

ЭНЕРГИИ СВЯЗИ ЛЕГКИХ ГИПЕРЯДЕР

*М. В. Егоров**

Томский государственный университет, Томск, Россия
Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский
научно-исследовательский институт технической физики им. Е. И. Забабахина,
Снежинск, Россия

Легкие гиперядра играют роль естественной лаборатории по изучению YN - и NN -взаимодействий. Отталкивающий характер ΛN -взаимодействия приводит к тому, что возможные связанные состояния в гиперядрах возникают благодаря трехчастичному нуклон-гиперон-нуклонному взаимодействию. Ведущая роль в этом взаимодействии отводится конверсии $\Lambda N \rightarrow \Sigma N$ одного вида гиперонов в другой. В данной работе энергии связи легчайших гиперядер получаются путем решения однородного интегрального уравнения Фаддеева для трех частиц как с реалистичными, так и с модельными YN - и NN -потенциалами. Точно учитывается конверсия Λ - и Σ -гиперонов. Разработана технология численного решения однородного интегрального уравнения Фаддеева с тремя частицами различной массы для парных потенциалов в локальной форме. Приведена обобщенная на локальные потенциалы процедура приближенного решения интегральных уравнений методом Нойеса–Ковальского. Для ускорения численного счета введена и апробирована процедура четырехмерной сплайн-интерполяции найденных двухчастичных T -матриц. Численные расчеты энергий связи проведены как с зарядово-зависимыми сепарабельными потенциалами, так и с зарядово-зависимыми локальными потенциалами. Обсуждается влияние высших парциальных волн NN -потенциалов на энергию связи легких ядер. Полученные значения энергий связи простейших ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^3_\Lambda\text{H}$, ${}^3_\Lambda\text{He}$ находятся в хорошем согласии с имеющимися экспериментальными значениями. Дополнительно проведены четырехчастичные расчеты с парциально-волновым разложением используемых парных потенциалов. Показано, что развиваемый подход также может быть успешно применен для поиска энергий связи четырехчастичных гиперядер ${}^4_\Lambda\text{H}$, ${}^4_\Lambda\text{He}$.

Light hypernuclei play the role of a natural laboratory for the study of YN and NN interactions. The repulsive nature of the ΛN interaction leads to the fact that possible bound states in hypernuclei arise due to the three-body nucleon–hyperon–nucleon interaction. The leading role in this interaction is assigned to the conversion $\Lambda N \rightarrow \Sigma N$ of one type of hyperons to another. In this work the binding energies of light hypernuclei are obtained by solving the homogeneous Faddeev integral equation for three particles with both realistic and phenomenological YN and NN potentials. The conversion of Λ and Σ hyperons is exactly taken into account. A technology has been developed for the numerical solution of the homogeneous integral Faddeev equation with three particles of different masses for pair potentials in a local form. A procedure generalized to local

* E-mail: egorovphys@mail.ru

potentials for the approximate solution of integral equations by the Noyes–Kowalski method is presented. To speed up the numerical calculation, a procedure for four-dimensional spline interpolation of the found two-body T -matrices was introduced and tested. Numerical calculations of binding energies were carried out both with charge-dependent separable potentials and with charge-dependent local potentials. The influence of higher partial waves of NN potentials on the binding energy of light nuclei is discussed. The obtained values of the binding energies of the simplest nuclei ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^3_\Lambda\text{H}$, ${}^3_\Lambda\text{He}$ are in good agreement with the available experimental values. In addition, four-body calculations with a partial-wave expansion of the used pair potentials were carried out. It is shown that the developed approach can also be successfully applied to search for the binding energies of four-body ${}^4_\Lambda\text{H}$, ${}^4_\Lambda\text{He}$ hypernuclei.

PACS: 11.80.Jy; 13.75.Ev; 21.10.Dr

ВВЕДЕНИЕ

Исследование энергий отщепления гиперонов основных и возбужденных состояний легких гиперядер составляет неотъемлемую часть программы тестирования микроскопических барион-барионных взаимодействий [1]. В отличие от NN -взаимодействия в парном ΛN -взаимодействии обмен одним пионом запрещен законом сохранения изоспина. В результате этого в ΛN -взаимодействии доминирует обмен двумя пионами, обеспечивая конверсию $\Lambda N \rightarrow \Sigma N \rightarrow \Lambda N$. Сильное влияние ядерного окружения на энергию связи гиперона с ядром позволяет исследовать такие тонкие особенности гиперон-нуклонного (YN) взаимодействия, как немассовое поведение, нарушение зарядовой симметрии. Роль ядерного окружения для динамики парного YN -взаимодействия качественно можно оценить, принимая во внимание отсутствие парных связанных YN -состояний и наличие таковых в трехчастичных системах типа гипертритона ${}^3_\Lambda\text{H}$.

Важность корректного микроскопического рассмотрения малочастичной природы связи гиперона с ядром отмечалась ранее в многочисленных теоретических работах. В табл. 1 представлены предсказания энергий отщепления B_Λ -гиперонов в легких ядрах ${}^3_\Lambda\text{H}$, ${}^4_\Lambda\text{H}$ в некоторых различных теоретических подходах.

Результаты расчетов [2] и [3] показывают важность корректного учета конверсии $\Lambda N \rightarrow \Sigma N \rightarrow \Lambda N$. Исследование влияния различных

Таблица 1. Энергии отщепления гиперона в различных теоретических подходах для двух легчайших ядер

Гиперон	Эксперимент	[2]	[3]	Wonn [4]	Nijm'93 [4]	[5]	[6]	[6]	[7]
$B_\Lambda({}^3_\Lambda\text{H})$	$0,13 \pm 0,05$	Несвязанное состояние	0,13	0,155	0,143	0,13	—	—	0,147
$B_\Lambda({}^4_\Lambda\text{H})$	$2,04 \pm 0,04$	—	—	—	1,8	1,8	2,33	2,19	2,04

