

## ФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕНСИВНЫХ КВАЗИЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

*В. А. Сыровой*<sup>1</sup>

Всероссийский электротехнический институт — филиал ФГУП РФЯЦ–ВНИИТФ  
им. акад. Е. И. Забабахина, Москва

Обсуждаются проблемы формирования заряженных двумерных и трехмерных интенсивных релятивистских пучков для различных геометрических конфигураций потока. Исследованы как точные решения в замкнутой форме, так и результаты параксиального подхода. Анализируются модели эллиптических пучков с выводом о несоответствии классических представлений и практических задач формирования и транспортировки подобных объектов.

The 2D and 3D problems of formation of intensive relativistic beams of charged particles are discussed. The exact solutions in closed form and the results of paraxial approximation are investigated. The model of elliptic beams is analyzed with conclusion about noncorrespondence of the classical conceptions and practical tasks of formation and transport of beams with such cross section.

PACS: 41.85.Ct

### ВВЕДЕНИЕ

Наибольший интерес после пучков с круглым сечением, в течение многих десятилетий привлекающих внимание исследователей, представляют потоки с прямоугольным контуром, часто аппроксимируемым эллипсом с соответствующими полуосями. Областью приложения электронных или ионных пучков подобной конфигурации являются сильноточные ускорители, системы накачки газовых лазеров и плазмохимических реакторов с прямоугольным окном, технологические установки широкого профиля. Последние десятилетия характеризуются взрывным количеством публикаций по использованию ленточных пучков в приборах СВЧ-электроники, включая случай релятивистских скоростей. Значительное количество работ посвящено наиболее мощному прибору СВЧ — гиротрону в его планарном варианте, используемому, в частности, в проектах термоядерного синтеза. Для гиротронов наличие сносовой скорости может приводить к деформации первоначально прямоугольного сечения в параллелограмм.

Повышение мощности перечисленных приборов или возрастание требований к точности формирования пучка с высокой компрессией, вводимого в узкий канал, приводят к необходимости качественного формирования торцевой области ленточных пучков.

---

<sup>1</sup>E-mail: olga1606@rambler.ru

В нулевом приближении в системе координат, связанной с пространственной осью, пучок с медленно деформируемым, но сохраняющим вид профилем может рассматриваться как квазицилиндр (например, конус с произвольным сечением с небольшим углом раствора  $\theta_0(u)$  в цилиндрической системе, являющийся «истинным цилиндром» в сферических координатах при любых значениях  $\theta_0$ ). В эту категорию попадают потоки заряженных частиц, более близкие к приложениям по сравнению с идеальными цилиндрическими и коническими пучками с прямолинейными траекториями или «тороидальными цилиндрами» с траекториями-окружностями. Вместе с тем точные решения для цилиндрической геометрии дают представление о формировании торцевых областей ленточных пучков конечной ширины. Сложный характер трехмерных проблем часто делает параксиальное приближение единственно возможным. В этом случае упоминавшиеся точные решения позволяют путем сравнения установить уровень ошибки и наметить пути к ее устранению.

Цель обзора — изложение результатов теории формирования цилиндрических и квазицилиндрических потоков заряженных частиц, имеющихся к настоящему времени. Основное внимание уделено решениям в конструктивной форме, позволяющим исследовать их структуру и удобным для выполнения численных расчетов. Рассмотрению трехмерных задач предшествует раздел, относящийся к формированию осесимметричных структур, в частности, цилиндрических и конических пучков с круглым сечением. Помимо униполярных потоков, образованных частицами одного знака, внимание уделено и биполярным вариантам со встречным движением компонент с различающимися знаками зарядов.

Приведенные соотношения даны в нормировках, исключающих все физические константы используемой системы единиц. Результаты, таким образом, справедливы как для электронных, так и для ионных пучков в случае униполярных потоков, поэтому встречающиеся в тексте пары «катод–электрон» могут быть заменены на «эмиттер–ион»<sup>1</sup>.

В основу рассмотрения положена гидродинамическая модель интенсивного пучка заряженных частиц как сплошной среды, подверженной действию самосогласованного электромагнитного поля. Поэтому будем говорить не только о пучках, но и о течениях, или потоках.

## 1. ФОРМУЛА РИМАНА

Одной из составных частей решения как двумерных, так и трехмерных проблем является метод Римана, модифицированный для уравнения эллиптического типа [1, 2]. Рассмотрим неоднородное уравнение с коэффициентами, зависящими от  $x, y$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + A \frac{\partial \Phi}{\partial x} + B \frac{\partial \Phi}{\partial y} + C \Phi = F. \quad (1)$$

Пусть начальные данные  $\Phi_e$  и  $(\partial \Phi / \partial n)_e$  известны на линии  $\Gamma$ , определенной параметрическими уравнениями

$$x = x_e(u), \quad y = y_e(u). \quad (2)$$

<sup>1</sup>Плазменный источник с сеточной фиксацией.

