Письма в ЭЧАЯ. 2018. Т. 15, № 7(219). С. 675–680

ФИЗИКА И ТЕХНИКА УСКОРИТЕЛЕЙ

АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЛОВУШКЕ ЧАРЛЬТОНА

А. Д. Овсянников [а, 1], *И. Н. Мешков* [б], *Д. А. Овсянников* [а], *М. К. Есеев* [в, г]

[а] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

[б] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[в] Федеральный исследовательский центр комплексного изучения Арктики им. академика Н. П. Лаверова РАН, Архангельск, Россия

[г] Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, Архангельск, Россия

Исследуется динамика заряженных частиц в ловушке Пеннинга–Малмберга–Сурко с вращающимся электрическим полем [1–3] (ловушка Чарльтона). Построены и реализованы два разных алгоритма определения характеристических показателей Ляпунова для решений нестационарной системы, описывающей динамику частиц в ловушке. Это позволяет строить приближенные аналитические решения. Проведена проверка асимптотической устойчивости движений заряженных частиц при выборе разных параметров системы и их соотношений.

The dynamics of charged particles in the Penning–Malmberg–Surko trap with a rotating electric field [1–3] (the Charlton trap) is investigated. Two different algorithms for determining Lyapunov characteristic exponents for solutions of a nonstationary system describing the dynamics of particles in a trap are constructed and realized. This allows us to construct approximate analytical solutions. The asymptotic stability of motions of charged particles is checked for a different choice of the system parameters and their relations.

PACS: 29.27.Bd; 02.30.Yy; 02.60.Cb

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается модификация ловушки Пеннинга — ловушка Пеннинга–Малмберга–Сурко с вращающимся электрическим полем вдоль всей ловушки. Необходимо определить характер движения отдельных частиц в электрическом (1) и магнитном (2) полях ловушки. Для этого используется подход, связанный с понятием асимптотической устойчивости по Ляпунову. В случае постоянной матрицы системы вопрос об асимптотической устойчивости системы сводится к проверке отрицательности вещественных частей всех собственных значений матрицы системы, которые могут быть вычислены непосредственно. Проверка асимптотической устойчивости системы (3)–(5) осложнена тем, что матрица системы непостоянная (зависит от времени). В нашем случае необходимо найти так называемые характеристические показатели Ляпунова для

[1] E-mail: a.ovsyannikov@spbu.ru, ovs74@mail.ru

системы (3)–(5). Характеристический показатель Ляпунова $\chi[f]$ определяется степенью роста функции

$$\chi[f] = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|f(t)|}{t}.$$

Если $\chi[f] = \alpha \neq \pm\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \dfrac{|f(t)|}{\mathrm{e}^{(\alpha-\varepsilon)t}} = +\infty$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{|f(t)|}{\mathrm{e}^{(\alpha+\varepsilon)t}} = 0$.

Динамика заряженных частиц рассматривается в электрическом поле

$$\Phi(z) = \frac{m}{q}\frac{\omega_z^2}{2}\left(z^2 - \frac{r^2}{2}\right) + \frac{m}{q} azr \cos(\theta + \omega_r t) \tag{1}$$

и однородном продольном магнитном поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_z B, \tag{2}$$

где m и q — масса и заряд частицы; ω_z — частота продольных колебаний частицы в аксиально-симметричном электрическом поле электродов ловушки; a и ω_r — параметры, характеризующие амплитуду и частоту вращающегося электрического дипольного поля, асимметричного по z (Rotating Wall, RW); θ, z и r — угловая, осевая и радиальная координаты с осями, согласующимися с осями симметрии электродов ловушки. Движение заряженных частиц в этих полях описывается следующей системой уравнений:

$$\ddot{x} = 0{,}5\omega_z^2 x - az\cos(\omega_r t) + \Omega_c \dot{y} - k\dot{x}, \tag{3}$$

$$\ddot{y} = 0{,}5\omega_z^2 y + az\sin(\omega_r t) - \Omega_c \dot{x} - k\dot{y}, \tag{4}$$

$$\ddot{z} = -\omega_z^2 z - k\dot{z} - a\left(x\cos(\omega_r t) - y\sin(\omega_r t)\right). \tag{5}$$

Здесь $\Omega_c = qB/m$ есть циклотронная частота частицы, параметр k представляет силу сопротивления, связанную с рассеянием частиц молекулами буферного газа ловушки.

