Письма в ЭЧАЯ. 2013. Т. 10, № 4(181). С. 501–510

СТРУКТУРА ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

К. А. Модестов [1], *Ю. В. Чугреев* [2]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

В РТГ вычислен тензор энергии-импульса для метрики Керра. Найдены внешние гравитационные энергия и момент импульса коллапсирующего тела. На основании анализа их поведения вблизи гравитационного радиуса сделан вывод о невозможности гравитационного коллапса.

In RTG the energy-momentum tensor of the Kerr metric has been calculated. The external gravitational energy and angular momentum of collapsing body have been obtained. The conclusion on impossibility of gravitational collapse has been deduced from the analysis of their behaviour near gravitational radius.

PACS: 04.20.Cv

В работе [1] рассматривалась структура интеграла, определяющего гравитационную массу статического сферически-симметричного тела в релятивистской теории гравитации (РТГ). Было показано, что соответствующий интеграл по внешней вакуумной области расходится при стремлении радиуса тела к радиусу Шварцшильда. Сингулярность такого типа свидетельствует о невозможности гравитационного коллапса за горизонт событий.

В настоящей работе мы обобщим полученные в [1] результаты на случай стационарного, вращающегося, аксиально-симметричного тела в РТГ с массой покоя гравитона, равной нулю. Такое решение описывается метрикой Керра [2]. В ОТО наиболее часто оно записывается в координатах Бойера–Линдквиста (БЛ) $\{T, r.\vartheta, F\}$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1-\frac{2mr}{\rho^2}\right)dT^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2\,d\vartheta^2 - \\ &\quad - \left(r^2+a^2+\frac{2mra^2}{\rho^2}\sin^2\vartheta\right)\sin^2\vartheta\,dF^2 + \frac{4mra}{\rho^2}\sin^2\vartheta\,dF\,dT = \\ &= -\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2\,d\vartheta^2 - \frac{\sin^2\vartheta}{\rho^2}(a\,dT-(r^2+a^2)\,dF)^2 + \frac{\Delta}{\rho^2}(dT-a\sin^2\vartheta\,dF)^2, \quad (1) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\vartheta.$$

[1] E-mail: modestov@goa.bog.msu.ru

[2] E-mail: chugreev@goa.bog.msu.ru

Эти координаты удобны тем, что при обращении в нуль константы a метрика переходит в известное решение Шварцшильда. Однако в этих координатах, в отличие от координат Керра, происходит бесконечное «наматывание» траекторий частиц на поверхность горизонта.

Метрика Керра зависит от двух постоянных параметров, m и a, смысл которых ясен из предельного вида метрики на больших расстояниях r. С точностью до членов $1/r$ имеем

$$g_{00} \approx 1 - \frac{2m}{r}, \quad g_{03} \approx \frac{2ma}{r} \sin^2 \vartheta.$$

Анализ этих выражений показывает, что m есть масса источника, а параметр a связан с его моментом вращения M соотношением

$$M = ma.$$

В конце настоящей работы полная энергия источника и его момент вращения будут вычислены точно.

Так как

$$\Delta \equiv (r - r_g)(r - m + \sqrt{m^2 - a^2}), \quad \text{где} \quad r_g \equiv \sqrt{m^2 - a^2} + m,$$

то легко видеть, что метрика (1) становится сингулярной на поверхности $r = r_g$, которая является горизонтом событий.

Система уравнений РТГ [7] включает в себя, помимо обычного уравнения Гильберта–Эйнштейна общей теории относительности, дополнительное уравнение первого порядка, содержащее ковариантную производную по метрике фонового пространства Минковского и являющееся общековариантным обобщением координатного условия гармоничности Фока. Поэтому необходимо выявить связь используемых координат БЛ с координатами, в которых решение (1) удовлетворяет этому второму уравнению в заранее заданной метрике фонового пространства $\gamma_{\mu\nu}$. Благодаря этому РТГ позволяет однозначно установить область изменения координат эффективного риманова пространства как область взаимно однозначного соответствия этих координат координатам пространства Минковского с якобианом, отличным от нуля.