Предположим, что нам известно «распрямляющее» отображение с однозначной сеткой ортогональных криволинейных координат  $u, v$  и конформной метрикой (равные коэффициенты Ляме  $h_1 = h_2 = h$ ), переводящее контур  $\Gamma$  в линию  $v = 0$ :

$$\begin{aligned} x + iy &= x_e(w) + iy_e(w) = x(u, v) + iy(u, v), & w &= u + iv, \\ x_e(u) + iy_e(u) &= x(u, 0) + iy(u, 0). \end{aligned} \tag{3}$$

В комплексных переменных  $w = u + iv$ ,  $w^* = u - iv$  уравнение (1) преобразуется к канонической форме уравнений гиперболического типа, для которых собственно и был разработан метод:

$$\begin{aligned} L\Phi &\equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w \partial w^*} + a \frac{\partial \Phi}{\partial w} + a^* \frac{\partial \Phi}{\partial w^*} + c\Phi = f, \\ a &= \frac{1}{4}h^2(A + iB) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right), & c &= \frac{1}{4}h^2 C, & f &= \frac{1}{4}h^2 F, \\ h^2 &= \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 = \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Функция Римана  $G$  удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\bar{L}G \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial w \partial w^*} - \frac{\partial}{\partial w}(aG) - \frac{\partial}{\partial w^*}(a^*G) + cG = 0 \tag{5}$$

и следующим условиям на характеристиках  $CP, CQ$ , проходящих через точку наблюдения  $C$  (рис. 1):

$$\begin{aligned} CQ : w^* &= w_c^*; & \frac{\partial G}{\partial w} &= a^* G; \\ CP : w &= w_c; & \frac{\partial G}{\partial w^*} &= aG. \end{aligned} \tag{6}$$

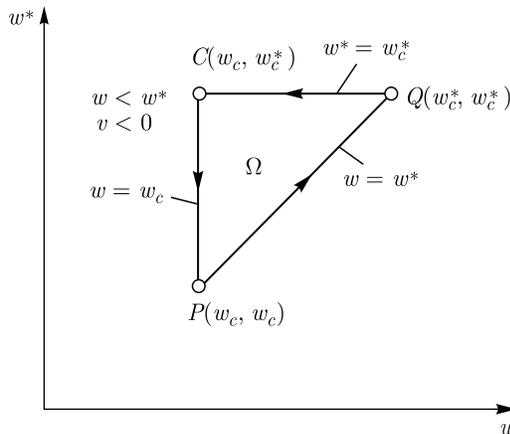


Рис. 1. Область решения задачи Коши для уравнений эллиптического типа в комплексных координатах  $w, w^*$

Если  $G$  — некоторое решение уравнения (5), для которого выполнены требования (6) и которое обращается в единицу в точке наблюдения

$$G_c = 1, \quad (7)$$

то значение искомой функции  $\Phi_c$  в произвольной точке может быть выражено с помощью формулы Римана через  $G$  и функции  $\Phi$ ,  $\partial\Phi/\partial w$ ,  $\partial\Phi/\partial w^*$  на  $QP$ , т. е. через известные условия Коши:

$$\begin{aligned} \Phi_c = \frac{1}{2} [(\Phi G)_Q + (\Phi G)_P] + \frac{1}{2} \int_{QP} \left\{ \left[ G \frac{\partial\Phi}{\partial w} - \Phi \frac{\partial G}{\partial w} + 2a^* \Phi G \right] dw - \right. \\ \left. - \left[ G \frac{\partial\Phi}{\partial w^*} - \Phi \frac{\partial G}{\partial w^*} + 2a \Phi G \right] dw^* \right\} - \iint_{\Omega} G f dw dw^*. \quad (8) \end{aligned}$$

После возвращения к действительным переменным формула Римана принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi = \operatorname{Re} \left\{ (\Phi G)_P(u + iv) + \int_0^v \left[ G \frac{\partial\Phi}{\partial v} - \Phi \frac{\partial G}{\partial v} + 4\Phi G \operatorname{Im} a \right]_e (u + i\xi) d\xi + \right. \\ \left. + 4 \int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} G f(u + i\xi, \eta) d\xi \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Точка  $C$  в (9) имеет координаты  $u$ ,  $v$ , нижний индекс  $e$  относит соответствующие величины к контуру  $\Gamma$ , в круглых скобках указаны аргументы стоящих перед скобками функций.

Заметим, что если в случае гиперболических уравнений метод Римана позволял построить решение в треугольнике  $CPQ$  (см. рис. 1), то мнимые характеристики эллиптического уравнения «выплескивают» решение в полупространство, определяемое внешностью кривой  $\Gamma$ .