парных NN -потенциалов на энергии отщепления гиперонов проводилось в работе [4]. Показано, что локальный потенциал YN с мягкой сердцевиной SC'89 с локальным Nijm'93 NN -потенциалом дает лучшее согласие с экспериментальной энергией $B_{\Lambda}({}^3_{\Lambda}\text{H})$. Также в работе [4] отмечалось, что ни одна из современных на тот момент микроскопических моделей YN -потенциалов не позволяла воспроизвести энергии B_{Λ} одновременно для основных состояний гиперядер ${}^4_{\Lambda}\text{H}$ и ${}^4_{\Lambda}\text{He}$ в рамках корректного решения уравнений Фаддеева–Якубовского. Использование киральных YN -взаимодействий [5] также не позволяет одновременно корректно воспроизвести энергии $B_{\Lambda}({}^3_{\Lambda}\text{H})$ и $B_{\Lambda}({}^4_{\Lambda}\text{H})$. Расчеты с вариационным подходом с базисными функциями в виде гауссоид [6] не корректно воспроизводят энергии $B_{\Lambda}({}^4_{\Lambda}\text{H})$ при всех рассмотренных в работе предположениях. В [6] отмечается, что возможной причиной расхождения с опытом является отсутствие зарядово-зависимых слагаемых в использованных там YN -потенциалах. Недавние расчеты [7] с применением парциально-волнового разложения трех- и четырехчастичных интегральных уравнений Фаддеева и Фаддеева–Якубовского с использованием феноменологического YN -взаимодействия позволили корректно воспроизвести обе энергии $B_{\Lambda}({}^3_{\Lambda}\text{H})$ и $B_{\Lambda}({}^4_{\Lambda}\text{H})$. Однако сам подход ввиду ограниченности только связанными 3S_1 – 3D_1 -состояниями не позволяет оценивать эффект нарушения зарядовой симметрии, так как используемый в [7] зарядово-зависимый боннский NN -потенциал характеризуется зарядовой зависимостью только 1S_0 -волны. Других парциальных волн в сепарабельном боннском NN -потенциале, отражающих зарядовую зависимость, нет. Отметим также, что используемая в [7] формула для расчета энергии отщепления гиперона слишком груба, и расчет по точной формуле приводит к энергии $B_{\Lambda}({}^4_{\Lambda}\text{H}) \approx 7$ МэВ, что на 0,55 МэВ переоценивает экспериментальную энергию отщепления гиперона в ядре ${}^4_{\Lambda}\text{H}$.

В данной работе обобщим подход изначально [7] с использованием парциально-волнового разложения на локальные потенциалы на подход без использования парциально-волнового разложения. Известные на сегодняшний день локальные микроскопические YN -взаимодействия [8, 9] достаточно глубоко проработаны и непротиворечивым образом интегрированы в картину NN -взаимодействия [10]. Кроме того, зарядовая зависимость локальных потенциалов отражается в каждой парциальной волне и может быть отслежена в расчетах, использующих ограниченное число парциальных волн. Обобщение заключается в разработке такой технологии численного счета, которая бы позволила одинаково хорошо обращаться как с локальными, так и с нелокальными сепарабельными потенциалами, для которых, как известно, может быть получено точное решение связанных интегральных уравнений типа Липпмана–Швингера. Ранее такой подход, опирающийся на прямое численное интегрирование уравнений Фаддеева, был предложен в работе [11]. Численное интегрирование в интегральных ядрах трехчастичных уравнений Фаддеева в этом случае проводится по пяти независимым переменным. В данной

работе я обобщаю метод [11] на случай трех частиц разной массы путем использования техники проекционных операторов, развитой в работе [12]. Получаемые таким образом однородные уравнения Фаддеева для трех частиц решаются без использования парциально-волнового разложения. Указанные решения уже могут быть прямо использованы для сравнения двух методов решения уравнений Фаддеева с использованием и без использования парциально-волнового разложения, причем во втором случае исходный потенциал может быть также сепарабельным, просуммированным по всем доступным парциальным вкладам. Технически обращение с локальными потенциалами осуществляется путем приближенного решения уравнения Липпмана–Швингера с помощью вычитательной процедуры Нойеса–Ковальского [12], записанной на случай зависящих от углов потенциалов.

Развиваемая процедура прямого численного интегрирования уравнения Фаддеева позволяет в одном численном подходе использовать локальные и нелокальные потенциалы, а также оценивать влияние высших парциальных волн, для которых известен, например, парижский NN -потенциал. В разд. 1 кратко описан метод численного решения уравнений Фаддеева с локальными потенциалами и сама тактика численного счета в целом. В разд. 2 представлены результаты расчета энергий связи и энергий отщепления гиперонов. В заключении обсуждаются полученные результаты и отмечены дальнейшие шаги по развитию и применению изложенных в данной работе методов.

1. ФОРМАЛИЗМ И ТАКТИКА ЧИСЛЕННОГО СЧЕТА

Процедура поиска энергий связи опирается на решение однородного интегрального уравнения Фаддеева. Численная аппроксимация этого уравнения на счетную сетку с гауссовым распределением узлов приводит к алгебраическому уравнению

$$\det(1 - PtR_0)|_{E=E_b} = 0, \quad (1)$$

которое в точке $E = E_b$ имеет корень, совпадающий с трехчастичной энергией связи E_b . В (1) введены обозначения для полной кинетической энергии трех тел E , двухчастичной t -матрицы, трехчастичной резольвенты R_0 , свободной от взаимодействия и оператора P перестановки частиц местами. Трехчастичная T -матрица удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | T_1 | \varphi_{23} \varphi_1 \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_1 | \varphi_{31} \varphi_2 \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_1 | \varphi_{12} \varphi_3 \rangle + \\ + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_1 R_0 T_2 | \varphi_{31} \varphi_2 \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_1 R_0 T_3 | \varphi_{12} \varphi_3 \rangle, \\ \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | T_2 | \varphi_{31} \varphi_2 \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_2 | \varphi_{23} \varphi_1 \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_2 | \varphi_{12} \varphi_3 \rangle + \\ + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_2 R_0 T_1 | \varphi_{23} \varphi_1 \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_2 R_0 T_3 | \varphi_{12} \varphi_3 \rangle, \\ \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | T_3 | \varphi_{12} \varphi_3 \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_3 | \varphi_{23} \varphi_1 \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_3 | \varphi_{31} \varphi_2 \rangle + \\ + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_3 R_0 T_1 | \varphi_{23} \varphi_1 \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_3 R_0 T_2 | \varphi_{31} \varphi_2 \rangle. \end{cases} \quad (2)$$

В (2) волновые функции взаимодействующей пары частиц и третьей частицы обозначены символами φ_{ij} , φ_k , $ijk = 1, 2, 3$. Относительный импульс частиц во взаимодействующей паре обозначен как \mathbf{p} , а \mathbf{q} — импульс третьей частицы относительно этой пары. В работе [11] решается уравнение (2), записанное для тождественных бозонов. В этом случае три уравнения преобразуются в одно, а первые два слагаемых в (2) тождественно равны друг другу. Решение (2) с парциально-волновым разложением широко известно и может быть найдено, например, в работе [14]. Отметим тот факт, что переход от импульсных волновых функций φ_{ij} к формфакторам χ приводит к тому, что решения уравнений Фаддеева (2) находятся не для T -матриц, а для отдельных компонент амплитуды перехода $X_{\beta\alpha}^L$, действующих в заданном орбитальном моментом L канале. Связь амплитуды перехода с трехчастичной T -матрицей и операторов перехода может быть найдена в хрестоматийной работе [15].