В работе [3] было показано, что существует единственное вакуумное решение, взаимно однозначно отображающее (с якобианом, отличным от нуля) область вне горизонта событий источника Керра с галилеевыми координатами пространства Минковского $\{t, x, y, z\}$.

Следуя [4, 5], в пространстве Минковского мы будем использовать так называемые сфероидальные координаты $\{t, R, \theta, \varphi\}$, связанные с галилеевыми $\{t, x, y, z\}$ соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{R^2 + a^2} \cos\varphi \sin\theta, \\ y &= \sqrt{R^2 + a^2} \sin\varphi \sin\theta, \\ z &= R \cos\theta. \end{aligned}$$

Как легко видеть, при $a = 0$ эти координаты переходят в обычные сферические. Метрика пространства Минковского будет выглядеть в сфероидальных координатах следующим образом:

$$\gamma_{ik} = \mathrm{diag}\left(1, -\frac{R^2 + a^2\cos^2\theta}{R^2 + a^2}, -\left(R^2 + a^2\cos^2\theta\right), -\left(R^2 + a^2\right)\sin^2\theta\right).$$

Взаимно однозначная связь этих координат с координатами БЛ [3, 4] задается соотношениями

$$t = T, \quad R = r - m, \quad \theta = \vartheta,$$
$$\varphi = F + \frac{a}{2\delta}\ln\frac{r - m - \delta}{r - m + \delta} - \mathrm{arctg}\,\frac{r - m}{a} + \frac{\pi}{2},$$

где $\delta = \sqrt{m^2 - a^2}$.

Метрика Керра в этих координатах примет вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2}\right)dt^2 - \left(\frac{\rho^2}{R^2 - R_g^2} + \frac{m^4 a^2 \sin^2\theta}{\rho^2 (R^2 - R_g^2)^2 (R^2 + a^2)^2}\Lambda\right)dR^2 - \\ - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\Lambda\, d\varphi^2 - \frac{4m^3 a^2 r \sin^2\theta}{\rho^2 (R^2 - R_g^2)(R^2 + a^2)} dR\, dt + \\ + \frac{4mar\sin^2\theta}{\rho^2} d\varphi dt + \frac{2m^2 a \sin^2\theta}{\rho^2 (R^2 - R_g^2)(R^2 + a^2)}\Lambda\, dR\, d\varphi, \quad (2)$$

где $\Lambda = (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta = \rho^2\Delta + 2mr(r^2 + a^2)$.

В работе [6] было показано, что это решение удовлетворяет принципу причинности [7] во всей области $r > r_g$.

Рассчитаем теперь для керровского решения (2) интеграл, определяющий гравитационную массу источника. Для этого выпишем уравнения гравитационного поля РТГ в приближении нулевой массы гравитона в привычном виде [7]

$$D_\alpha D_\beta (\widehat{g}^{\varepsilon\lambda}\widehat{g}^{\alpha\beta} - \widehat{g}^{\varepsilon\alpha}\widehat{g}^{\lambda\beta}) = 16\pi(\widehat{T}^{\varepsilon\lambda} + \widehat{t}_g^{\varepsilon\lambda}), \\ D_\beta \widehat{g}^{\alpha\beta} = 0, \quad (3)$$

где D_α — ковариантная производная по метрике Минковского $\gamma_{\mu\nu}$, $\widehat{g}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{g/\gamma}\, g^{\mu\nu}$, $\widehat{T}^{\mu\nu} \equiv (g/\gamma)T^{\mu\nu}$, а тензор энергии-импульса гравитационного поля $\widehat{t}_g^{\mu\nu}$ равен