## 2. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПОТОКИ

**2.1. Общее решение задачи Коши.** Уравнение Лапласа для осесимметричных систем имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} = 0. \quad (10)$$

Граница пучка в меридиональной плоскости  $z$ ,  $R$  задается с помощью соотношений

$$\begin{aligned} z = Z_e(u), \quad R = R_e(u); \quad z + iR = Z_e(w) + iR_e(w), \\ \beta + i\alpha = Z'_e(w) + iR'_e(w), \quad h^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \alpha_e = R'_e(u), \quad \beta_e = Z'_e(u). \end{aligned} \quad (11)$$

Новая искомая функция

$$W = \Phi \sqrt{R}, \quad (12)$$

как и функция Римана  $G$ , удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$\frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{W}{4R^2} = 0. \quad (13)$$

Уравнение для  $G$  имеет частное решение, для которого выполнены необходимые условия, в виде гипергеометрической функции Гаусса:

$$G = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda\right), \quad \lambda = -\frac{r^2}{4RR_c}, \quad r^2 = (z - z_c)^2 + (R - R_c)^2. \quad (14)$$

Применение формулы Римана (9) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) = \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{R_e(w)}{R} \right]^{1/2} \varphi_e(w) + \int_0^v \left( \frac{R_e}{R} \right)^{1/2} \left[ \left( \varphi_{ve} + \frac{\beta_e \varphi_e}{2R_e} \right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda_e\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\varphi_e}{8R_e R} \left( \frac{R^2 - R_e^2 + (Z_e - z)^2}{2R_e} \beta_e + (Z_e - z)\alpha_e \right) F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \lambda_e\right) \right] d\xi \right\}, \quad (15) \\ w = u + iv, \quad \zeta = u + i\xi, \quad \lambda_e = -\frac{(R_e - R)^2 + (Z_e - z)^2}{4R_e R}. \end{aligned}$$

Функции под интегралом с индексом  $e$  зависят от  $\zeta$ ;  $z$ ,  $R$  в соответствии с (11) — функции  $u$ ,  $v$ ;  $\varphi_e$ ,  $\varphi_{ve} \equiv (\partial\varphi/\partial v)_e$  — потенциал и его производная при  $v = 0$ .

В релятивистском случае на границе пучка необходимо обеспечить не только непрерывность потенциала и его производной, но и компонент напряженности магнитного поля  $H_z$ ,  $H_R$ . Функция  $A = RA_\psi$ , где  $A_\psi$  — азимутальная компонента векторного потенциала, вне пучка удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial z} \right) = 0, \quad H_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{R} \frac{\partial A}{\partial R}. \quad (16)$$

Введение новой искомой функции

$$W = A/\sqrt{R} \quad (17)$$

сводит уравнение (16) к виду (13) с коэффициентом  $(-3/4)$  вместо  $(1/4)$  перед последним слагаемым. Функцией Римана для этого случая будет гипергеометрическая функция Гаусса с другим набором индексов:

$$G = F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; \lambda\right). \quad (18)$$

Выражение для  $A$ , аналогичное формуле (15), имеет вид

$$\begin{aligned} A(u, v) = \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{R}{R_e(w)} \right]^{1/2} A_e(w) + \int_0^v \left( \frac{R}{R_e} \right)^{1/2} \left[ \left( A_{ve} - \frac{\beta_e A_e}{2R_e} \right) F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; \lambda_e\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3A_e}{8R_e R} \left( \frac{R^2 - R_e^2 + (Z_e - z)^2}{2R_e} \beta_e + (Z_e - z)\alpha_e \right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; 2; \lambda_e\right) \right] d\xi \right\}, \quad (19) \end{aligned}$$

$$A_e(u) = \int R_e(\alpha H_z - \beta H_R)_e du, \quad A_{ve}(u) = R_e(\beta H_z + \alpha H_R)_e,$$

$$H_z = \frac{1}{Rh^2} \left( \alpha \frac{\partial A}{\partial u} + \beta \frac{\partial A}{\partial v} \right), \quad H_R = \frac{1}{Rh^2} \left( \alpha \frac{\partial A}{\partial v} - \beta \frac{\partial A}{\partial u} \right).$$

В отличие от функций  $\alpha_e, \beta_e$ , аналитически продолженных под интегралом  $u \rightarrow \zeta = u + i\xi$ , функции  $\alpha, \beta$  в выражениях для  $H_z, H_R$  зависят от  $u, v$ .

Решение задачи в общем виде для потенциала  $\varphi$  электрического поля получено в работе [3], где в качестве функции Римана использован полный эллиптический интеграл первого рода

$$G = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{4RR_c}{(R + R_c)^2 + (z - z_c)^2} \right]^{1/2} K(\sigma), \quad \sigma = \left[ \frac{r^2}{(R + R_c)^2 + (z - z_c)^2} \right]^{1/2}. \quad (20)$$

Более простая форма решения (15), не содержащая в интегранде неопределенности вида 0/0, предложена в работе [4].

