Письма в ЭЧАЯ. А. 2012. Т. 9, № 9–10. С. 175–181

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ НЕЙТРИНО

В. С. Батозская [1]

Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия

Целью данной работы является краткий обзор процессов на разных стадиях эволюции Вселенной, влияющих на современное распределение плотности числа нейтрино.

In this paper we give a brief review of processes at different stages of the Universe evolution leading to today number density of neutrino.

PACS: 13.15.+g; 14.60.Pq; 98.80.Es

ВВЕДЕНИЕ

В результате эволюции Вселенной после Большого взрыва все пространство вокруг нас оказалось заполнено реликтовыми фотонами и нейтрино. Безмассовые реликтовые фотоны могут быть прекрасно описаны функцией распределения Планка со средней температурой около $T_\gamma = 2{,}7$ K. Нетрудно оценить соответствующую температуру реликтовых нейтрино $T_\nu = 1{,}95$ K (см. разд. 1). Однако, как мы знаем, нейтрино обладает ненулевой массой. Самое тяжелое нейтрино имеет массу не меньше 0,05 эВ[2], что заметно превышает его кинетическую энергию $(3/2)kT_\nu^0 \sim 2{,}5\cdot 10^{-4}$ эВ, соответствующую $T_\nu^0 = 1{,}95$ K. Как распределены по энергии реликтовые нейтрино в настоящее время? Ответ на этот вопрос не очевиден, хотя, конечно, уже дан другими исследователями [1–4]. В данной работе мы кратко рассмотрим основные этапы цитируемых исследований, попутно внеся свой скромный вклад, записав кинетическое уравнение для массивных нейтрино.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 мы рассмотрим стадию, когда нейтрино и антинейтрино находились в термодинамическом равновесии с кварками, антикварками, лептонами и фотонами (первичная космическая плазма). Оценим момент времени выхода из термодинамического равновесия и соответствующую температуру нейтрино. Также будут даны оценки для формы функции распределения нейтрино в предположении того, что нейтрино находились в термодинамическом равновесии. В разд. 2 мы избавимся от этой гипотезы, рассмотрим соответствующие кинетические уравнения, приведем результаты их численного решения и дадим оценку для поправки в форму функции распределения нейтрино за счет неравновесных процессов.

[1]E-mail: warwara.us@gmail.com

[2]В данной статье мы используем систему единицы, в которой $\hbar = c = 1$.

1. НЕЙТРИНО В ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОМ РАВНОВЕСИИ

Следуя книге [5], приведем оценку температуры и возраста Вселенной для момента выхода нейтрино из термодинамического равновесия. На ранней стадии эволюции Вселенной нейтрино и антинейтрино находились в термодинамическом равновесии с плазмой из $e^{\pm}, p, n, \gamma$.

Нейтрино участвуют только в слабых взаимодействиях. При больших энергиях сечения взаимодействия пропорциональны квадрату фермиевской константы G_F^2, отсюда для всех процессов можно получить оценку

$$\sigma_\nu \sim G_F^2 E^2,$$

где E — характерная энергия столкновения в системе центра масс сталкивающихся частиц, $E \sim T$; G_F — константа Ферми. Плотность числа частиц в ультрарелятивистском пределе $n \sim T^3$. Тогда время свободного пробега нейтрино можно оценить как

$$\tau_\nu = \frac{1}{\langle \sigma_\nu n v \rangle} \sim \frac{1}{G_F^2 T^5}, \tag{1}$$

где $v \simeq 1$ — относительная скорость нейтрино и частиц, с которыми происходит столкновение.

Нейтрино заведомо выйдут из термодинамического равновесия тогда, когда время свободного пробега нейтрино будет превышать характерный темп расширения Вселенной. Оценим это время, исходя из уравнения Фридмана

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{\kappa}{a^2}, \tag{2}$$

где H — «константа» Хаббла[1]; a — масштабный фактор; G — константа Ньютона; ρ — плотность энергии во Вселенной; κ — кривизна пространства. В пространственно-плоской модели $\kappa = 0$. В качестве ρ с очень хорошей точностью можно использовать плотность энергии ультрарелятивистских частиц, которая равна $g_*(\pi^2/30)T^4$, где g_* — эффективное число степеней свободы бозонов и фермионов. С учетом того, что $G = M_P^{-2}$, где M_P — масса Планка, соотношение (2) может быть записано в виде

$$H^{-1} = \frac{M_P^*}{T^2} = \frac{M_P}{1{,}66\sqrt{g_*}} \frac{1}{T^2}, \tag{3}$$

H^{-1} можно считать характерным темпом расширения Вселенной. Сравнив (1) и (3), получим, что при достаточно высоких температурах время свободного пробега нейтрино было меньше чем H^{-1} и нейтрино находилось в термодинамическом равновесии с веществом. Нейтрино перестают взаимодействовать (это называется «закалкой»), если

$$\tau_\nu(T) \sim H^{-1}(T).$$

[1] На самом деле H никакая не константа, а функция времени.