$$16\pi\widehat{t}_g^{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\left(g^{\varepsilon\alpha}g^{\lambda\beta} - \frac{1}{2}g^{\varepsilon\lambda}g^{\alpha\beta}\right)\left(g_{\nu\sigma}g_{\tau\mu} - \frac{1}{2}g_{\tau\sigma}g_{\nu\mu}\right) D_\alpha \widehat{g}^{\tau\sigma} \cdot D_\beta \widehat{g}^{\mu\nu} + \\ + g^{\alpha\beta}g_{\tau\sigma} D_\alpha \widehat{g}^{\varepsilon\tau} \cdot D_\beta \widehat{g}^{\lambda\sigma} + \frac{1}{2} g^{\varepsilon\lambda} g_{\tau\sigma} D_\alpha \widehat{g}^{\sigma\beta} \cdot D_\beta \widehat{g}^{\alpha\tau} - \\ - g^{\varepsilon\beta} g_{\tau\sigma} D_\alpha \widehat{g}^{\lambda\sigma} \cdot D_\beta \widehat{g}^{\alpha\tau} - g^{\lambda\alpha} g_{\tau\sigma} D_\alpha \widehat{g}^{\beta\sigma} \cdot D_\beta \widehat{g}^{\varepsilon\tau}. \quad (4)$$

Сравнивая эту формулу с выражением для псевдотензора энергии-импульса Ландау–Лифшица [8], убеждаемся, что они отличаются только заменой ковариантных производных на обычные и, следовательно, в галилеевых координатах пространства Минковского совпадают.

Из (3) легко получить дифференциальный закон сохранения энергии-импульса вещества и гравитационного поля вместе взятых:

$$D_\lambda(\widehat{T}^{\varepsilon\lambda} + \widehat{t}_g^{\varepsilon\lambda}) = 0. \tag{5}$$

В искривленном пространстве подобное соотношение вовсе не означало бы наличия какой-либо сохраняющейся величины в силу отсутствия векторов Киллинга и галилеевых координат. Однако пространство Минковского является плоским, и поэтому оно имеет полную десятипараметрическую группу симметрий и допускает введение галилеевых координат. В этих координатах (5) примет вид

$$\partial_\lambda(\widehat{T}^{\varepsilon\lambda} + \widehat{t}_g^{\varepsilon\lambda}) = 0, \tag{6}$$

где $\partial_\lambda \equiv \partial/\partial x^\lambda$.

Разбивая полную 4-дивергенцию на пространственную и временную части, получим

$$(\widehat{T}^{\varepsilon 0} + \widehat{t}_g^{\varepsilon 0})_{,0} = -(\widehat{T}^{\varepsilon k} + \widehat{t}_g^{\varepsilon k})_{,k}.$$

Теперь проинтегрируем по трехмерному объему

$$\frac{d}{dt}\int(\widehat{T}^{\varepsilon 0} + \widehat{t}_g^{\varepsilon 0})\,dV = -\int(\widehat{T}^{\varepsilon k} + \widehat{t}_g^{\varepsilon k})_{,k}\,dV.$$

Объемный интеграл в правой части по теореме Остроградского–Гаусса можно преобразовать в поверхностный по ограничивающей этот объем поверхности

$$\frac{d}{dt}\int(\widehat{T}^{\varepsilon 0} + \widehat{t}_g^{\varepsilon 0})\,dV = -\int(\widehat{T}^{\varepsilon k} + \widehat{t}_g^{\varepsilon k})\,dS_k.$$

Введем 4-вектор энергии-импульса системы вещество + гравитационное поле

$$P^\varepsilon = \int(\widehat{T}^{\varepsilon 0} + \widehat{t}_g^{\varepsilon 0})\,dV. \tag{7}$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}P^\varepsilon = -\int(\widehat{T}^{\varepsilon k} + \widehat{t}_g^{\varepsilon k})\,dS_k = -\int(\widehat{T}^{\varepsilon R} + \widehat{t}_g^{\varepsilon R})\,dS_R.$$

Очевидно, что правая часть представляет собой поток энергии-импульса системы через ограничивающую объем поверхность. Выберем в качестве такой поверхности бесконечно удаленную поверхность $R \to \infty$. Поскольку все вещество локализовано в центре, на этой поверхности $T^{\varepsilon\lambda} = 0$. Так как площадь растет как R^2 при $R \to \infty$, то для того чтобы интеграл стремился к нулю, подынтегральное выражение должно убывать быстрее, чем $1/R^2$. Непосредственное вычисление показывает, что для $\varepsilon = 0$ (энергия) $\widehat{t}_g^{0R}$ убывает как $1/R^7$, а для $\varepsilon = i = 1, 2, 3$ (импульс) $\widehat{t}_g^{iR}$ убывает как $1/R^4$. Поэтому 4-вектор полных энергии-импульса системы P^ε сохраняется во времени.