**2.2. Плоский торец.** Задача о формировании торца цилиндрического диода впервые сформулирована Д. Е. Рэдди — автором двух основополагающих работ в теории формирования интенсивных пучков [5, 6]. Она же возникает для цилиндрического магнетрона, классических бриллюэновских режимов, включая случай релятивистских скоростей [7], а также для бриллюэновских потоков в неоднородных внешних магнитных полях [8]. В отличие от [5], где решение построено в виде контурного интеграла в комплексной плоскости  $p$ , формула (15) дает возможность выразить общее решение для плоского торца через определенный интеграл [9].

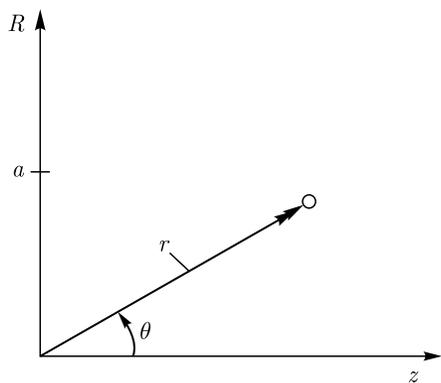


Рис. 2. Плоский торец осесимметричных систем

Пусть плоский торец осесимметричного пучка представляет собой участок оси  $R$  (рис. 2). Входящие в (15) функции определены в этом случае формулами

$$\begin{aligned} R_e &= a \exp(u), \quad Z_e = 0, \quad \alpha_e = R_e, \quad \beta_e = 0; \quad z + iR = ia \exp(w), \\ w &= u + iv = \ln[(R - iz)/a] = \ln\{\bar{r} \exp[i(\theta - \pi/2)]\}; \\ u &= \ln \bar{r}, \quad v = \theta - \pi/2, \quad \bar{r} = r/a, \\ R &= a \exp(u) \cos v, \quad z = -a \exp(u) \sin v, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $r, \theta$  — сферические координаты.

Принятая параметризация границы, отличная от более простой  $R_e = u$ , обеспечивает действительный характер аргумента  $\lambda_e$  и предельную компактность решения

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{\cos v}} \left\{ \operatorname{Re} \left[ \exp\left(\frac{iv}{2}\right) \varphi_e(w) \right] + \int_0^v \left[ \operatorname{Re} \left( \exp\left(\frac{i\xi}{2}\right) \varphi_{ve}(\zeta) \right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda_e\right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{8} \operatorname{tg} v \operatorname{Re} \left( \exp\left(\frac{i\xi}{2}\right) \varphi_e(\zeta) \right) F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \lambda_e\right) \right] d\xi \right\}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$w = u + iv, \quad \zeta = u + i\xi, \quad \lambda_e = \frac{\cos v - \cos \xi}{2 \cos v}.$$

Для релятивистских потоков магнитное поле в области торца описывается выражениями

$$A(u, v) = \sqrt{\cos v} \left\{ \operatorname{Re} \left[ \exp \left( -\frac{iv}{2} \right) A_e(w) \right] + \int_0^v \left[ \operatorname{Re} \left( \exp \left( -\frac{i\xi}{2} \right) A_{ve}(\zeta) \right) F \left( -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; \lambda_e \right) + \frac{3}{8} \operatorname{tg} v \operatorname{Re} \left( \exp \left( -\frac{i\xi}{2} \right) A_e(\zeta) \right) F \left( \frac{1}{2}, \frac{5}{2}; 2; \lambda_e \right) \right] d\xi \right\}, \quad (23)$$

$$A_e = \int R_e^2 H_{ze} du, \quad A_{ve} = R_e^2 H_{Re};$$

$$H_z = \frac{1}{r^2} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right), \quad H_R = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial A}{\partial \theta} - r \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial A}{\partial r} \right).$$

**2.3. Бриллюэновские тороиды.** Бриллюэновские потоки с единственной отличной от нуля азимутальной компонентой скорости допускают выделение тороидальной части, для которой в случае круглого сечения известно необходимое для построения решения конформное отображение [9] (рис. 3):

$$z = -d \frac{2b \exp(v) \sin u}{1 + b^2 \exp(2v) + 2b \exp(v) \cos u}, \quad (24)$$

$$R = d \frac{1 - b^2 \exp(2v)}{1 + b^2 \exp(2v) + 2b \exp(v) \cos u}.$$

Параметрические уравнения контура  $v = 0$  имеют вид

$$Z_e = -d \frac{2b \sin u}{1 + b^2 + 2b \cos u}, \quad R_e = d \frac{1 - b^2}{1 + b^2 + 2b \cos u}. \quad (25)$$