Более сложный вариант решения (2) возникает, когда используются локальные двухчастичные потенциалы. В этом случае T -матрица

$$T(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E, q_0) \equiv T(p, x_p, q, x_q, x_{pq}; E, q_0) \quad (3)$$

зависит от пяти переменных: модулей относительных импульсов p , q , косинусов полярных углов x_p , x_q , связанных с импульсами \mathbf{p} , \mathbf{q} и азимутального угла x_{pq} между векторами \mathbf{p} , \mathbf{q} . Модуль относительного импульса налетающей частицы q_0 и суммарная трехчастичная кинетическая энергия E входят в (3) как параметры. Основное отличие уравнения (2), записанного для трех частиц разной массы, выражается матричным элементом однородного слагаемого (2), записанного ниже с помощью оператора перестановки P частиц местами:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | tP | \Psi \rangle = \int d^3q' d^3p' d^3q'' d^3p'' \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t | \mathbf{p}', \mathbf{q}' \rangle \langle \mathbf{p}', \mathbf{q}' | P | \mathbf{p}'', \mathbf{q}'' \rangle \langle \mathbf{p}'', \mathbf{q}'' | \Psi \rangle. \quad (4)$$

Конкретный вид полной волновой функции трехчастичной системы Ψ для поиска энергий связи роли не играет в отличие от задачи рассеяния. Матричные элементы оператора перестановки в (4) показывают два способа кинематической привязки относительных импульсов до и после передачи частицы между взаимодействующими парами:

$$\langle \mathbf{p}', \mathbf{q}' | P | \mathbf{p}'', \mathbf{q}'' \rangle = \langle \mathbf{p}', \mathbf{q}' | \mathbf{p}'', \mathbf{q}'' \rangle_1 + \langle \mathbf{p}', \mathbf{q}' | \mathbf{p}'', \mathbf{q}'' \rangle_2. \quad (5)$$

Порядок вычисления матричных элементов в (5) для тождественных частиц представлен в работе [12]. Отметим лишь, что для частиц разной массы вид импульсной зависимости

$$\mathbf{q}'_1 \mathbf{p}'_1 = \begin{cases} f_1(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2), \\ f_2(\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_3), \end{cases} \quad \mathbf{q}'_2 \mathbf{p}'_2 = \begin{cases} f_1(\mathbf{q}_3, \mathbf{p}_3), \\ f_2(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1), \end{cases} \quad \mathbf{q}'_3 \mathbf{p}'_3 = \begin{cases} f_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1), \\ f_2(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2) \end{cases} \quad (6)$$

отражается в различных, зависящих только от масс частиц коэффициентах линейных функций f_1 , f_2 . Циклическая перестановка частиц и корректный учет зависимости штрихованных (взаимодействие до передачи частицы) относительных якоби-импульсов от нештрихованных (взаимодействие после передачи частицы) якоби-импульсов приводят к следующим выражениям для однородных матричных компонент (2):

$$\begin{aligned}
 a_{12} &= \int d^3 q'' \left\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_1 | -\mathbf{q} \frac{m_1}{m_1 + m_3} - \mathbf{q}'', \mathbf{q} \right\rangle \times \\
 &\quad \times \left(-E - \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu_{23}} - \frac{\mathbf{q}''^2}{2\mu_{13}} - \frac{q q'' x_{q''}}{m_3} \right)^{-1}, \\
 a_{13} &= \int d^3 q'' \left\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_1 | \mathbf{q} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \mathbf{q}'', \mathbf{q} \right\rangle \times \\
 &\quad \times \left(-E - \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu_{23}} - \frac{\mathbf{q}''^2}{2\mu_{12}} - \frac{q q'' x_{q''}}{m_2} \right)^{-1}, \\
 a_{21} &= \int d^3 q'' \left\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_2 | \mathbf{q} \frac{m_2}{m_3 + m_2} + \mathbf{q}'', \mathbf{q} \right\rangle \times \\
 &\quad \times \left(-E - \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu_{31}} - \frac{\mathbf{q}''^2}{2\mu_{23}} - \frac{q q'' x_{q''}}{m_3} \right)^{-1}, \\
 a_{23} &= \int d^3 q'' \left\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_2 | \mathbf{q} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \mathbf{q}'', \mathbf{q} \right\rangle \times \\
 &\quad \times \left(-E - \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu_{31}} - \frac{\mathbf{q}''^2}{2\mu_{12}} - \frac{q q'' x_{q''}}{m_1} \right)^{-1}, \\
 a_{31} &= \int d^3 q'' \left\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_3 | \mathbf{q} \frac{m_2}{m_3 + m_2} + \mathbf{q}'', \mathbf{q} \right\rangle \times \\
 &\quad \times \left(-E - \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu_{12}} - \frac{\mathbf{q}''^2}{2\mu_{23}} - \frac{q q'' x_{q''}}{m_2} \right)^{-1}, \\
 a_{32} &= \int d^3 q'' \left\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} | t_3 | -\mathbf{q} \frac{m_1}{m_1 + m_3} - \mathbf{q}'', \mathbf{q} \right\rangle \times \\
 &\quad \times \left(-E - \frac{\mathbf{q}^2}{2\mu_{12}} - \frac{\mathbf{q}''^2}{2\mu_{31}} - \frac{q q'' x_{q''}}{m_1} \right)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Массы частиц в (7) обозначены как m_1 , m_2 , m_3 . Приведенные массы пар частиц обозначены символами μ с указанием номеров частиц. Подставляя (7) в (1), получаем конечное алгебраическое уравнение

$$\det \left[\left(\begin{array}{ccc} 1_{N \times N} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{N \times N} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{N \times N} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{ccc} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{array} \right) \right]_{E=|E_b|} = 0. \tag{8}$$

Число радиальных узлов в сетке интегрирования в (8) обозначено как N .