Вычислим теперь полную энергию системы P^0. Интеграл (7) может быть сведен к поверхностному интегралу. Записав (3) в виде

$$D_\alpha \widehat{h}^{\varepsilon\lambda\alpha} = 16\pi(\widehat{T}^{\varepsilon\lambda} + \widehat{t}_g^{\varepsilon\lambda}),$$

где

$$\widehat{h}^{\alpha\varepsilon\lambda} \equiv D_\beta(\widehat{g}^{\varepsilon\lambda}\widehat{g}^{\alpha\beta} - \widehat{g}^{\varepsilon\alpha}\widehat{g}^{\lambda\beta}), \tag{8}$$

найдем энергию внутри сферы радиуса R, причем интеграл в сфероидальных переменных вычисляется точно:

$$P^0(R) = \oint \widehat{h}^{00\alpha}\, dS_\alpha = \oint \widehat{h}^{00R} dS_R = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \widehat{h}^{00R}\left(R^2 + a^2\cos^2\theta\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{m}{4R(R^2 - R_g^2)^2}\Bigg\{\frac{1}{R^2+a^2}(4R^7 + 9R^6m + 12R^5a^2 - 4R^3m^4 + 12R^3a^4 + 4Ra^6 +$$
$$+ 4m^6R + 5m^5R^2 - 11R^4m^3 + m^7 - 14R^2a^2m^3 + 21R^4ma^2 + m^5a^2 + 3ma^6 +$$
$$+ 15R^2ma^4 - 4Ra^2m^4 - 3m^3a^4) + \frac{m}{aR}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{R}\right)(5R^6 + 12R^5m + 9R^4a^2 +$$
$$+ R^4m^2 + 16R^3a^2m - 16R^3m^3 + 7R^2a^4 + 6R^2a^2m^2 - 11m^4R^2 +$$
$$+ 4a^4Rm + a^2m^4 + 3a^6 + m^6 - 3a^4m^2)\Bigg\}. \quad (9)$$

Предел $R \to \infty$ приводит к интегралу движения m — гравитационной массы источника:

$$P^0(\infty) = m.$$

Разобьем теперь область интегрирования в (7) на две: область V_0, где присутствует вещество ($T^{\mu\nu} \neq 0$), и область V_1, где вещество отсутствует ($T^{\mu\nu} = 0$):

$$P^0 = \int\limits_{V_0}(\widehat{T}^{00} + \widehat{t}_g^{00})\, dV + \int\limits_{V_1}\widehat{t}_g^{00}\, dV.$$

В этой структуре первый член справа определяет энергию вещества и гравитационного поля внутри тела, тогда как второй задает потенциальную энергию внешнего гравитационного поля.

Поскольку, во-первых, про источник $T^{\mu\nu}$ нам известно только то, что он обладает осевой симметрией, и, во-вторых, что метрика Керра (2) справедлива только вне вещества $T^{\varepsilon\lambda} \neq 0$, мы можем взять в явном виде только второй интеграл. Для начала вычислим $\widehat{t}_g^{00}$ в галилеевых координатах, но в сфероидальных переменных, используя (4):