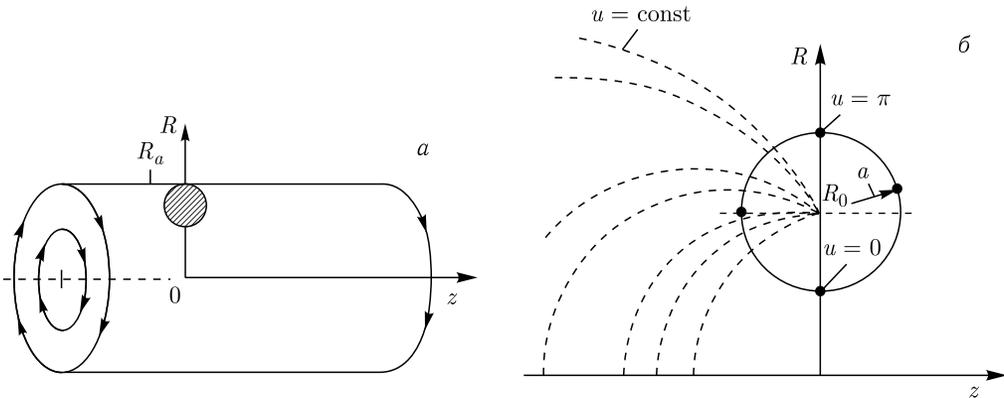


Рис. 3. Геометрия тороидального бриллюэновского пучка с круглым сечением

Константы  $b$ ,  $d$  вычисляются по заданным значениям  $a$ ,  $R_0$ :

$$b = \frac{1}{a} \left( R_0 - \sqrt{R_0^2 - a^2} \right), \quad d = \frac{1 - b^2}{1 + b^2} R_0. \quad (26)$$

Формулы (24)–(26) позволяют воспользоваться решением (15), (16).

**2.4. Решение в виде двойного интеграла.** Отличная от (15) и (16) форма решения в общем случае осесимметричных потоков [10] может быть получена, если воспользоваться сформулированным для параксиальных пучков предложением В. Т. Овчарова [11], отказываясь при этом от требования параксиальности. Решение уравнения (13) и аналогичного уравнения для  $A$  представим в виде

$$W = W_i + S, \quad (27)$$

где  $W_i$  — соответствующая функция внутри пучка. При переходе через границу потока функция  $W$  и ее производная непрерывны, если  $S$  является решением приведенных ниже уравнений с однородными условиями при  $v = 0$ :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{1}{4} \frac{S}{R^2} = -\rho\sqrt{R}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - \frac{3}{4} \frac{S}{R^2} = \frac{\rho v_\psi}{\sqrt{R}}. \quad (28)$$

Указанными свойствами обладает функция  $S$ , определяемая двойным интегралом в формуле Римана (9):

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_i - \frac{1}{\sqrt{R}} \operatorname{Re} \int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} \rho\sqrt{R} h^2 F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda\right) d\xi, \\ A &= A_i + \sqrt{R} \operatorname{Re} \int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} \frac{\rho v_\psi}{\sqrt{R}} h^2 F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; 1; \lambda\right) d\xi, \\ \lambda &= -\frac{[R(\zeta, \eta) - R(u, v)]^2 + [z(\zeta, \eta) - z(u, v)]^2}{4R(\zeta, \eta)R(u, v)}, \quad \zeta = u + i\xi. \end{aligned} \quad (29)$$

Функции переменных  $u$ ,  $v$  под интегралами подвергнуты аналитическому продолжению по первому аргументу  $u \rightarrow \zeta$  и замене  $v \rightarrow \eta$ .

Рассмотренный подход отличается от абстрактной математической постановки задачи Коши [3], так как предполагает наличие физического объекта — пучка заряженных частиц, потенциалы  $\varphi$ ,  $A$  для которого удовлетворяют неоднородным уравнениям (уравнению Пуассона для  $\varphi$ ).

**2.5. Окрестность катода для произвольных осесимметричных систем.** Общее выражение для потенциала (15), описывающее произвольный осесимметричный пучок, в комбинации с теорией антипараксиальных разложений [12–18] позволяет построить локальное решение в случае  $\rho$ - и  $T$ -режимов эмиссии с искривленного катода с неоднородным токоотбором в присутствии внешнего неоднородного магнитного поля и при учете релятивистских эффектов. В нерелятивистском случае при нулевом магнитном поле граница пучка и нулевая эквипотенциаль в окрестности катода

имеют следующие уравнения в локальных декартовых координатах  $X$ ,  $Y$  (нормаль, касательная к катоду в точке старта):

$$Y = \left( \frac{1}{10} \frac{J'_p}{J} \right) X^2 + \left[ \left( \frac{4}{150} \kappa_1 - \frac{1}{150} \kappa_2 \right) \frac{J'_p}{J} + \frac{1}{30} T'_p \right] X^3, \quad T = \kappa_1 + \kappa_2; \quad (30)$$

$$Y = \left( \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right) X + \frac{1}{\cos^2 3\pi/8} \left[ -\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \left( \frac{4}{5} \kappa_1 + \frac{1}{40} \kappa_2 \right) + \frac{8}{35} \frac{J'_p}{J} - \frac{9}{56} k_2 \right] X^2.$$

Здесь  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  — главные кривизны катода;  $k_2$  — главная кривизна трубки тока, отвечающая за осесимметричность;  $J'_p$ ,  $T'_p$  — физические компоненты градиента плотности тока эмиссии и полной кривизны катода.