Двухчастичные t -матрицы, генерируемые связанными уравнениями Липпмана–Швингера с заданными потенциалами NN - и YN -взаимодействий, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} t_{\Lambda\Lambda} = V_{\Lambda\Lambda} + V_{\Lambda\Lambda}G_{\Lambda}t_{\Lambda\Lambda} + 2V_{\Lambda\Sigma}G_{\Sigma}t_{\Sigma\Lambda}, \\ t_{\Sigma\Lambda} = V_{\Sigma\Lambda} + V_{\Sigma\Lambda}G_{\Lambda}t_{\Lambda\Lambda} + 2V_{\Sigma\Sigma}G_{\Sigma}t_{\Sigma\Lambda}, \\ t_{\Sigma\Sigma} = V_{\Sigma\Sigma} + V_{\Sigma\Lambda}G_{\Lambda}t_{\Lambda\Sigma} + 2V_{\Sigma\Sigma}G_{\Sigma}t_{\Sigma\Sigma}. \end{cases} \quad (9)$$

В (9) свободные двухчастичные резольвенты обозначены символами G , парные потенциалы YN -взаимодействий, описывающих упругое ΛN -, упругое ΣN - и неупругое ΛN -взаимодействия, обозначены как $V_{\Lambda\Lambda}$, $V_{\Sigma\Sigma}$ и $V_{\Sigma\Lambda} \equiv V_{\Lambda\Sigma}$ соответственно. Двойка в (9) отражает два зарядовых ΣN -канала. Как отмечалось выше, решение (9) для сепарабельных потенциалов может быть найдено точно. Для локальных потенциалов используется процедура вычитания Нойеса–Ковальского. В этом приближенном подходе парная t -матрица имеет вид

$$T(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_i) = \frac{(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_i)V(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i)}{1 - (2\pi)^{-3} \int_0^{\infty} q''^2 dq'' \int_{-1}^1 dx_{q''} \int_0^{2\pi} d\varphi_{q''} \frac{V(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}'')f(\mathbf{q}'', \mathbf{q}_i)}{E(q_i) - E(q'') + i\varepsilon}}. \quad (10)$$

В (10) азимутальный угол и косинус угла интегрирования даны в обозначениях работы [11]. Интегрирование в (10) осуществляется с выделением полюсной части и интеграла в смысле главного значения. Для $f(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_i) \equiv 1$ формула (10) дает точное решение одного уравнения Липпмана–Швингера с сепарабельным потенциалом. Точное выражение для функции f дается выражением

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}, \mathbf{q}_i) &= \frac{V(\mathbf{q}, \mathbf{q}_i)}{V(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i)} + (2\pi)^{-3} \int_0^{\infty} q'^2 dq' \int_{-1}^1 dx_{q'} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi_{q'} \left[V(\mathbf{q}, \mathbf{q}') - \frac{V(\mathbf{q}, \mathbf{q}_i)}{V(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_i)} V(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}') \right] \frac{f(\mathbf{q}', \mathbf{q}_i)}{E(q_i) - E(q') + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (11)$$

Как видно из формулы (11), первое слагаемое для сепарабельного потенциала дает только отношение формфакторов, тогда как второе слагаемое исчезает и формула (10) становится точной. В случае использования локальных потенциалов уравнение (11) решается итерациями и удерживаются только первые два слагаемых в правой части (11).

Для локальных потенциалов используется связь импульсного с координатным представлением в виде

$$\begin{aligned} \langle p_f L_f S_f J M | V(p_f, p_i) | p_i L_i S_i J M \rangle = \\ = \sum_{M S_i S_f M S_i M S_f} C_{L_i M - M S_i S_i M S_i}^{J M} C_{L_f M - M S_f S_f M S_f}^{J M} \chi_{S_f M S_f}^* \chi_{S_i M S_i} (4\pi)^2 \times \\ \times i^{L_f - L_i} \int d^3 r Y_{L_f M - M S_f}^*(\hat{r}) Y_{L_i M - M L_i}(\hat{r}) j_{L_f}(p_f r) V(r) j_{L_i}(p_i r). \quad (12) \end{aligned}$$

В (12) координатный потенциал $V(r)$ зависит от модуля радиального вектора-координаты r и содержит центральную, спин-спиновую, тензорную, спин-орбитальную и квадратичную спин-орбитальную компоненты. Матричный элемент слева в (12) находится между различными орбитальным (L), спиновым (S) состояниями при фиксированном полном угловом моменте (J) и его проекции (M). Коэффициенты Клебша–Гордана ($SU(2)$ -группы), спиновые, сферические функции и функции Бесселя целочисленного аргумента обозначены как C , χ , Y , j соответственно, с указанием квантовых чисел. Для центральных и спин-спиновых компонент потенциала интегрирование в (12) по угловым переменным тривиально. Для остальных компонент матричные элементы потенциала можно найти по соответствующим формулам [16].

В расчетах энергий связи легких ядер непосредственно используются сепарабельные CD Bonn [17], CD Paris [18] и локальные MTI-IV [19], ESC'16 [8, 9] потенциалы. Параметры потенциала MTI-IV были подобраны только из условия описания энергии связи дейтрона и составили: $V_a = 2,92$, $V_r = 4,406$, $\mu_a = 305,9$ МэВ, $\mu_r = 613,7$ МэВ. Радиальные компоненты потенциала ESC'16 находились по доступному коду [9], интерпретированному для удобства под код fortran-90. Выдача компонент потенциала производилась до отметки 1,5 единиц комптоновских длин волн пиона с шагом около 0,07 фм. Для YN -взаимодействия использовалась феноменологическая модель [7], заданная с помощью простых сепарабельных потенциалов, а также микроскопическая модель ESC'16, тоже доступная по ссылке [9]. Фазовые сдвиги для 1S_0 , 3S_1 , 3D_1 нейтрон-протонных потенциалов даны слева на рис. 1. Для MTI-IV потенциала фазовые сдвиги не выделялись. Справа на рис. 1 приведены полные сечения упругого np -рассеяния. Видим, что вклады высших парциальных волн, начиная с 3P_0 и заканчивая 3F_2 парижского потенциала, становятся слабо заметны в области $T \approx 20$ МэВ кинетической энергии. Несколько завышаются фазовые сдвиги 3S_1 , 3D_1 , получаемые на основе локального потенциала ESC'16.

