УДК 530.12: 531.51

УЧЕТ ПОСТОЯНСТВА СКОРОСТИ СВЕТА В ГАЛИЛЕЕВОЙ ЗАДАЧЕ О СВОБОДНОМ ПОЛЕТЕ И ПАДЕНИИ ЧАСТИЦЫ НА ЗЕМЛЮ

Н. А. Черников, Н. С. Шавохина

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Учтен известный факт постоянства скорости света в задаче Галилея о свободном от негравитационных сил полете частицы и ее падении на землю.

The well known fact of the light velocity constancy is taken into account in the Galilean problem about the movement of a particle free from non-gravitational forces and its fall onto the ground.

Один из основных законов, относящихся к силам тяготения, был установлен Галилеем. Согласно этому закону при свободном (от негравитационных сил) движении в любом поле тяжести все частицы (точечные тела), независимо от их массы, испытывают одинаковое ускорение, равное напряженности этого поля. Иллюстрацией к этому закону является задача Галилея о свободном полете частицы и ее падении на землю. В этой задаче поверхность земли выглядит как неподвижная евклидова плоскость, а напряженность поля тяжести над поверхностью земли характеризуется положительной константой, называемой ускорением свободного падения и обычно обозначаемой через g. Словом, это та самая задача, что входит в программу преподавания физики в средней школе.

Как известно, вопрос об учете постоянства скорости света в этой задаче был поставлен Эйнштейном в 1907 г. в связи с принципом эквивалентности. В предлагаемой статье мы даем ответ на этот вопрос.

Как и во всякой задаче, учет постоянства скорости света в задаче Галилея сводится к замене геометрии Евклида в пространстве скоростей частицы на геометрию Лобачевского, ибо скорость света c, входящая в преобразования Лоренца, является параметром Лобачевского в пространстве скоростей частицы.

Понятие пространства скоростей в случае $c = \infty$ (т. е. в случае геометрии Евклида в этом пространстве, а значит, и нерелятивистской механики) было введено Гамильтоном в работе [1] для описания годографа планеты. В случае $c < \infty$ (т. е. в случае геометрии Лобачевского, а значит, и релятивистской механики) понятие пространства скоростей частицы было введено Котельниковым в работе [2], где он объяснил главное: суть теории относительности состоит в том, что переход от преобразований Галилея к преобразованиям Лоренца ведет к переходу в пространстве скоростей частицы от геометрии Евклида к геометрии Лобачевского с параметром, равным скорости света c. В связи с этим см. [3].

Перейдем теперь к решению поставленной выше задачи.

Согласно [4–8] в 4-мерном мире M событий $m \in M$ существуют две аффинные связности: полевая связность Γ^a_{mn} и фоновая связность $\check{\Gamma}^a_{mn}$. Их разность

$$P^a_{mn} = \check{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn} \tag{1}$$

называем тензором гравитационного поля. В случае вакуумного состояния гравитационного поля и только в этом случае тензор [1] равняется нулю во всякой мировой точке $m \in M$.

В рассматриваемом здесь случае фоновая связность примитивна, так что относительно нее мир событий является 4-мерным аффинным пространством с аффинными координатными картами $x^a, a = 1, 2, 3, 4$, в которых все коэффициенты $\check{\Gamma}^a_{mn}$ фоновой связности равны нулю во всякой точке $m \in M$.

Понятие неподвижной плоскости (обозначим ее через E_2) требует введения в аффинный мир событий M структуры прямого произведения $M = P \times T$ 3-мерного аффинного пространства P на аффинную прямую времени T. Аффинные координаты $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ в P называются абсциссой, ординатой и аппликатой. Аффинная координата $x^4 = t$ на прямой T называется временем.

Неподвижную плоскость E_2 задаем в P уравнением $z = 0$, а гравитационное поле рассматриваем в области $z > 0$. Тем самым мы накладываем на уравнения движения освобождающую склерономную связь. Затем на плоскости E_2 задаем метрику $dx^2 + dy^2$. За время своего существования плоскость E_2 «заметает» в мире M гиперплоскость $z = 0$ с метрикой

$$c^2 d\mathring{\tau}^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2. \tag{2}$$

Полевая связность Γ^a_{mn} является связностью Кристоффеля для полевой метрики. В рассматриваемом случае в области $z > 0$ аффинного мира M полевая метрика равна

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \Big(1 + \frac{gz}{c^2}\Big)^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{3}$$

На гиперплоскости $z = 0$ она переходит в метрику (2).