Кривизна нулевой эквипотенциали определена формулой

$$k_0 = - \left( \frac{4}{5} \kappa_1 + \frac{1}{20} \kappa_2 \right) \sin \frac{3\pi}{8} + \left( \frac{9}{35} \frac{J'_p}{J} - \frac{9}{28} k_2 \right) \cos \frac{3\pi}{8}. \quad (31)$$

Угол наклона кривой  $\varphi = 0$  в  $\rho$ -режиме эмиссии равен  $67,5^\circ$  вне зависимости от формы катода и распределений физических параметров на нем. Для плоского катода при  $k_2 = 0$  возмущение кривизны  $\delta k_0$  вызывает почти шестикратный отклик относительного градиента плотности тока

$$\delta \left( \frac{J'_p}{J} \right) = \left[ \left( \frac{16}{35} \right) \sin \left( \frac{\pi}{8} \right) \right]^{-1} \approx 5,7, \quad (32)$$

приводящий в соответствии с (30) к нарушению геометрии течения.

### 3. ФОРМИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПУЧКА

**3.1. Эмиссия в  $\rho$ -режиме.** Для цилиндрической вырезки из плоского нерелятивистского диода (решение Чайлда–Ленгмюра) параметрические уравнения границы и условия Коши на ней определены формулами

$$z_e = u, \quad R_e = R_0, \quad \varphi_e = z^{4/3}, \quad \varphi_{ve} = 0. \quad (33)$$

Выражения для потенциала вне пучка приведены в работах [3, 19]. Для функции Римана в форме (14) имеем

$$\varphi(R, z) = \left( \frac{R_0}{R} \right)^{1/2} \left\{ \operatorname{Re} w^{4/3} + \int_{R_0}^R \left[ \frac{1}{2R_0} F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda_e \right) - \frac{1}{16RR_0^2} (R^2 - 2R_0^2 + 2R_0\sigma - \sigma^2) F \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2; \lambda_e \right) \right] \operatorname{Re} \zeta^{4/3} d\sigma \right\}, \quad (34)$$

$$w = z + i(R - R_0), \quad \zeta = z + i(\sigma - R_0), \quad \lambda_e = \frac{(\sigma - R)(\sigma + R - 2R_0)}{4R_0R}.$$

В работе [19] выполнен расчет эквипотенциальных поверхностей как для сплошного пучка, так и для цилиндрической полости с возможностью синтеза идеального

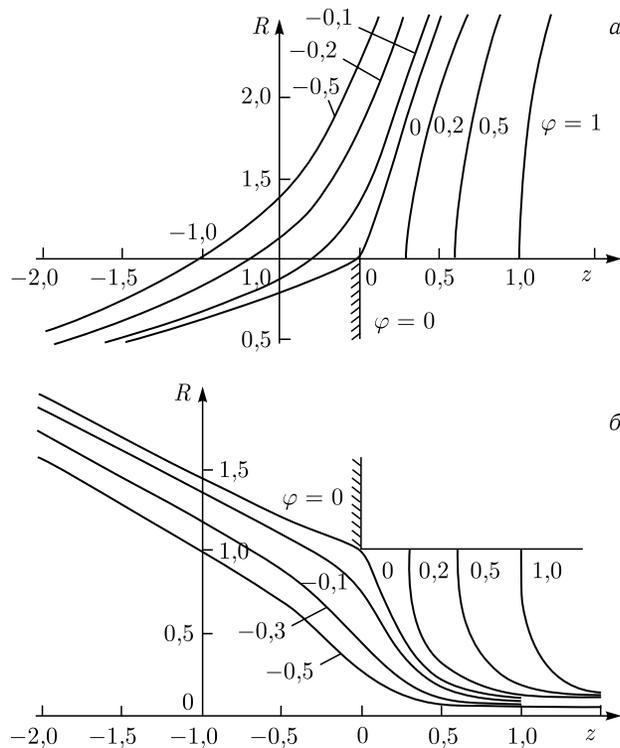


Рис. 4. Эквипотенциальные поверхности для цилиндрического пучка (а) и цилиндрической полости (б)

теплового зазора, образованного боковой поверхностью катода и отрицательной эквипотенциалью (рис. 4).

**3.2. Прочие условия на стартовой поверхности.** Параметрические зависимости

$$\varphi = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} Jt^2 + Et + U \right)^2, \quad z = \frac{1}{6} Jt^3 + \frac{1}{2} Et^2 + Ut \tag{35}$$

охватывают все возможные режимы плоского диода ( $J, E, U$  — плотность тока, поле и скорость в плоскости инжекции  $z = 0$ ), включающие эмиссию в  $\rho$ -режиме ( $E = U = 0$ ) и в  $T$ -режиме ( $U = 0$ ). Исследование этого случая с построением эквипотенциалей в первом и четвертом квадрантах выполнено в работе [20].