На рис. 2 даны полные сечения, предсказываемые используемыми в расчетах энергий связей легких гиперядер, феноменологической [7] и микроскопической [9] моделями YN -взаимодействия. Относительное расположение имеющихся экспериментальных точек и теоретических

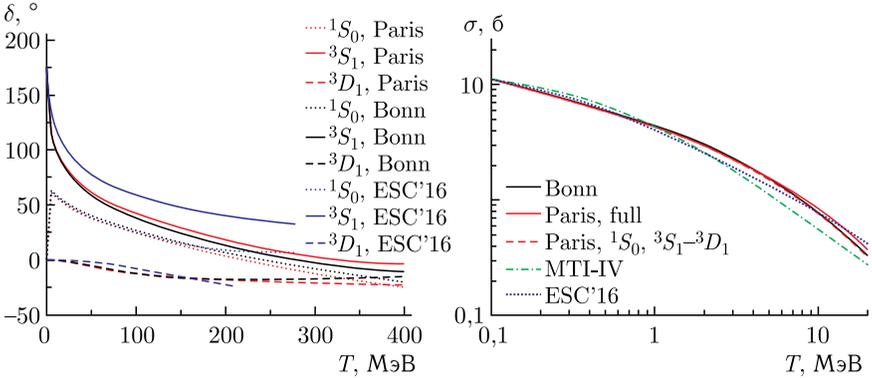


Рис. 1. Фазовые сдвиги δ (слева) для различных парциальных волн боннского, парижского и локального ESC'16 потенциалов, используемые в расчетах; полные сечения упругого np -рассеяния (справа) для различных потенциалов

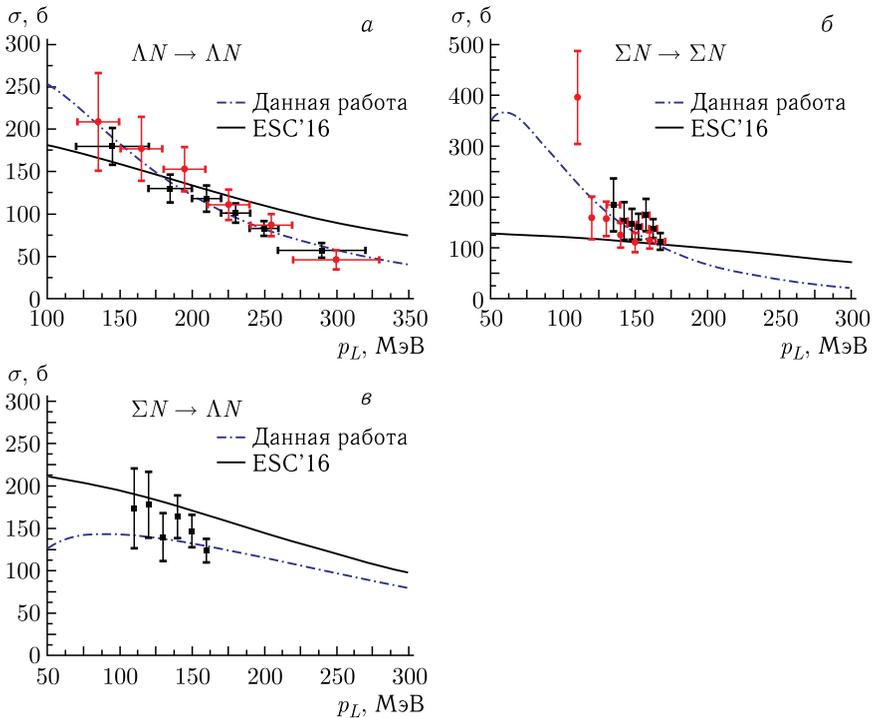


Рис. 2. Полное сечение упругого ΛN - (а), упругого ΣN - (б) процессов и конверсии $\Sigma N \rightarrow \Lambda N$ (в). Экспериментальные данные [20, 21] — для ΛN , [22, 23] — для ΣN и [22] — для конверсии

кривых с учетом экспериментальной неопределенности позволяет говорить о хорошем согласии всех расчетов с опытом.

Как показали первые расчеты энергий связи, наблюдается согласие полученного решения системы (2) при тождественных массах частиц с решением одного уравнения работы [11], двухчастичные матрицы в котором записываются в виде полусуммы $(t(\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_i) + t(-\mathbf{q}_f, \mathbf{q}_i))/2$. Если решение системы (2) с сепарабельными потенциалами, просуммированными по всем доступным парциальным волнам, опирается на точное аналитическое решение системы уравнений (9), то для локальных потенциалов используется решение системы (9) методом Нойеса–Ковальского для компонент двухчастичных t -матриц с заданным полным угловым моментом (J). Из-за этого процедура решения системы (2) сильно затягивается. В таком виде с использованием современного мобильного ПК один определитель системы (8) существует на протяжении 3–4 дней при количестве узлов в радиальных направлениях гауссовой сетки 55 и в угловых направлениях 9. Для ускорения счета было решено проводить численные расчеты с использованием 4-мерной сплайн-интерполяции. Данная интерполяция осуществляется на нерегулярную гауссову сетку с небольшим числом узлов для потенциалов, выписанных на регулярной сетке с большим числом узлов. На рис. 3 показан вид боннского потенциала $V(p_f, p_i)$ [17] (${}^1S_0, {}^3S_1 - {}^3D_1$) в различных сетках импульсов p_f, p_i при фиксированных косинусах $x_i = -0,6, x_f = -0,4$, связанных с данными импульсами. Видно, что детали потенциала $V(p_f, p_i)$ хорошо прорисовываются при числе точек порядка 100 на регулярной сетке импульсов. С уменьшением узлов до 10 возникает заметный произвол в выборе точки для интерполяции потенциала: по левому краю, по правому или по срединной точке. Ввиду такого произвола в выборе опорной точки потенциала неизбежно возникают неоднозначности в генерируемых уравнением Липпмана–Швингера двухчастичных t -матрицах. Однако более точные расчеты с большим количеством узловых точек сопряжены с экспоненциальным увеличением продолжительности обработки таких потенциалов в рамках численной процедуры Нойеса–Ковальского.