Отличные от нуля коэффициенты полевой связности в координатах x^a равны

$$\Gamma^3_{44} = g\Big(1 + \frac{gz}{c^2}\Big), \quad \Gamma^4_{34} = \frac{g}{c^2 + gz} = \Gamma^4_{43}. \tag{4}$$

Уравнения движения частицы являются уравнениями геодезических для полевой связности. В рассматриваемом случае в координатах x, y, z, t они имеют следующий вид:

$$\frac{d}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} + \frac{2g}{c^2 + gz}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{dz}{d\tau} + g\left(1 + \frac{gz}{c^2}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{dx}{d\tau} = 0, \quad \frac{d}{d\tau}\frac{dy}{d\tau} = 0. \tag{7}$$

При этом на мировой линии частицы выполняется равенство

$$c^2\left(1 + \frac{gz}{c^2}\right)^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = c^2. \tag{8}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{V^2 - v^2/c^2}}, \tag{9}$$

где

$$V = 1 + \frac{gz}{c^2}, \quad v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \tag{10}$$

Однородный первого измерения лагранжиан [10] равен

$$L = \left[\dot t - \sqrt{(V\dot t)^2 - \frac{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}{c^2}}\,\right] c^2, \text{ где } \dot x = \frac{dx}{d\tau}. \tag{11}$$

В силу уравнения (5) сохраняется удельная энергия E частицы (энергия частицы, поделенная на ее массу покоя):

$$E = \left(V^2 \frac{dt}{d\tau} - 1\right) c^2 = \left(\frac{V^2}{\sqrt{V^2 - v^2/c^2}} - 1\right) c^2 = -\frac{\partial L}{\partial \dot t}. \tag{12}$$

В силу уравнений (7) сохраняются компоненты u^1, u^2 удельного импульса и удельный угловой момент m^{12} частицы:

$$u^1 = \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial \dot x}, \quad u^2 = \frac{dy}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial \dot y}, \quad m^{12} = x\frac{dy}{d\tau} - y\frac{dx}{d\tau}. \tag{13}$$

При переходе от базиса dx, dy, dz, dt к базису Ламе [11, 12] dx, dy, dz, Vdt уравнения (6), (7) не меняются, а уравнение (5) принимает следующий вид:

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(1 + \frac{gz}{c^2}\right)\frac{dt}{d\tau}\right] + \frac{g}{c^2}\frac{dz}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0. \tag{14}$$

Так как

$$\frac{d\tau}{dt}\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{dt}, \quad \frac{dt}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = 1,$$

то, умножив на $d\tau/dt$ левую и правую части уравнений движения частицы, приведем последние к следующему виду:

$$\frac{du^1}{dt} = 0, \ \frac{du^2}{dt} = 0, \ \frac{du^3}{dt} = -gu^4, \ \frac{du^4}{dt} = -\frac{g}{c^2}u^3, \tag{15}$$

где u^a суть компоненты удельного импульса частицы в базисе Ламе, равные

$$u^1 = \left(\frac{dx}{d\tau}\right), \quad u^2 = \left(\frac{dy}{d\tau}\right), \quad u^3 = \left(\frac{dz}{d\tau}\right), \quad u^4 = \left(1 + \frac{gz}{c^2}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right). \tag{16}$$

Поэтому уравнения (15) имеют смысл уравнений Ньютона

$$\frac{du^a}{dt} = F^a, \tag{17}$$

где компоненты F^a вектора удельной силы тяжести равны

$$F^1 = 0,\ F^2 = 0,\ F^3 = -gu^4,\ F^4 = -\frac{g}{c^2}u^3. \tag{18}$$

Согласно (8)

$$\eta_{ab}\ u^a u^b = c^2 u^4 u^4 - u^3 u^3 - u^2 u^2 - u^1 u^1 = c^2. \tag{19}$$

Так как

$$\eta_{ab}\ F^a u^b = c^2 F^4 u^4 - F^3 u^3 - F^2 u^2 - F^1 u^1 = 0, \tag{20}$$

то вектор силы тяжести (18) ортогонален вектору импульса частицы (16). Скалярный квадрат вектора силы тяжести (18) не зависит от времени. Он равен

$$\eta_{ab}\ F^a F^b = c^2 F^4 F^4 - F^3 F^3 - F^2 F^2 - F^1 F^1 = \\ = g^2\left(\frac{u^3 u^3}{c^2} - u^4 u^4\right) = -g^2\left(1 + \frac{u^1 u^1 + u^2 u^2}{c^2}\right). \tag{21}$$

Интегрируя (15), находим

$$\begin{gathered} u^1 = U^1, \quad u^2 = U^2, \\ u^3 = U^3 \cosh\frac{s}{c} - cU^4 \sinh\frac{s}{c}, \\ cu^4 = cU^4 \cosh\frac{s}{c} - U^3 \sinh\frac{s}{c}, \end{gathered} \tag{22}$$

где U^a— значения u^a при $t = 0$, а $s = gt$ — быстрота, пропорциональная времени t.