**3.3. Другие формы решения.** Решение в виде двойного интеграла в форме (29) при эмиссии в  $\rho$ -режиме описывается формулами

$$\rho = \frac{4}{9} z^{-2/3}, \quad h^2 = 1, \quad \lambda = \frac{(v - \eta)^2 - \xi^2}{4(R_0 + \eta)R}, \quad v = R - R_0; \tag{36}$$

$$\varphi = z^{4/3} - \frac{4}{9} \frac{z^{-2/3}}{\sqrt{R}} \int_0^v \sqrt{R_0 + \eta} \int_0^{v-\eta} \left[ \left( 1 + \frac{\xi^2}{z^2} \right)^{-1/3} \cos \left( \frac{2}{3} \arctg \frac{\xi}{z} \right) F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda \right) d\xi \right].$$

Отличная от (34) форма решения для сплошного цилиндрического пучка, полученная другим способом и выраженная через интеграл с бесконечным верхним пределом, притом справедливая при  $z \geq 0$ , приведена в работе [21]. Построенное в [21] решение для цилиндрической полости неверно [22].

#### 4. КОНУС, ПЛОСКИЕ ТОРЦЫ, ТОРОИДАЛЬНЫЕ ОБРАЗОВАНИЯ

**4.1. Формирование конического пучка.** Формулы для потенциала в случае конического пучка  $\theta = \theta_0$  приведены в [3] при параметризации границы

$$R_e = \exp(u) \sin \theta_0, \quad Z_e = \exp(u) \cos \theta_0. \quad (37)$$

Действительную и мнимую части потенциала при  $v = 0$

$$\varphi_e(\zeta), \quad \zeta = \ln r + i(\theta - \theta_0) \quad (38)$$

предлагалось вычислять, интегрируя дифференциальное уравнение сферического диода с комплексным аргументом.

В работе [23] использовано решение для диода, выраженное в параметрической форме через бesselевы функции [24], в [25] — выполнен расчет эквипотенциалей для сплошного сходящегося пучка и конической полости (рис. 5).

Решение основано на формулах

$$\varphi_e(u) = (3u)^{2/3} \left[ \frac{J_{2/3}(u)}{J_{-1/3}(u)} \right]^2, \quad \varphi_{ve} = 0; \quad r_e(u) = \left( \frac{u}{2} \right)^{2/3} \left[ \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) J_{-1/3}(u) \right]^2;$$

$$\ln r + i(\theta - \theta_0) = \ln r_e(w), \quad w = u + iv; \quad (39)$$

$$R_e = r_e(u) \sin \theta_0, \quad Z_e = r_e(u) \cos \theta_0, \quad \alpha_e = r'_e \sin \theta_0, \quad \beta_e = r'_e \cos \theta_0$$

с последующим применением выражения (15). Здесь  $J_\nu$  — функции Бесселя для сходящегося потока и функции  $I_\nu$  чисто мнимого аргумента в случае расходящегося пучка.

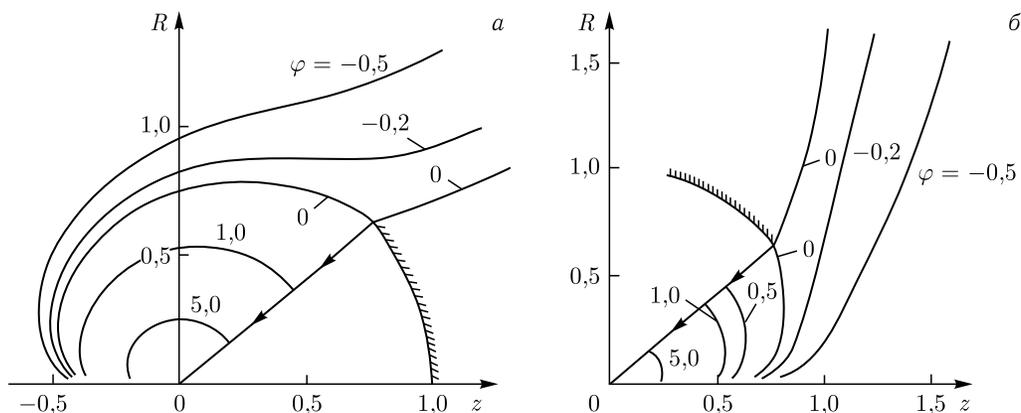


Рис. 5. Эквипотенциальные поверхности для сходящегося конического пучка  $\theta_0 = 40^\circ$  (а) и конической полости (б)

**4.2. Плоские торцы.** В работе [9] на основании формулы (22) приведено решение для плоских торцов цилиндрического магнетрона и диода, а также классических бриллюэновских конфигураций: сплошного, полого и электростатического потоков. Поскольку в выражение (22) входит комплекс

$$\operatorname{Re} \left[ \exp \left( \frac{i\xi}{2} \right) \varphi_e(\zeta) \right] = \exp \left( -\frac{u}{2} \right) \operatorname{Re} \Psi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{r}} \operatorname{Re} \Psi, \quad \Psi = \exp \left( \frac{\zeta}{2} \right) \varphi_e(\zeta), \quad (40)$$

то удобно переформулировать исходные уравнения пучка для функции  $\Psi(\zeta)$ .