В этой связи после ряда тестовых расчетов было принято решение ввести сплайн-интерполяцию используемых потенциалов с подробной регулярной сетки (100 точек) на обедненную нерегулярную сетку (55 точек). В качестве опорных полиномов 3-го порядка для 4-мерной процедуры сплайн-интерполирования использовались выражения из прил. В работы [24]. Результат такой сплайн-интерполяции боннского np -потенциала с числом точек 55 изображен справа на рис. 3. Видно, что в области малых импульсов, где потенциал имеет ряд визуальных особенностей, результат сплайн-интерполирования на нерегулярную сетку передает их подробно. Тем не менее видно, что высота отдельных пиков в результате сплайн-интерполирования снижается. Несмотря на это, в расчетах с локальными потенциалами с использованием процедуры Нойеса–Ковальского все потенциалы интерполируются на гауссову сетку

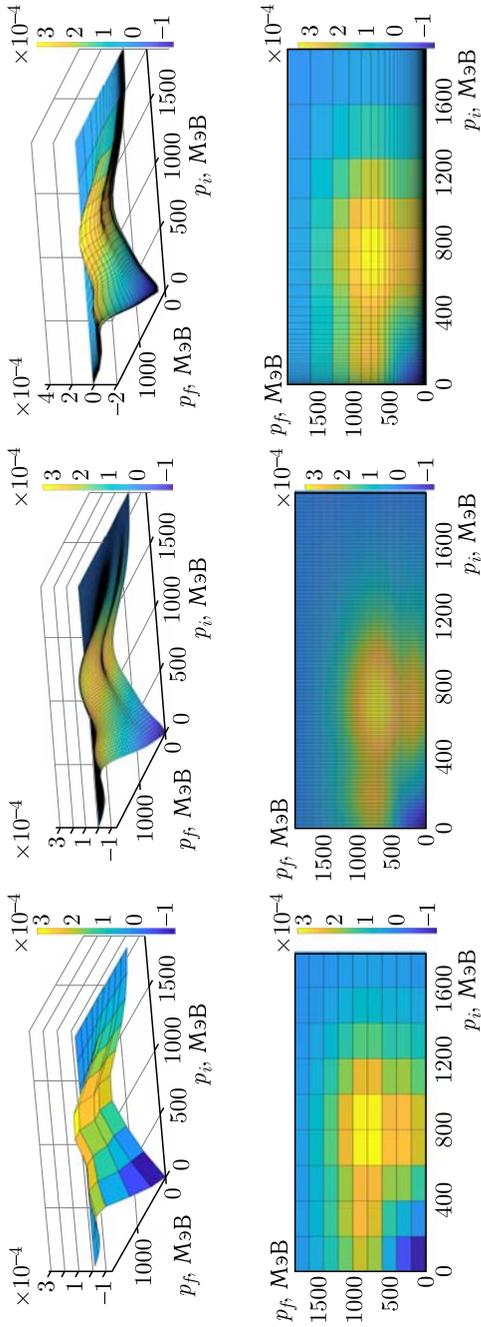


Рис. 3. Боннский np -потенциал $(-2\pi^2/\text{МэВ}^2)$ в различных проекциях на регулярной сетке с числом узлов 10 (слева), на регулярной сетке с числом узлов 100 (в центре) и на нерегулярной гауссовой сетке с числом узлов 55 (справа)

с числом узлов 55. Время расчета одного матричного элемента по формуле (8) в результате занимает не более 10 с. Чтобы уменьшить размер матрицы (8) при сохранении точности расчета двухчастичных t -матриц, было решено проводить вычисления двухчастичных t -матриц на отмеченной выше нерегулярной сетке с числом узлов 55, а ранг матрицы (8) фазового пространства уменьшить до 35 при сохранении числа узлов, привязанных к угловым переменным, равным 7. В этом численном подходе удалось согласовать появление корней уравнения (8) как в расчетах, задействующих процедуру вычитания Нойеса–Ковальского с суммированным по всем парциальным волнам боннским потенциалом, так и в расчетах, использующих точные двухчастичные t -матрицы, генерируемые уравнением Липпмана–Швингера с сепарабельным боннским потенциалом. В такой же тактике счета были рассчитаны энергии связи легких ядер с локальными потенциалами ESC'16 и МТИ-IV. Отметим, что для еще большего ускорения численного счета непосредственно используется библиотека «omp_lib.h» параллельных вычислений на общей памяти среды Parallel Studio с навязанным одновременным расчетом сразу нескольких матричных элементов уравнения (8).

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для расчета энергий связи по формуле (1) задавался цикл по энергии E с шагом 0,1 МэВ для поиска энергий связи легких ядер и с шагом 0,01 МэВ для поиска энергий связи легких гиперядер. Точка, в которой определитель (1) обращается в нуль, находилась путем линейной интерполяции двух, расположенных рядом с противоположными знаками значений определителя. Для того чтобы выяснить влияние различных масс трехчастичной системы на значение энергии связи, были проанализированы величины a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$ (7). На рис. 4 представлено характерное поведение величины a_{12} в точке $E = 8,38$ МэВ, где по расчетам с боннским np -потенциалом уравнение (1) имеет корень. Величины a_{12} представлены в зависимости от относительных начального p_i и конечного p_f импульсов на нерегулярной сетке с числом узлов 55.

Из рис. 4 видно, что исходный расчет с энергией связи $E = 8,38$ МэВ характеризуется хребтом с тремя экстремумами (в центре рис. 4). Расположение хребта примечательно тем, что соответствующий импульс $p_f \approx 100$ МэВ связан со средней кинетической энергией третьей частицы относительно пары частиц $3p_f^2/4M_N$ (M_N — масса нуклона), которая соответствует энергии примерно 8 МэВ, что близко к найденной энергии связи $n-p-n$ системы 8,38 МэВ. При $m_3 = 0,5m_p$ данная структура исчезает. Для более тяжелой системы с $m_3 = 2m_p$ наблюдается сдвиг положения хребта в область больших импульсов при сохранении его структуры. Можно предположить, что в такой системе с массой, равной четырем массам M_N , при $p_f \approx 200$ МэВ будет иметься связанное состояние с энергией порядка 30 МэВ.