$$\widehat{t}_g^{00} = \frac{m^2}{8\pi(R^2 - R_g^2)^3(R^2 + a^2\cos^2\theta)^4}[R^2(11a^6m^2 - 7R^8 - 6a^8 - 20R^7m -$$
$$- 27R^4a^4 - 21R^2a^6 - 19R^6a^2 + 3m^8 + a^2m^6 - m^4R^2a^2 - 8Ra^6m - 9a^4m^4 +$$
$$+ 8Ra^4m^3 - 28R^3a^4m + 12R^3a^2m^3 - 40R^5a^2m - 4Ra^2m^5 + 28R^5m^3 - 12R^3m^5 -$$
$$- 10R^2m^6 + 4Rm^7 - 13R^4m^2a^2 + 16R^2m^2a^4 - 6R^6m^2 + 20m^4R^4) +$$
$$+ a^2\cos^2\theta\,(-6R^2a^6 - 6a^8 - m^8 - 43R^6m^2 + 12Ra^2m^5 + 32R^3a^4m - 5a^4m^4 -$$
$$- 12Rm^7 - 3a^2m^6 + 38R^6a^2 + 12R^8 + 15a^6m^2 - 79R^4m^2a^2 + 24R^2a^2m^4 +$$
$$+ 26R^4a^4 - 56R^3a^2m^3 - 21R^2m^6 + 69m^4R^4 - 8Ra^4m^3 + 24R^5a^2m + 3R^2a^4m^2 +$$
$$+8Ra^6m+28R^3m^5)+a^4\cos^4\theta\,(-15a^2m^4+3R^6+5R^2a^4-12R^3m^3-a^6+9R^4a^2+4R^5m+$$
$$+12Ra^4m-36Ra^2m^3+13R^2m^4+16R^3a^2m+7a^4m^2-14R^2a^2m^2+24Rm^5+9m^6-9R^4m^2)].$$

Поскольку и интегрируемая функция, и область интегрирования имеют наиболее простой вид в сфероидальных переменных, вычислим в них искомый интеграл. Якобиан этого преобразования переменных равен корню из определителя метрического тензора $\sqrt{-\gamma} = \left(R^2 + a^2\cos^2\theta\right)\sin\theta$:

$$\int\limits_{V_1} \hat{t}_g^{00} dV = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_R^{\infty} \hat{t}_g^{00}(R^2 + a^2\cos^2\theta)\sin\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi.$$

Интегрирование по φ дает просто множитель 2π, а интегрируя по θ и R, после длительных вычислений можно найти выражение для энергии гравитационного поля в вакууме в явном виде:

$$\int\limits_{V_1} \hat{t}_g^{00}\, dV = m - P^0(R). \tag{10}$$

Такой же результат сразу получается из (9).

Проверим, является ли энергия гравитационного поля снаружи коллапсирующего тела (10) отрицательной. Для этого представим ее в виде многочлена по степеням $R - R_g$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{V_1} \hat{t}_g^{00}\, dV = -\frac{m^2}{4R^3(R^2+a^2)(R^2-R_g^2)^2}\{&2m^4a^2r_g^2 + 4m^2r_g^2(2R_g^3 + m^2R_g + m^3)(R-R_g) + \\ &+ 2(32mR_g^5 + 20R_g^6 + 42m^2R_g^4 + 39m^4R_g^2 + 3m^6 + 12R_gm^5 + 52R_g^3m^3)(R-R_g)^2 + \\ &+ 8(26R_g^5 + 36mR_g^4 + 35m^2R_g^3 + m^5 + 21m^3R_g^2 + 9m^4R_g)(R-R_g)^3 + \\ &+ 2(240R_g^3m + 243R_g^4 + 160m^2R_g^2 + 9m^4 + 50m^3R_g)(R-R_g)^4 + \\ &+ 2(287R_g^3 + 75m^2R_g + 188mR_g^2 + 10m^3)(R-R_g)^5 + \\ &+ (357R_g^2 + 25m^2 + 140mR_g)(R-R_g)^6 + 4(5m + 28R_g)(R-R_g)^7 + 14(R-R_g)^8\}.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что, поскольку $R > R_g$ и $R_g < m$, эта энергия всегда отрицательна.