Система (3)–(5) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с помощью новых переменных $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_6)'$: $m_1 = x$, $m_2 = y$, $m_3 = z$, $m_4 = \dot{x}$, $m_5 = \dot{y}$, $m_6 = \dot{z}$:

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{m}. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{A}(t) = \mathbf{D} + a\mathbf{G}(t)$, где $\mathbf{D}$ — постоянная матрица, $\mathbf{G}$ — периодическая матрица:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega_z^2/2 & 0 & 0 & -k & \Omega_c & 0 \\ 0 & \omega_z^2/2 & 0 & -\Omega_c & -k & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_z^2 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\omega_r t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\omega_r t) & 0 & 0 & 0 \\ -\cos(\omega_r t) & \sin(\omega_r t) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате линейная дифференциальная система будет периодической с периодом $T = 2\pi/\omega_r$.

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ

Как известно, периодическая линейная система приводится к системе с постоянной матрицей. Однако приведение такой системы непосредственно к системе с постоянной матрицей на практике затруднено тем, что для построения соответствующего преобразования Ляпунова в общем случае требуется знать фундаментальную матрицу периодической системы. Поэтому для анализа асимптотической устойчивости системы необходимо построить алгоритм приближенного вычисления характеристических показателей ее решений. Соответствующий алгоритм сводится к приближенному вычислению мультипликаторов системы (6).

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений (6) с непрерывной периодической матрицей системы: $\mathbf{A}\,(t+T) \equiv \mathbf{A}\,(t)$, $T > 0$. Пусть матрица $\mathbf{X}\,(t)$ есть фундаментальная матрица системы (6), такая что $\mathbf{X}\,(0) = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Матрица $\mathbf{X}\,(T)$ называется матрицей монодромии. Собственные значения ρ_j $\left(j = \overline{1,6}\right)$ матрицы монодромии $\mathbf{X}\,(T)$ называются мультипликаторами. И пусть матрица $\mathbf{\Lambda}$ определяется как $\mathbf{\Lambda} = \ln\,\mathbf{X}\,(T)/T$. Тогда вещественные части собственных чисел матрицы $\mathbf{\Lambda}$ дают значения характеристических показателей Ляпунова системы (6):

$$\alpha_j = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{T}\ln\,\rho_j\right) = \frac{1}{T}\ln\left|\rho_j\right|. \qquad (7)$$

Разделим интервал $[0,T]$ на n равных частей: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$.

В системе (6) заменим непрерывную периодическую матрицу $\mathbf{A}\,(t)$ на кусочно-постоянную матрицу:

$$\mathbf{A}_h\,(t) = \mathbf{A}_l \equiv \mathbf{A}\,(t_l)\,, \quad t_l \leqslant t < t_{l+1}, \quad h = \Delta t_l \equiv t_{l+1} - t_l = \frac{T}{n}, \quad l = 0,\ldots,n-1.$$

Получаем формулу для приближенного вычисления матрицы монодромии:

$$\mathbf{X}\,(T) \approx \mathrm{e}^{h\mathbf{A}_{n-1}}\mathrm{e}^{h\mathbf{A}_{n-2}}\cdots\mathrm{e}^{h\mathbf{A}_0}. \qquad (8)$$

Этот алгоритм был модифицирован с учетом структуры матрицы системы. Легко заметить, что $\mathbf{G}\,(t)\;\mathbf{G}\,(\tau) = \mathbf{0}$ для любых t и τ (при этом матрица $\mathbf{G}\,(t)$ тоже перестановочна со своим интегралом), а также $\left(\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{G}\,(\tau)\;d\tau\right)^j = \mathbf{0}$, $j > 1$. Тогда

$$\exp\left(a\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{G}\,(\tau)\;d\tau\right) = \mathbf{E} + a\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{G}\,(\tau)\;d\tau. \qquad (9)$$

С использованием (9) получаем следующую формулу для приближенного расчета матрицы монодромии системы (6):

$$\mathbf{X}\,(T) \approx \exp\left(a\int\limits_{t_{n-1}}^{t_n}\mathbf{G}\,(\tau)\,d\tau\right)\mathrm{e}^{h\mathbf{D}}\times$$
$$\times\exp\left(a\int\limits_{t_{n-2}}^{t_{n-1}}\mathbf{G}\,(\tau)\,d\tau\right)\mathrm{e}^{h\mathbf{D}}\cdots\exp\left(a\int\limits_{t_0}^{t_1}\mathbf{G}\,(\tau)\,d\tau\right)\mathrm{e}^{h\mathbf{D}}. \qquad (10)$$

Уточненный алгоритм приближенного расчета мультипликаторов значительно упрощает расчеты по сравнению с общим случаем.

СВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ К УРАВНЕНИЯМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Далее при анализе решений ограничимся случаем соотношений параметров с соответствующими типичными экспериментальными значениями (предложенный метод применим при любых заданных значениях параметров системы):

$$\Omega_c \gg \omega_z \gg \omega_m \approx \frac{\omega_z^2}{2\Omega_c} \gg k > 0. \tag{11}$$

Здесь ω_m — магнетронная частота, описывающая колебания частиц в скрещенных магнитном и радиальном электрическом полях.

Для исследования устойчивости движения частиц при произвольных значениях параметра a введем новые переменные [3]:

$$u = x\cos(\omega_r t) - y\sin(\omega_r t), \tag{12}$$

$$v = x\sin(\omega_r t) + y\cos(\omega_r t). \tag{13}$$

Эта замена означает переход к равномерно вращающейся в поперечной плоскости (с частотой ω_r вокруг оси z) системе координат. Таким образом, $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$.

В результате с помощью новых переменных (12), (13) получаем стационарную (с постоянными коэффициентами) систему [3] вместо (3)–(5):

$$\ddot{u} + k\dot{u} - (\Omega_c - 2\omega_r)\,\dot{v} + \left(\omega_r\Omega_c - \omega_r^2 - \frac{\omega_z^2}{2}\right) u + k\omega_r v + az = 0, \tag{14}$$

$$\ddot{v} + k\dot{v} + (\Omega_c - 2\omega_r)\,\dot{u} + \left(\omega_r\Omega_c - \omega_r^2 - \frac{\omega_z^2}{2}\right) v - k\omega_r u = 0, \tag{15}$$

$$\ddot{z} + k\dot{z} + \omega_z^2 z + au = 0. \tag{16}$$

Характеристические числа системы (14)–(16) могут быть вычислены как корни ее характеристического полинома $\chi = \chi\left(\lambda, \omega_r, a^2\right)$ [3], а их вещественные части и есть характеристические показатели Ляпунова для системы (3)–(5).

Введем определение степени устойчивости g_χ полинома $\chi(\lambda)$:

$$g_\chi = -\gamma_\chi; \qquad \gamma_\chi = \max_{1\leqslant i\leqslant 6} \operatorname{Re}\lambda_i,$$

где λ_i — корни полинома $\chi(\lambda)$, γ_χ — их максимальная вещественная часть.

Отметим, что объем, занимаемый траекториями системы (3)–(5) в шестимерном фазовом пространстве, всегда будет сжиматься, однако это не гарантирует стремления к нулю всех компонент решений системы и их асимптотическую устойчивость.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Основные параметры системы, использованные при расчетах:

1) $k = 1400$ с$^{-1}$;

2) $a \leqslant 5 \cdot 10^{14}$ с$^{-2}$;

3) $\Omega_c = 4{,}4$ Град/с;

4) $\omega_z = 59{,}6$ Мрад/с;

5) $\omega_r^- = 60$ Мрад/с — «эффективная для сжатия частота RW поля» (диапазон A: 60 МГц $\pm 1\,\%$ с шагом $0{,}05\,\%$; диапазон B: 60 МГц $\pm 10\,\%$ с шагом $1\,\%$);

6) $\omega_r^+ = -59{,}1963$ Мрад/с — «эффективная для расширения частота RW поля» (диапазон C: $-59{,}1963$ МГц $\pm 1\,\%$ с шагом $0{,}05\,\%$).

На рис. 1 и 2 представлены графики зависимости максимума вещественной части характеристических чисел системы (14)–(16) от параметра a при различных фиксированных значениях ω_r. Для различных значений параметров a и ω_r получены как асимптотически устойчивые, так и неустойчивые варианты реализации системы.