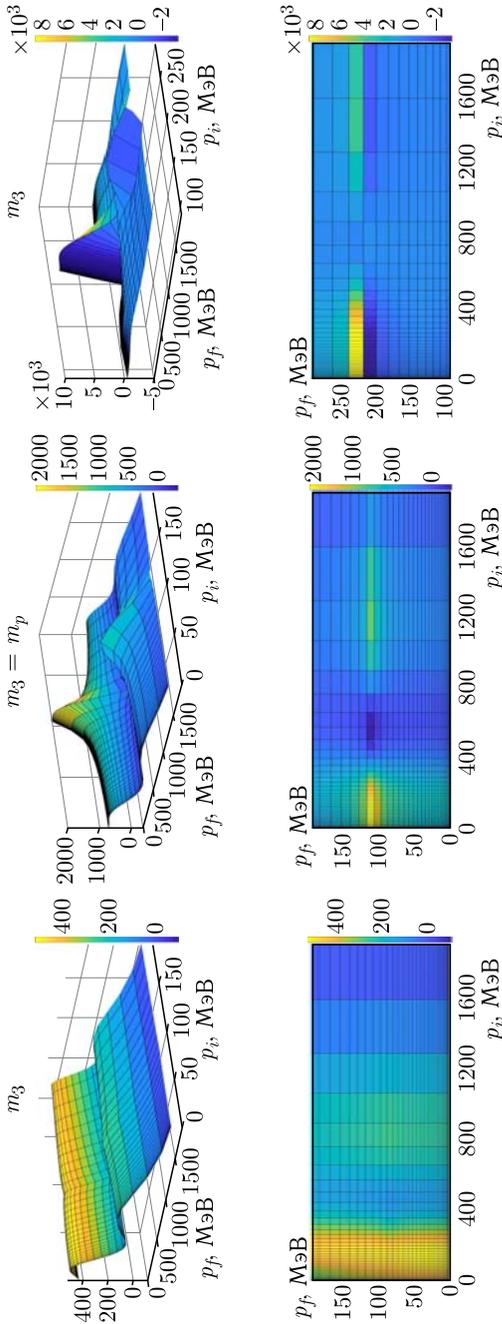


Рис. 4. Профили величин a_{12} формулы (7) в расчетах с боннским np -потенциалом при энергии $E = 8,38$ МэВ с различными массами третьей частицы $m_3 = 0,5m_p, m_p, 2m_p$

Энергия связи E_b ядра (A) однозначно связана с энергией отщепления Λ -гиперона $B_\Lambda(A)$ формулой

$$B_\Lambda(A) = M(A) - M(\Lambda) - M(A - 1_\Lambda) = |E_b(A - 1_\Lambda)| - |E_b(A)|. \quad (13)$$

В (13) введены масса гиперядра $M(A)$, масса гиперона $M(\Lambda)$, масса стабильного ядра без гиперона $M(A - 1_\Lambda)$ и энергия связи стабильного ядра без гиперона $E_b(A - 1_\Lambda)$. Экспериментальные энергии связи гиперонов находились по формуле (13) при известной энергии отщепления гиперона $B_\Lambda(A)$ и энергии связи нестранного ядра $E_b(A - 1_\Lambda)$ [25]. В табл. 2 приведены результаты расчета энергий связи легких гиперядер ${}^3_\Lambda\text{H}$, ${}^4_\Lambda\text{H}$ с использованием феноменологического YN -потенциала [7] при различных NN -потенциалах. Там же в таблице приведены расчеты энергий связи ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$, которые известны с точностью до шестого знака после запятой, поэтому сравнение с этими данными позволяет говорить о качестве параметризации NN -потенциала и манере численного счета. Расчеты энергий связи ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ с использованием сепарабельных парижского и боннского потенциалов ведут себя похожим образом, давая согласие с экспериментов с точностью 100 кэВ. Расчеты с локальным потенциалом ESC'16 [9] в изложенной манере имеют предсказательную силу на уровне 100–200 кэВ. И те, и другие расчеты воспроизводят энергию связи ${}^3\text{He}$ с точностью 70 кэВ. Несколько хуже обстоят дела с использованием потенциала МТИ-IV, для которого в данной работе подобраны параметры только исходя из условия воспроизведения энергии связи дейтрона. Энергии связи гипертритона воспроизводятся с точностью 10 кэВ с использованием в расчетах сепарабельных потенциалов CD Bonn [17] и CD Paris [18]. Для всех рассмотренных потенциалов энергия связи гипертритона воспроизводится с высокой точностью. Отметим, что в сепарабельный парижский потенциал входят парциальные волны вплоть до ${}^3\text{F}_2$, и все они учитывались в расчетах. Как показало сравнение расчетов с учетом и без учета высших парциальных волн (с орбитальным моментом $L > 2$), влиянием этих волн на положение корней уравнения (1) можно пренебречь. Комбинация моделей ESC'16 для NN - и YN -взаимодействий в расчете энергии связи ${}^3_\Lambda\text{H}$ дает несколько

Таблица 2. Энергии связи простейших трехчастичных ядер и гиперядер, получаемые в расчетах с различными NN -потенциалами при использовании феноменологического YN -потенциала [7]. В последней строке отмечены расчеты по модели [7] с использованием парциально-волнового разложения и сепарабеллизации локальных потенциалов ESC'16 и МТИ-IV

Ядро	CD Bonn [17]	CD Paris [18]	ESC'16	МТИ-IV	Эксперимент
${}^3\text{H}$	8,38	8,37	8,21	7,9	8,481
${}^3\text{He}$	7,66	7,66	7,78	7,6	7,718
${}^3_\Lambda\text{H}$	2,1	2,1	2,1	2,1	2,094
${}^4_\Lambda\text{H}$	6,5	7,3	He связано	He связано	6,441

расположенных рядом значений в диапазоне 0,12–0,14 МэВ, что также отлично согласуется с экспериментом.

Расчеты энергий связи четырехчастичного гиперядра ${}^4_{\Lambda}\text{H}$ проводились с использованием процедуры парциально-волнового разложения четырехчастичных уравнений Фаддеева–Якубовского, развитой в работе [7]. Сепарабельные потенциалы CD Bonn [17] и CD Paris [18] использовались в расчетах только в парциальных волнах 3S_1 – 3D_1 . Расчеты энергии связи ядра ${}^4_{\Lambda}\text{H}$ проводились по формуле (13). В этом случае для четырехчастичной системы ${}^4_{\Lambda}\text{H}$ расчеты дают корни при $E \approx 1,3, 3,3, 6,5$ МэВ с боннским потенциалом. В табл. 2 представлен наиболее близкий к экспериментальной энергии связи корень ${}^4_{\Lambda}\text{H}$. Подобные расчеты с парижским потенциалом заметно переоценивают экспериментальный результат. Четырехчастичные расчеты с локальными потенциалами ESC'16, MTI-IV проводились после нахождения сепарабельных аналогов указанных потенциалов для 3S_1 -волны. Как видно из табл. 2, данный переход к аналоговым сепарабельным потенциалам не позволил связать гиперядро ${}^4_{\Lambda}\text{H}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изложена процедура поиска энергий связи легких ядер и гиперядер с использованием решений однородных уравнений Фаддеева с заданными локальными и нелокальными потенциалами. Изложенный в работе метод обобщает результаты работы [11] на случай трех частиц разной массы. Непосредственными расчетами трехчастичных энергий связи подтверждено соответствие используемой для поиска решений уравнений Липпмана–Швингера процедуры вычитания Нойеса–Ковальского с сепарабельными потенциалами и точных решений указанных уравнений. Разработанная процедура поиска трехчастичных энергий связи с приближенным решением затравочных двухчастичных уравнений Липпмана–Швингера апробирована с использованием как феноменологических, так и микроскопических NN - и YN -потенциалов. Рассчитаны энергии связи легких ядер тритона и гелия-3, которые находятся с точностью до 100 кэВ в согласии с имеющимися экспериментальными данными, что не подтверждает встречающийся в литературе тезис о том, что сепарабельные зарядово-зависимые потенциалы заметно недооценивают трехчастичные энергии связи. В работе также рассчитаны энергии связи легких гиперядер с использованием как сепарабельных боннского и парижского, так и локальных потенциалов ESC'16 и MTI-IV. Использование в расчетах энергий связи легких гиперядер феноменологического YN -потенциала из работы [7] подтвердило его работоспособность. Хорошее согласие энергий связи ядер ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$ и гиперядра ${}^3_{\Lambda}\text{H}$ получено с использованием локальных микроскопических NN - и YN -потенциалов. Таким образом, разрабатываемый в данной работе метод поиска трехчастичных энергий связи достаточно универсальный и зарекомендовал себя с высокой предсказательной силой. Отметим, что для корректного