Разлагая (10) в окрестности сингулярности $R = R_g = \sqrt{m^2 - a^2}$ в ряд Лорана и удерживая только члены с отрицательными степенями, найдем

$$\begin{aligned}\int\limits_{V_1} \hat{t}_g^{00}\, dV = &\frac{m^4r_g^2}{8R_g^3(R-R_g)^2}\left[-1 + \frac{1}{aR_g}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{R_g}\right)(2R_g^2 - m^2)\right] + \\ &+ \frac{m^2r_g}{8R_g^4(R-R_g)}\Bigg[m^2(R_g + 3m) - 4r_gR_g^2 - \frac{1}{aR_g}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{R_g}\right)\times \\ &\times (m^2(R_g+3m)(2R_g^2 - m^2) + 4r_gR_g^4)\Bigg] + o\left(\frac{1}{R-R_g}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Видно, что при приближении размера коллапсирующего тела к горизонту событий R_g энергия гравитационного поля вне тела стремится к бесконечности обратно пропорционально квадрату отклонения его поверхности от поверхности горизонта. Для предельного случая невращающегося тела ($a = 0$), внешнее решение для которого дается метрикой

Шварцшильда, эта сингулярность ослабевает и становится линейной по отклонению, переходя в результат работы [1]. Поскольку полная энергия системы P^0, как мы доказали выше, сохраняется, а до коллапса была конечной, то она и будет оставаться конечной. Поэтому при гравитационном сжатии должна стремиться к положительной бесконечности и полная энергия вещества и гравитационного поля внутри коллапсирующего тела. Но, как отмечалось в [1], тело конечной массы в принципе не может иметь бесконечную внешнюю потенциальную энергию, поэтому такая ситуация невозможна, поскольку она противоречит принципу причинности Гильберта и закону сохранения энергии. Отсюда возникает две возможности: первая — когда происходит остановка коллапса при некотором фиксированном радиусе, превышающем радиус Шварцшильда. Поскольку обычно считается, что статические тела большой массы не могут существовать, то эта возможность для таких тел исключается. Во втором случае после остановки гравитационного сжатия начинается стадия расширения. В этом случае энергия внутри тела уменьшается, а вместе с ней убывает и потенциальная гравитационная энергия внешнего поля. Так, именно благодаря тензорному характеру энергии-импульса гравитационного поля $t_g^{\mu\nu}$ в РТГ возникает *универсальный механизм* остановки процесса гравитационного сжатия тела большой массы ($M > 3M_\odot$) с последующим процессом расширения тела. Когда термоядерные ресурсы звезды исчерпаны, согласно РТГ из-за наличия свойства упругости гравитационного поля коллапсирующая звезда не может уйти под свой гравитационный радиус.

Аналогичные результаты дает вычисление сохраняющегося в силу азимутальной симметрии керровской метрики момента количества вращения источника и гравитационного поля. Введем тензор объемной плотности момента импульса вещества и гравитационного поля:

$$m^{\mu\nu\sigma} = x^\mu(\widehat{T}^{\nu\sigma} + \widehat{t}_g^{\nu\sigma}) - x^\nu(\widehat{T}^{\mu\sigma} + \widehat{t}_g^{\mu\sigma}).$$

Он удовлетворяет дифференциальному закону сохранения

$$D_\sigma m^{\mu\nu\sigma} = 0,$$

который в галилеевых координатах пространства Минковского принимает вид

$$\partial_\sigma m^{\mu\nu\sigma} = 0.$$

Разбивая полную 4-дивергенцию на пространственную и временную части, получим

$$m^{\mu\nu 0}_{,0} = -m^{\mu\nu k}_{,k}.$$

Теперь проинтегрируем по трехмерному объему

$$\frac{d}{dt}\int m^{\mu\nu 0}\,dV = -\int m^{\mu\nu k}_{,k}\,dV.$$

Объемный интеграл в правой части по теореме Остроградского–Гаусса можно преобразовать в поверхностный по ограничивающей этот объем поверхности:

$$\frac{d}{dt}\int m^{\mu\nu 0}\,dV = -\int m^{\mu\nu k}\,dS_k.$$

Введем 4-тензор момента импульса системы вещество + гравитационное поле

$$M^{\mu\nu} = \int m^{\mu\nu 0}\, dV.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} M^{\mu\nu} = -\int m^{\mu\nu k}\, dS_k = -\int m^{\mu\nu R}\, dS_R.$$