Из (1) и (3) следует, что это происходит при температуре

$$T_{\nu,f} \sim \left(\frac{1}{G_F^2 M_P^*}\right)^{1/3} \sim 2\text{–}3 \text{ МэВ}.$$

Возраст Вселенной на момент закалки нейтрино составлял

$$t_{\nu,f} \sim \frac{1}{2H(T_{\nu,f})} = \frac{M_P^*}{2T_{\nu,f}^2} \sim 0{,}00992\text{–}0{,}07533 \text{ с}.$$

Таким образом, в момент времени $t_{\nu,f} \sim 0{,}00992\text{–}0{,}07533$ с при температуре порядка $T_{\nu,f} \sim 2\text{–}3$ МэВ нейтрино испытали последнее столкновение и с тех пор распространялись во Вселенной свободно. В тот период времени температура нейтрино и фотонов была одинаковой. Температура нейтринного газа и в настоящее время бы равнялась температуре реликтовых фотонов, если бы последние не «подогрелись» за счет аннигиляции $e^+e^- \to \gamma\gamma$, когда температура во Вселенной опустилась ниже массы электрона (0,51 МэВ) и электрон-позитронные пары проаннигилировали в фотоны. Количественно эффект подогрева фотонов за счет аннигиляции электронов и позитронов можно определить, пользуясь сохранением энтропии электрон-фотонной компоненты в сопутствующем объеме:

$$g_*(T)a^3T^3 = \text{const}, \tag{4}$$

где $g_*(T)$ — эффективное число релятивистских степеней свободы в электрон-фотонной плазме. Сразу после закалки нейтрино в энтропию электрон-фотонной плазмы давали вклад фотоны, электроны и позитроны, что приводит к следующему значению:

$$g_*(T_{\nu,f}) = 2 + \frac{7}{8}(2+2) = \frac{11}{2}.$$

После e^+e^--аннигиляции в энтропию плазмы вносят вклад только фотоны, и отношение температур фотонов и нейтрино остается постоянным:

$$\frac{T_{\gamma,0}}{T_{\nu,0}} = \left(\frac{g_*(T_{\nu,f})}{g_*(T_0)}\right)^{1/3} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3} \simeq 1{,}401. \tag{5}$$

Следовательно, в настоящее время температура нейтрино

$$T_\nu(t_0) \simeq 1{,}95 \text{ K}. \tag{6}$$

Используя формулу для плотности числа ультрарелятивистских частиц, находим, что при современном значении температуры плотность числа нейтрино и антинейтрино каждого типа составляет

$$n_{\nu,0} = \frac{3}{4} \cdot 2\frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_\nu^3(t_0) \backsimeq 112 \text{ см}^{-3} \backsimeq 8{,}6 \cdot 10^{-22} \text{ эВ}^3. \tag{7}$$

Функция распределения нейтрино. Поскольку, согласно нашей гипотезе, до закалки нейтрино находились в термодинамическом равновесии, то функция распределения нейтрино — это функция Ферми–Дирака. Более того, в момент закалки характерная температура $T_{\nu,f} \sim 2{-}3$ МэВ была много больше массы даже самого тяжелого нейтрино $m_\nu^h \sim 0{,}05$ эВ, что означает, что функция распределения в тот момент $t_{\nu,f}$ с очень хорошей точностью (на уровне $(m_\nu^h)^2/T_{\nu,f}^2 \sim 4\cdot 10^{-16}$) есть

$$f(|\mathbf{p}|) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{|\mathbf{p}|/T_{\nu,f}}+1}. \tag{8}$$

Каким образом эволюционирует $f(|\mathbf{p}|)$ со временем? Чтобы ответить на этот вопрос, можно привлечь следующее рассуждение. При расширении Вселенной сопутствующий фазовый объем $d^3p\,d^3x$ остается инвариантным и совпадает с физическим $d^3(p/a(t))d^3(a(t)x)$. Таким образом, если в какой-то момент времени t_i функция распределения нам известна и равна $f_i(\mathbf{p})$, то в любой другой момент времени она определяется только тем, как «краснеют» импульсы [5]:

$$f(\mathbf{p},t) = f_i\left(\frac{a(t)}{a(t_i)}\mathbf{p}\right).$$

Итак, функция распределения нейтрино в настоящее время определяется ультрарелятивистским пределом (8) с заменой $T_{\nu,f} \to T_\nu^{\mathrm{eff}}$, где

$$T_\nu^{\mathrm{eff}} = T_{\nu,f}\frac{a(t_{\nu,f})}{a(t_0)}, \tag{9}$$

несмотря на то, что самое тяжелое реликтовое нейтрино нерелятивистское.