Отсюда нетрудно найти мировую линию частицы. Действительно, из (16) и (22) следует, что

$$\begin{gathered} U^1 = \frac{dx}{d\tau}, \quad U^2 = \frac{dy}{d\tau}, \\ U^3 = u^3 \cosh\frac{s}{c} + cu^4 \sinh\frac{s}{c}\frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{c^2}{g} + z\right)\cosh\frac{s}{c}\right], \\ cU^4 = u^3 \sinh\frac{s}{c} + cu^4 \cosh\frac{s}{c} = \frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{c^2}{g} + z\right)\sinh\frac{s}{c}\right], \end{gathered} \tag{23}$$

а значит,

$$\begin{gathered} x = X + U^1\tau, \quad y = Y + U^2\tau, \\ \left(\frac{c^2}{g} + z\right)\cosh\frac{s}{c} = \left(\frac{c^2}{g} + Z\right)\cosh\frac{S}{c} + U^3\tau, \\ \left(\frac{c^2}{g} + z\right)\sinh\frac{s}{c} = \left(\frac{c^2}{g} + Z\right)\sinh\frac{S}{c} + cU^4\tau, \end{gathered} \tag{24}$$

где X, Y, Z, T — значения координат x, y, z, t при $\tau = 0$, а $S = gT$. Эти формулы задают мировую линию частицы. Они заметно упрощаются, если положить $T = 0$:

$$x = X + U^1\tau, \quad y = Y + U^2\tau,$$
$$\left(\frac{c^2}{g} + z\right)\cosh\frac{s}{c} = \frac{c^2}{g} + Z + U^3\tau, \quad \left(\frac{c^2}{g} + z\right)\sinh\frac{s}{c} = cU^4\tau. \tag{25}$$

Отсюда следует, что

$$\tanh\frac{gt}{c} = \frac{cU^4 g\tau}{c^2 + gZ + U^3 g\tau}, \tag{26}$$

$$c^2 + gz = \sqrt{(c^2 + gZ + g\tau U^3)^2 - (g\tau cU^4)^2}. \tag{27}$$

Учитывая, что

$$cU^4 = \sqrt{c^2 + U^1U^1 + U^2U^2 + U^3U^3}, \tag{28}$$

находим зависимость аппликаты частицы от ее собственного времени в следующем виде:

$$c^2 + gz = \sqrt{(c^2 + gZ)^2 + 2U^3(c^2 + gZ)g\tau - (c^2 + U^1U^1 + U^2U^2)(g\tau)^2}. \tag{29}$$

Располагая этой формулой, нетрудно убедиться, что аппликата частицы достигает своего максимального значения H при $\tau = \tau_0$, где

$$g\tau_0 = \frac{(c^2 + gZ)U^3}{c^2 + U^1U^1 + U^2U^2}, \tag{30}$$

$$c^2 + gH = \frac{(c^2 + gZ)cU^4}{\sqrt{c^2 + U^1U^1 + U^2U^2}}. \tag{31}$$

При этом значении τ координата t частицы принимает значение $\tilde{t}$, для которого

$$\tanh\frac{g\tilde{t}}{c} = \frac{U^3}{cU^4}. \tag{32}$$

Согласно (22) при этом выполняется равенство $u^3 = 0$.

Поэтому в соответствии с (31) для удельной энергии (12), определяемой согласно (16) по формуле

$$c^2 + E = (c^2 + gz)u^4 = (c^2 + gZ)U^4, \tag{33}$$

выполняется следующее равенство:

$$c^2 + E = (c^2 + gH)\sqrt{1 + \frac{U^1U^1 + U^2U^2}{c^2}}. \tag{34}$$

Из условия $z \geqslant 0$ находим, что собственное время τ полета частицы над землей ограничено корнями следующего квадратного уравнения:

$$g(c^2 + U^1U^1 + U^2U^2)\tau^2 = 2U^3(c^2 + gZ)\tau + 2c^2Z + gZ^2. \tag{35}$$

Мы приходим к этому уравнению, полагая в (29) $z = 0$. С помощью (28), (30) и (31) получаем

$$g\tau_0 - \sqrt{\Delta} \leqslant g\tau \leqslant g\tau_0 + \sqrt{\Delta}, \tag{36}$$

где

$$\Delta = \frac{(c^2 + gH)^2 - c^4}{c^2 + U^1U^1 + U^2U^2}. \tag{37}$$

Выясним теперь геометрический смысл зависимости (22) скорости частицы от времени t.