Так как вращение происходит вокруг оси z, то единственной отличной от нуля компонентой момента будет

$$M^{xy} = \int m^{xy0}\, dV = \int [x(\widehat{T}^{y0} + \widehat{t}_g^{y0}) - y(\widehat{T}^{x0} + \widehat{t}_g^{x0})]\, dV.$$

Для нее интегральный закон сохранения запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dt} M^{xy} = -\int m^{xyR}\, dS_R = -\int [x(\widehat{T}^{yR} + \widehat{t}_g^{yR}) - y(\widehat{T}^{xR} + \widehat{t}_g^{yR})]\, dS_R.$$

Очевидно, что правая часть представляет собой поток момента импульса системы через ограничивающую объем поверхность. Выберем в качестве такой поверхности бесконечно удаленную поверхность $R \to \infty$. Поскольку все вещество локализовано в центре, на этой поверхности $T^{\varepsilon\lambda} = 0$. Так как площадь растет как R^2 при $R \to \infty$, то для того чтобы интеграл стремился к нулю, подынтегральное выражение должно убывать быстрее, чем $1/R^2$. Непосредственное вычисление показывает, что $\widehat{t}_g^{iR}$ убывает как $1/R^4$, и, следовательно, подынтегральное выражение убывает как $1/R^3$. Поэтому 4-тензор полного момента импульса системы M^{xy} сохраняется во времени.

Теперь найдем момент количества вращения гравитационного поля, находящегося между сферами с радиусами R_1 и R_2,

$$M^{xy}(R_1, R_2) = \int [x\widehat{t}_g^{y0} - y\widehat{t}_g^{x0}]\, dV = \int (x^2 + y^2)\widehat{t}_g^{\varphi 0}\, dV = \int (R^2 + a^2) \sin^2\theta\, \widehat{t}_g^{\varphi 0}\, dV =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_{R_1}^{R_2} \widehat{t}_g^{\varphi 0} (R^2 + a^2)(R^2 + a^2\cos^2\theta) \sin^3\theta\, dR\, d\theta\, d\varphi,$$

где

$$\widehat{t}^{\varphi 0} = -\frac{m^2 a}{8\pi (R^2 + a^2)(R^2 + a^2\cos^2\theta)^3 (R^2 - R_g^2)} \left\{ \frac{1}{R^2 - R_g^2} (4a^6 - 6a^4 m^2 + \right.$$
$$+ 12R^2 a^4 + Rma^4 - a^2 Rm^3 + 3R^3 a^2 m - 11R^2 a^2 m^2 + 2a^2 m^4 + 12R^4 a^2 +$$
$$\left. + 2R^5 m + 4R^6 + 3m^4 R^2 - 5R^4 m^2) + ma^2\cos^2\theta (R + m) \right\}.$$

Как и в случае энергии, с помощью левой части (8) можно найти явное выражение для полного момента количества вращения вещества и гравитационного поля шара радиуса R, сведя соответствующий интеграл к поверхностному:

$$M^{xy}(0,R) = \oint [x\widehat{h}^{y0\alpha} - y\widehat{h}^{x0\alpha} + \widehat{\lambda}^{x0\alpha y}]\, dS_\alpha =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} [(R^2+a^2)\widehat{h}^{\varphi 0R} + R\widehat{\lambda}^{R0R\varphi}](R^2+a^2\cos^2\theta)\sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{m}{4aR(R^2-R_g^2)}\times$$
$$\times\Big\{-m^3a^2 + 2ma^4 - 3a^2Rm^2 - 2mR^4 + m^2R^3 + 3m^3R^2 + 4R^3a^2 + 4Ra^4 +$$
$$+\frac{m(R^2+a^2)}{aR}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{R}\right)(2R^4 - mR^3 + 4a^2R^2 - 3R^2m^2 + Ra^2m - a^2m^2 + 2a^4)\Big\}. \qquad (12)$$