2. НЕЙТРИНО ВНЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим теперь, как можно вычислить поправки к ультрарелятивистскому пределу (8), не предполагая термодинамического равновесия. Для этого можно рассмотреть неравновесное уравнение Больцмана, которое описывает эволюцию во времени функции распределения плотности $f = f(\mathbf{p},\mathbf{x})$ в одночастичном фазовом пространстве ($\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ — координата и импульс). При изложении результатов этого раздела мы следуем работам [1–4].

В гамильтоновой механике уравнение Больцмана записывается в общем виде

$$\hat{L}[f] = I_{\mathrm{coll}}[f], \tag{10}$$

где I_{coll} — оператор столкновений, описывающий скорость изменения функции распределения благодаря столкновениям; $\hat{L}$ — это оператор Лиувилля. В отсутствии внешнего поля частица движется с постоянной скоростью и меняются только ее координаты $\mathbf{r}$, при этом

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{x}}.$$

Если же газ находится во внешнем поле $U(\mathbf{r})$, действующем на координаты центра инерции частицы, то

$$\hat{L}_{\rm NR} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m}\cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{F}\cdot \nabla_{\mathbf{p}}, \tag{11}$$

где m — масса частицы и $\mathbf{F} = -\nabla U$ — сила, действующая на частицу со стороны поля. Формула (11) определяет нерелятивистский оператор Лиувилля в фазовом пространстве [6].

Общий вид ковариантного релятивистского оператора Лиувилля:

$$\hat{L} = p^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}p^{\beta}p^{\gamma}\frac{\partial}{\partial p^{\alpha}}, \tag{12}$$

где Γ — символ Кристоффеля. С высокой степенью точности наша Вселенная пространственно однородна и изотропна на достаточно больших масштабах. Такая Вселенная описывается метрикой Фридмана–Робертсона–Уокера (FRW) с квадратом интеграла $ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j$, где $\gamma_{ij}(x)$ — метрический тензор трехмерного пространства. Для пространственно однородной и изотропной Вселенной функция распределения плотности не зависит от координат и вектора импульса: $f = f(|\mathbf{p}|, t) = f(E, t)$.

Получим релятивистский аналог уравнения Больцмана для пространственно однородной и изотропной Вселенной. Запишем уравнение для вычисления символов Кристоффеля:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{g^{\mu\sigma}}{2}(\partial_{\nu}g_{\lambda\sigma} + \partial_{\lambda}g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\nu\lambda}).$$

В метрике FRW некоторые компоненты символов Кристоффеля зануляются: $\Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{0i} = \Gamma^i_{00} = 0$. Не нулевые компоненты

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j, \quad \Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad \Gamma^i_{jk} = \frac{\gamma^{il}}{2}(\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{jk}).$$

С учетом этих соотношений уравнение (12) имеет вид

$$\hat{L}[f(E,t)] = E\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{p}^2\frac{\partial f}{\partial E}, \tag{13}$$

или

$$\hat{L}[f(\mathbf{p},t)] = E\left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{p}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\right). \tag{14}$$

Кинетическое уравнение Больцмана представляется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - H\mathbf{p}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\right)f = I_{\rm coll}. \tag{15}$$

Интеграл столкновения для двухчастичного взаимодействия $1 + 2 \to 3 + 4$ можно записать в виде

$$I_{\rm coll} = \frac{1}{2E_1}\sum_{\text{процессы}}\int \frac{d^3p_2}{2E_2(2\pi)^3}\frac{d^3p_3}{2E_3(2\pi)^3}\frac{d^3p_4}{2E_4(2\pi)^3}\times$$
$$\times (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)F(f_1, f_2, f_3, f_4)S|M_{12\to 34}|^2, \tag{16}$$

где $F = f_3f_4(1-f_1)(1-f_2)-f_1f_2(1-f_3)(1-f_4)$, f_3f_4 — функции распределения по импульсам выходящих частиц, а f_1f_2 — входящих, $(1-f_1)\ldots$ — множители, связанные со статистикой Ферми–Дирака; $|M_{12\to34}|^2$ есть квадрат амплитуды слабого взаимодействия, просуммированный по спинам всех частиц, кроме первой; S — фактор симметризации, который равен $1/2!$ для каждой пары одинаковых частиц в начальном или конечном состояниях и 2! для двух одинаковых частиц в начальном состоянии [1].

