64.
4. *Araki H., Wyss W.* Representations of Canonical Anticommutation Relations // Helvetica Phys. Acta. 1964. V. 37. P. 136–159.
5. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965. 235 с.; *Berezin F. A.* The Method of Second Quantization. New York: Acad. Press, 1966.
6. *Haag R., Kastler D.* An Algebraic Approach to Quantum Field Theory // J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 848–861.
7. *Gelfand I. M., Naimark M. A.* On the Imbedding of Normed Rings into the Ring of Operators on a Hilbert Space // Matem. Sbornik. 1943. V. 12. P. 197–217.
8. *Segal I. E.* Irreducible Representations of Operator Algebras // Bull. Am. Math. Soc. 1947. V. 53. P. 73–88.
9. *Monakhov V. V.* Superalgebraic Structure of Lorentz Transformations // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. V. 1051. P. 012023.
10. *Monakhov V. V.* A Superalgebraic Form of the Dirac Equation // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2019. V. 83. P. 1173–1178.
11. *Monakhov V. V.* Generalization of Dirac Conjugation in the Superalgebraic Theory of Spinors // Theor. Math. Phys. 2019. V. 200. P. 1026–1042.
12. *Monakhov V.* Vacuum and Spacetime Signature in the Theory of Superalgebraic Spinors // Universe. 2019. V. 5. P. 162.
13. *Monakhov V. V.* Spacetime and Inner Space of Spinors in the Theory of Superalgebraic Spinors // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1557. P. 012031.
14. *Monakhov V. V.* Generation of Electroweak Interaction by Analogs of Dirac Gamma Matrices Constructed from Operators of the Creation and Annihilation of Spinors // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2020. V. 84. P. 1216–1220.
15. *Lounesto P.* Clifford Algebras and Spinors. Cambridge Univ. Press, 2001.
16. *Monakhov V. V.* Construction of a Fermionic Vacuum and the Fermionic Operators of Creation and Annihilation in the Theory of Algebraic Spinors // Phys. Part. Nucl. 2017. V. 48. P. 836–838.
17. *Streater R. F., Wightman A. S.* PCT, Spin and Statistics, and All That. New York: WA Benjamin, 1964.
18. *Weinberg S.* The Quantum Theory of Fields. V. 1: Foundations. Cambridge Univ. Press, 1995.
19. *Bjorken J. D., Drell S. D.* Relativistic Quantum Mechanics. New York: McGraw-Hill, 1965.
20. *Wigner E.* Über die Operation der Zeitumkehr in der Quantenmechanik. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse, 1932. P. 546–559.
21. *Wigner E.* Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra. New York: Acad. Press Inc., 1959.
22. *Schwinger J.* The Theory of Quantized Fields. I // Phys. Rev. 1951. V. 82. P. 914–927.
23. *Pati J. C., Salam A.* Lepton Number as the Fourth Color // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 275–289.
24. *Pati J. C.* Advantages of Unity with $SU(5)$-Color: Reflections through Neutrino Oscillations, Baryogenesis and Proton Decay // Intern. J. Mod. Phys. A. 2017. V. 32. P. 31–92.

25. *Racah G.* Sulla simmetria tra particelle e antiparticelle // Nuovo Cim. 1937. V. 14. P. 322–328.
26. *Pauli W.* Exclusion Principle, Lorentz Group and Reflection of Space-Time and Charge // Niels Bohr and the Development of Physics: Essays Dedicated to Niels Bohr on the Occasion of His Seventieth Birthday. London: Pergamon Press, 1955. P. 30–51.
27. *Grawert G., Lüders G., Rollnik H.* The TCP Theorem and Its Applications // Fortsch. Phys. 1959. V. 7. P. 291–328.