Здесь

$$\widehat{\lambda}^{\varepsilon\lambda\alpha\beta} = \widehat{g}^{\varepsilon\lambda}\widehat{g}^{\alpha\beta} - \widehat{g}^{\varepsilon\alpha}\widehat{g}^{\lambda\beta}.$$

Полный сохраняющийся момент равен

$$M^{xy}(0,\infty) = ma.$$

Наконец, момент количества вращения гравитационного поля в вакууме будет равен

$$M^{xy}(R,\infty) = ma - M^{xy}(0,R) = ma - \frac{m}{4aR(R^2-R_g^2)}\times$$
$$\times\Big\{-m^3a^2 + 2ma^4 - 3a^2Rm^2 - 2mR^4 + m^2R^3 + 3m^3R^2 + 4R^3a^2 + 4Ra^4 +$$
$$+\frac{m(R^2+a^2)}{aR}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{R}\right)(2R^4 - mR^3 + 4a^2R^2 - 3R^2m^2 + Ra^2m - a^2m^2 + 2a^4)\Big\}.$$

Разлагая в окрестности сингулярности $R = R_g = \sqrt{m^2-a^2}$ в ряд Лорана и удерживая только члены с отрицательными степенями, найдем

$$M^{xy}(R,\infty) = \frac{m^5 r_g}{8aR_g^2(R-R_g)}\left[-1 + \frac{1}{aR_g}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{R_g}\right)(2R_g^2 - m^2)\right] + o\left(\frac{1}{R-R_g}\right).$$

Видно, что при приближении размера коллапсирующего тела к горизонту событий R_g момент вращения гравитационного поля вне тела стремится к положительной бесконечности обратно пропорционально отклонению его поверхности от поверхности горизонта. В силу сохранения полного момента M должен стремиться к отрицательной бесконечности и полный момент вращения вещества и гравитационного поля внутри коллапсирующего тела. Эта ситуация также невозможна, поскольку она противоречит принципу причинности Гильберта и закону сохранения момента количества движения. Отсюда опять-таки возникают две возможности остановки коллапса, о которых говорилось выше. Обе они исключают гравитационный коллапс под горизонт, но не запрещают возможности существования объектов больших масс. Однако последние нестатические и находятся в состоянии гравитационного сжатия или расширения. Поэтому гравитационный коллапс невозможен, а следовательно, невозможно и образование черных дыр.

Таким образом, следуя [1], мы также приходим к заключению: невозможность гравитационного коллапса возникает не только из-за наличия массы покоя гравитона, но и благодаря тензорной природе энергии-импульса гравитационного поля.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А. А. Логунову и М. А. Мествиришвили за ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Структура интеграла движения и невозможность гравитационного коллапса // ТМФ. 2012. Т. 171, № 1. С. 150–153.
2. *Kerr R. P.* // Phys. Rev. Lett. 1963. V. 11. P. 237–238.
3. *Карабут П. В., Чугреев Ю. В.* Единственность внешнего аксиально-симметричного решения для вращающегося, заряженного тела в релятивистской теории гравитации // ТМФ. 1989. Т. 79, № 3. С. 394–403.
4. *Власов А. А., Логунов А. А.* Внешнее аксиально-симметричное решение для вращающегося тела в релятивистской теории гравитации // ТМФ. 1987. Т. 70, № 2. С. 171–180.
5. *Карабут П. В., Чугреев Ю. В.* Внешнее аксиально-симметричное решение для вращающегося, заряженного тела в релятивистской теории гравитации // ТМФ. 1989. Т. 78, № 2. С. 305–313.
6. *Чугреев Ю. В.* О принципе причинности в релятивистской теории гравитации // ТМФ. 1991. Т. 88, № 1. С. 459–466.
7. *Логунов А. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2011.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Физматлит, 2001.

Получено 23 октября 2012 г.