учета эффекта нарушения зарядовой симметрии в четырехчастичных гиперядрах следует расширить развиваемые в данной работе методы на случай четырех частиц.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-02-00004А.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gal A., Hungerford E. V., Millener D. J.* Strangeness in Nuclear Physics // *Rev. Mod. Phys.* 2016. V. 88. P. 035004.
2. *Miyagawa K., Glöckle W.* Hypertriton Calculation with Meson-Theoretical Nucleon–Nucleon and Hyperon–Nucleon Interactions // *Phys. Rev. C.* 1993. V. 48. P. 2576.
3. *Miyagawa K., Kamada H., Glöckle W., Stocks V.* Properties of the Bound $\Lambda(\Sigma)NN$ System and Hyperon–Nucleon Interactions // *Phys. Rev. C.* 1995. V. 51. P. 2905.
4. *Nogga A., Kamada H., Glöckle W.* The Hypernuclei ${}^4_{\Lambda}\text{H}$ and ${}^4_{\Lambda}\text{He}$: Challenges for Modern Hyperon–Nucleon Forces // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 88. P. 172501.
5. *Nogga A.* Light Hypernuclei Based on Chiral and Phenomenological Interactions // *Nucl. Phys. A.* 2013. V. 914. P. 140.
6. *Hiyama E., Kamimura M., Motoba T., Yamada T., Yamamoto Y.* Λ – Σ Conversion in ${}^4_{\Lambda}\text{He}$ and ${}^4_{\Lambda}\text{H}$ Based on a Few-Body Interactions // *Phys. Rev. C.* 2001. V. 65. P. 011301.
7. *Egorov M. V., Postnikov V. I.* Integral Equations and Binding Energies for Λ – NN and Λ – NNN Systems // *Nucl. Phys. A.* 2021. V. 1009. P. 122172.
8. *Nagels M. M., Rijken Th. A., Yamamoto Y.* Extended-Soft-Core Baryon–Baryon Model ESC08 II. Hyperon–Nucleon Interactions // *Phys. Rev. C.* 2019. V. 99. P. 044003.
9. <http://nn-online.org>
10. *Nagels M. M., Rijken Th. A., Yamamoto Y.* Extended-Soft-Core Baryon–Baryon Model ESC08 I. Nucleon–Nucleon Scattering // *Phys. Rev. C.* 2019. V. 99. P. 044002.
11. *Liu H., Elster Ch., Glöckle W.* Three-Body Scattering at Intermediate Energies // *Phys. Rev. C.* 2005. V. 72. P. 054003.
12. *Elster Ch., Shadow W., Nogga A., Glöckle W.* Three-Body Bound-State Calculations without Angular-Momentum Decomposition // *Few Body Syst.* 1999. V. 27. P. 83.
13. *Kowalski K. L.* Off-Shell Equations for Two-Particle Scattering // *Phys. Rev. Lett.* 1965. V. 15. P. 798;
Noyes H. P. New Nonsingular Integral Equation for Two-Particle Scattering // *Ibid.* P. 538.
14. *Egorov M. V.* η - ${}^7\text{Li}$ Scattering in the αt Cluster Model // *Phys. Atom. Nucl.* 2018. V. 81. P. 183.
15. *Glöckle W., Witala H., Hüber D., Kamada H., Golar J.* The Three–Nucleon Continuum: Achievements, Challenges and Applications // *Phys. Rept.* 1996. V. 274. P. 107.
16. *Rijken Th. A.* Momentum-Space Lippmann–Schwinger-Equation Fourier-Transform with Gauss-Expansion-Method. arXiv:1409.5593 [nucl-th]. 2014.

17. *Haidenbauer J., Koike Y., Plessas W.* Separable Representation of the Bonn Nucleon–Nucleon Potential // *Phys. Rev. C.* 1986. V. 33. P. 439.
18. *Haidenbauer J., Plessas W.* Separable Representation of the Paris Nucleon–Nucleon Potential // *Phys. Rev. C.* 1984. V. 30. P. 1822; *Phys. Rev. C.* 1985. V. 32. P. 1424.
19. *Malfliet R.A., Tjon A.J.* Solution of the Faddeev Equations for the Triton Problem Using Local Two-Particle Interactions // *Nucl. Phys. A.* 1969. V. 127. P. 161.
20. *Sechi-Zorn B., Kehoe B., Twitty J.* Low-Energy Λ -Proton Elastic Scattering // *Phys. Rev.* 1968. V. 175. P. 1735.
21. *Alexander G., Karshon U., Shapira A., Yekutiely G.* Study of the Λ - N System in Low-Energy Λ - p Elastic Scattering // *Ibid.* V. 173. P. 1452.
22. *Engelmann R., Filthuth H., Hepp V., Kluge E.* Inelastic Σ^-p Interactions at Low Momenta // *Phys. Lett.* 1968. V. 21. P. 587.
23. *Eisele F., Filthuth H. et al.* Elastic $\Sigma^\pm p$ Scattering at Low Energies // *Phys. Lett. B.* 1971. V. 37. P. 204.
24. *Hüber D., Witala H., Nogga A., Glöckle W., Kamada H.A.* New Look into the Partial-Wave Decomposition of Three-Nucleon Forces // *Few Body Syst.* 1997. V. 22. P. 107.
25. *Purcell J.E., Kelley J.H., Kwan E., Sheu C.G., Weller H.R.* Energy Levels of Light Nuclei $A = 3$ // *Nucl. Phys. A.* 2010. V. 848. P. 1.