В 1887 г. Пуанкаре [12] обнаружил, что на гиперболоиде реализуется геометрия Лобачевского. В нашем случае в качестве гиперболоида Пуанкаре выступает гиперповерхность (28) в мире Минковского, внутренняя геометрия которой задается следующей метрической формой:

$$dS^2 = dU^1dU^1 + dU^2dU^2 + dU^3dU^3 - c^2dU^4dU^4, \tag{38}$$

где

$$c^2dU^4dU^4 = \frac{(U^1dU^1 + U^2dU^2 + U^3dU^3)^2}{c^2 + U^1U^1 + U^2U^2 + U^3U^3} \, .$$

Расстояние $\hat{s}$, между точками $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, на верхней поле гиперболоида (28), представляющей пространство скоростей, задается метрикой (38) и определяется соотношением

$$\cosh\frac{\hat{s}}{c} = U^4V^4 - \frac{U^1V^1 + U^2V^2 + U^3V^3}{c^2} \, . \tag{39}$$

Это расстояние мы называем относительной быстротой.

Уравнение $U^1 = 0$ задает на верхней поле гиперболоида плоскость Лобачевского, а пара уравнений $U^1 = 0, U^2 = 0$ задает прямую Лобачевского. Согласно (22) скорость частицы движется равномерно по эквидистанте, удаленной от этой прямой на расстояние σ, определяемое соотношением

$$\cosh\frac{\sigma}{c} = \sqrt{1 + \frac{U^1U^1 + U^2U^2}{c^2}} = \frac{c^2 + E}{c^2 + gH} \, . \tag{40}$$

В пределе $c \to \infty$ рассмотренный выше вариант задачи, основанный на геометрии Лобачевского в пространстве скоростей, переходит в классический вариант задачи Галилея, в котором геометрия пространства скоростей евклидова.

Действительно, уравнения (5)–(7) принимают вид

$$\frac{d}{d\tau}\frac{dx}{d\tau} = 0, \quad \frac{d}{d\tau}\frac{dy}{d\tau} = 0, \quad \frac{d}{d\tau}\frac{dz}{d\tau} + g\frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0, \quad \frac{d}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0, \tag{41}$$

а уравнение (9) переходит в уравнение

$$\frac{dt}{d\tau} = 1. \tag{42}$$

Лагранжиан (11) переходит в известный лагранжиан

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2\dot{t}} - gz\dot{t}, \tag{43}$$

а выражение (12) для удельной энергии частицы переходит в известное выражение

$$E = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2\dot{t}^2} + gz = -\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}. \tag{44}$$

Подобно тому как система уравнений геодезических (5)–(7) расщепляется на упорядоченную пару систем уравнений (15), (16), система уравнений геодезических (41) расщепляется на упорядоченную пару

$$\frac{du^1}{dt} = 0, \quad \frac{du^2}{dt} = 0, \quad \frac{du^3}{dt} = -gu^4, \quad \frac{du^4}{dt} = 0, \tag{45}$$

$$u^1 = \left(\frac{dx}{d\tau}\right), \quad u^2 = \left(\frac{dy}{d\tau}\right), \quad u^3 = \left(\frac{dz}{d\tau}\right), \quad u^4 = \left(\frac{dt}{d\tau}\right). \tag{46}$$

Раньше, интегрируя систему уравнений (15), мы получили преобразование Лоренца (22). Теперь, интегрируя систему уравнений (45), мы получаем преобразование Галилея

$$u^1 = U^1, \quad u^2 = U^2, \quad u^3 = U^3 - U^4 s, \quad u^4 = U^4, \tag{47}$$

в которое переходит преобразование (22) при $c \to \infty$.