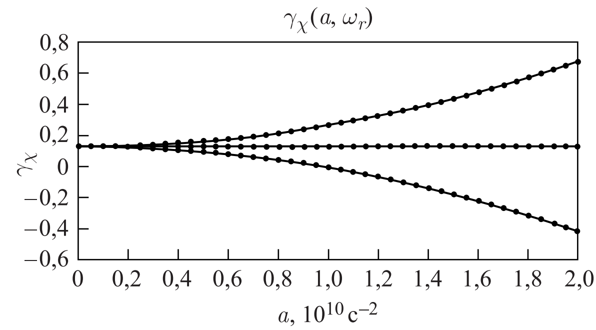

Рис. 1. Графики $\gamma_\chi\,(a)$ для ω_r из диапазонов A и C. Средний график соответствует всем графикам с частотами $\omega_r \neq \omega_r^\pm$, так как они перекрывают друг друга, $0 \leqslant a \leqslant 2 \cdot 10^{10}$ с$^{-2}$

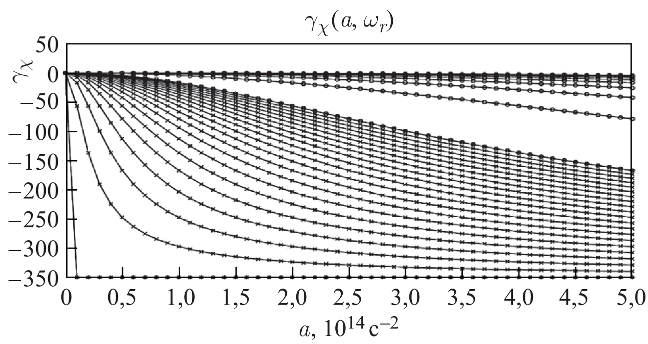

Рис. 2. Графики $\gamma_\chi\,(a)$ для ω_r из диапазонов A и B (крестики и кружки соответственно; звездочки соответствуют $\omega_r^- = 60$ Мрад/с, $0 \leqslant a \leqslant 5 \cdot 10^{14}$ с$^{-2}$)

Нижние графики на рис. 1 и 2 соответствуют частоте ω_r^-, а верхний график на рис. 1 соответствует ω_r^+. Будем называть эти частоты «эффективными для сжатия и расширения» соответственно, поскольку они обеспечивают системе максимальную или минимальную (тоже соответственно) степень устойчивости по сравнению с другими значениями ω_r при фиксированном a. Можно получить их значения из анализа чувствительности характеристических чисел по отношению к ω_r с использованием выражения $\frac{\partial\lambda}{\partial\left(a^2\right)} = -\frac{\partial\chi/\partial\left(a^2\right)}{\partial\chi/\partial\lambda}$, где $\lambda = \lambda\left(\omega_r, a^2\right)$ — характеристические числа системы (14)–(16): $\omega_r^{\pm} = \mp\sqrt{\omega_z^2 - k^2/4} + \omega_m$. Найденная формула близка к формуле в работе [1]. На рис. 1 и 2 также показано, что степень устойчивости системы (14)–(16) очень чувствительна к выбору частоты ω_r вблизи ее «эффективных» значений. В случае даже малых отклонений от них частоты вращающегося поля требуется существенное увеличение амплитуды a вращающегося поля для обеспечения сравнимого уровня степени устойчивости. Однако при превышении некоторой амплитуды a система всегда становится неустойчивой. Расчеты показывают, что при значительных отклонениях частоты вращающегося поля от «эффективных» значений степень устойчивости системы почти не меняется (остается близкой к нулю) для широкого диапазона амплитуд вращающегося поля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалась динамика заряженных частиц в ловушке Пеннинга–Малмберга–Сурко с вращающимся электрическим полем. Построены и реализованы два различных алгоритма для нахождения характеристических показателей Ляпунова для решений нестационарной системы, описывающей динамику частиц в ловушке. Проведены предварительные расчеты для различных наборов значений параметров системы. Сделаны предварительные оценки диапазона параметров, обеспечивающих асимптотическую устойчивость. Для выбора наиболее эффективных сочетаний параметров требуются дальнейшие вычисления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Isaac C.A.* Motional Sideband Excitation Using Rotating Electric Fields // Phys. Rev. A. 2013. V. 87. P. 043415-1–043415-7.
2. *Eseev M.K., Meshkov I.N.* Traps for Storing Charged Particles and Antiparticles in High Precision Experiments // Phys. Usp. 2016. V. 59. P. 304–317.
3. *Meshkov I.N., Ovsyannikov A.D., Ovsyannikov D.A., Eseev M.K.* Study of the Stability of Charged Particle Dynamics in a Penning–Malmberg–Surko Trap with a Rotating Field // Dokl. Physics. 2017. V. 62, No. 10. P. 457–460; doi: 10.1134/S1028335817100093 (Dokl. Akad. Nauk. 2017. V. 476, No. 6. P. 630–634).