Нетрудно увидеть, что равновесная функция распределения

$$f_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{\exp\left[\dfrac{E-\mu(t)}{T(t)}\right] \pm 1} \tag{17}$$

обнуляет правую часть уравнения (15), если $\dot{T}/T = -H$ и $\mu \sim T(t)$. Разумеется, в данном случае равновесная функция распределения f_{eq} представляет собой функцию распределения Ферми–Дирака или Бозе–Эйнштейна, где μ — это химический потенциал частиц.

Таким образом, отличие от нуля правой части (15) соответствует неравновесной функции распределения. Для того чтобы решить систему уравнений (15), необходимо установить начальные значения. В качестве таковых разумно взять равновесные функции распределения, соответствующие стадии равновесия нейтрино с плазмой. Кроме того, нужно вычислить для каждого процесса, в котором участвует (анти)нейтрино, квадраты соответствующих матричных элементов $|M_{12\to34}|^2$. В работе [1] это было проделано, однако для флейворных нейтрино. В настоящей статье приведены результаты расчета $|M_{12\to34}|^2$ для массовых состояний нейтрино, что представляется более адекватным данной задаче. В таблице представлены квадраты матричных элементов для процессов с массивными нейтрино.

Квадраты матричных элементов для процессов с массивными нейтрино, где $g_L^{ij} = V_{ei}V_{ej}^* + \delta_{ij}(2\sin^2\theta_W - 1)$ и $g_R^{ij} = 2\delta_{ij}\sin^2\theta_W$ ($V_{\alpha i}$ — унитарная матрица смешивания)

Процесс	$2^{-5}G_F^{-2}S\lvert M_{12\to34}\rvert^2$
$\nu_i + \bar{\nu}_i \to \nu_i + \bar{\nu}_i$	$4(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)$
$\nu_i + \bar{\nu}_i \to \nu_j + \bar{\nu}_j$	$(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)$
$\nu_i + \bar{\nu}_j \to \nu_i + \bar{\nu}_j$	$(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3)$
$\nu_i + \nu_i \to \nu_i + \nu_i$	$2(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4)$
$\nu_i + \nu_j \to \nu_i + \nu_j$	$(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4)$
$\nu_i + \bar{\nu}_i \to e^+ + e^-$	$4[(g_L^{ii})^2(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) + (g_R^{ii})^2(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4) + (g_L^{ii})(g_R^{ii})m_e^2(p_1\cdot p_2)]$
$\nu_i + e^- \to \nu_j + e^-$	$4[(g_L^{ij})^2(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + (g_R^{ij})^2(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) + g_L^{ij}g_R^{ij}m_e^2(p_1\cdot p_3)]$
$\nu_i + e^+ \to \nu_j + e^+$	$4[(g_R^{ij})^2(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + (g_L^{ij})^2(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) - g_L^{ij}g_R^{ij}m_e^2(p_1\cdot p_3)]$

Результаты численных расчетов [1–4] (в предположении флейворных нейтрино ν_α) дают отношение температур фотонов и нейтрино после полной аннигиляции e^+e^--пар — 1,39905, что следует сравнить с ожиданием 1,401 (см. уравнение (5)). Таким образом, учет неравновесных процессов дает поправку на уровне 10^{-3}. Представляется интересным повторить численный расчет с учетом квадратов матричных элементов для процессов с массивными нейтрино (см. таблицу).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение мне бы хотелось выразить особую благодарность Д. В. Наумову за постановку задачи, помощь и возможность написания данной работы в ЛЯП ОИЯИ. Также мне приятно поблагодарить фонд некоммерческих программ «Династия» во главе с Д. Б. Зиминым за предоставление стипендии (2011 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dolgov A. D., Hansen S. H., Semikoz D. V.* Non-Equilibrium Corrections to the Spectra of Massless Neutrinos in the Early Universe // Nucl. Phys. B. 1997. V. 503. P. 426.
2. *Hannestad S., Madsen J.* Neutrino Decoupling in the Early Universe // Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 1764–1769.
3. *Dodelson S., Turner M. S.* Nonequilibrium Neutrino Statistical Mechanics in the Expanding Universe // Phys. Rev. D. 1992. V. 46. P. 3372–3387.
4. *Esposito S. et al.* Non Equilibrium Spectra of Degenerate Relic Neutrinos // Nucl. Phys. B. 2000. V. 590. P. 539–561.
5. *Горбунов Д. С., Рубаков В. А.* Введение в теорию ранней Вселенной. М., 2006. 465 с.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Физическая кинетика. М.: Физматлит, 2002. 536 с.