Что касается уравнений (23), то они переходят в следующие уравнения:

$$\begin{gathered} U^1 = u^1 = \frac{dx}{d\tau}, \quad U^2 = u^2 = \frac{dy}{d\tau}, \\ U^3 = u^3 + u^4 s = \frac{d}{d\tau}\left(z + \frac{s^2}{2g}\right), \quad U^4 = u^4 = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{s}{g}\right), \end{gathered} \tag{48}$$

так как если $c \to \infty$, то

$$\begin{gathered} \left[\left(\frac{c^2}{g} + z\right)\cosh\frac{s}{c} - \frac{c^2}{g}\right] \to z + \frac{s^2}{2g}, \\ \left(\frac{c}{g} + \frac{z}{c}\right)\sinh\frac{s}{c} \to \frac{s}{g}. \end{gathered}$$

Согласно (42) здесь надо положить

$$U^4 = 1. \tag{49}$$

Соответственно, уравнения (24) переходят в уравнения

$$\begin{gathered} x = X + U^1\tau, \quad y = Y + U^2\tau, \\ z + \frac{s^2}{2g} = Z + \frac{S^2}{2g} + U^3\tau, \quad t = T + \tau, \end{gathered} \tag{50}$$

а уравнения (25) переходят в уравнения

$$\begin{gathered} x = X + U^1\tau, \quad y = Y + U^2\tau, \\ z = Z + U^3\tau - \frac{g\tau^2}{2}, \quad t = \tau. \end{gathered} \tag{51}$$

Из последнего выражения для аппликаты z находим, что она достигает своего максимального значения H при $\tau = \tau_0$, где

$$g\tau_0 = U^3, \quad 2gH = 2gZ + U^3U^3. \tag{52}$$

В эти равенства переходят равенства (30) и (31) при $c \to \infty$.

Соответственно, равенства (33) и (34) переходят в следующие равенства:

$$E = gZ + \frac{U^1U^1 + U^2U^2 + U^3U^3}{2} = gH + \frac{U^1U^1 + U^2U^2}{2}. \tag{53}$$

Наконец, интервал (36) переходит в интервал

$$U^3 - \sqrt{2gH} \leqslant g\tau \leqslant U^3 + \sqrt{2gH}. \tag{54}$$

В пределе $c \to \infty$ геометрия Лобачевского в пространстве скоростей переходит в геометрию Евклида. Действительно, в этом пределе гиперповерхность (28) превращается в гиперплоскость (49), а метрика (38) переходит в метрику

$$dS^2 = dU^1dU^1 + dU^2dU^2 + dU^3dU^3. \tag{55}$$

Уравнение $U^1 = 0$ на гиперплоскости (49) задает евклидову плоскость, а пара уравнений $U^1 = 0, U^2 = 0$ задает евклидову прямую. Согласно (47) скорость частицы при $c = \infty$ движется равномерно по прямой, равноудаленной от прямой $U^1 = 0$, $U^2 = 0$ на расстояние

$$\sigma = \sqrt{U^1U^1 + U^2U^2}. \tag{56}$$

Равенство (40) при $c \to \infty$ переходит в равенство

$$U^1U^1 + U^2U^2 = 2(E - gH), \tag{57}$$

что согласуется с (53).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hamilton W. R.* // Proc. Roy. Irish. Acad. 1847. V. 3. P. 344–353.

2. *Котельников А. П.* Принцип относительности и геометрия Лобачевского // In memoriam N. I. Lobatschevskii. Казань. 1927. Т. 2. С. 37–66.

3. *Черников Н. А.* Геометрия Лобачевского как физическая наука // 150 лет геометрии Лобачевского: Пленарные докл. М. 1977. С. 146–153.

4. *Черников Н. А.* Геометрия Лобачевского и современная теория тяготения // Изв. вузов. Математика. 1994. Т. 2(381). С. 60–66.

5. *Черников Н. А.* Релятивистская теория тяготения с двумя аффинными связностями // Крат. сообщ. ОИЯИ. 1993. № 3[60]. С. 5–12.

6. *Черников Н. А.* Однородное статическое поле тяжести. Сообщение ОИЯИ Р2-2001-22. Дубна, 2001.

7. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* О справедливости принципа эквивалентности Эйнштейна в полупространстве-времени. Сообщение ОИЯИ Р2-2002-212. Дубна, 2002.

8. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Релятивистская теория гравитации Логунова в свете геометрии аффинной связности // ТМФ. 2002. Т. 132, № 3. С. 469–474.

9. *Рашевский П. К.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений в частных производных. М.; Л., 1947. С. 354.

10. *Шавохина Н. С.* Квантовая теория спинорного поля в четырехмерном римановом мире // ЭЧАЯ. 1996. Т. 27, вып. 5. С. 1469–1532.

11. *Иваницкая О. С.* Обобщенные преобразования Лоренца и их применение. Минск, 1969. С. 228.

12. *Пуанкаре А.* Об основных гипотезах геометрии. Об основаниях геометрии // Сб. классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. М., 1956. С. 390.

Получено 6 августа 2003 г.