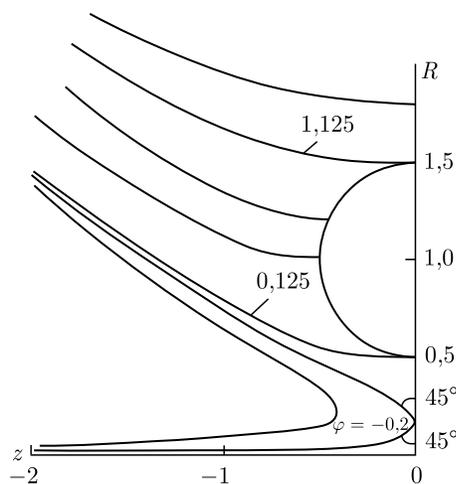


Рис. 6. Эквипотенциалы для тороидально-го пучка на основе сплошного нерелятивистского бриллюэновского потока

**4.3. Тороидальные образования.** Примеры расчета на основе классических бриллюэновских потоков, потока во внешнем неоднородном магнитном поле и тороидальной вырезки из релятивистского бриллюэновского течения [7] приведены в работах [26, 27]. Типичные конфигурации эквипотенциальных поверхностей для этих случаев показаны на рис. 6 и 7.

**4.4. Биполярные потоки.** Решения для биполярных пучков в виде цилиндра или конуса рассматривались в работах [28–30]. В первой из них построены эквипотенциальные поверхности для цилиндра и цилиндрической полости. В работе [30] исследованы задачи о торцевых экранах бриллюэновских потоков с нерелятивистскими и релятивистскими электронами, а также о тороидальном образовании на основе релятивистского варианта.

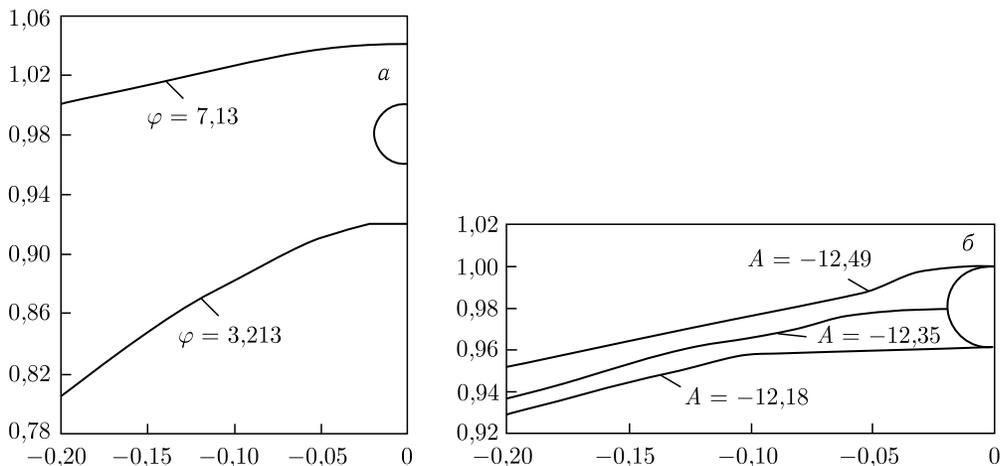


Рис. 7. Форма канала  $\varphi = \text{const}$  (а) и силовые линии магнитного поля (б) для релятивистского тороидального бриллюэновского пучка

## 5. ЦИЛИНДР С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

**5.1. Две эталонные задачи.** Пусть замкнутый контур  $\Gamma$ , ограничивающий поперечное сечение пучка, определен параметрическими зависимостями

$$\begin{aligned} x &= x_e(u), \quad y = y_e(u); \quad x + iy = x_e(w) + iy_e(w), \\ \alpha + i\beta &= x'_e(w) + iy'_e(w), \quad h^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \alpha_e = x'_e(u), \quad \beta_e = y'_e(u). \end{aligned} \quad (41)$$

Необходимо найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (42)$$

удовлетворяющее на поверхности цилиндра условиям

$$\varphi_e = z^\nu, \quad \varphi_{ve} = 0 \quad (43)$$

с дробным показателем  $\nu$  и отсутствием нормального поля на прямолинейной траектории — образующей цилиндра. Эталонная задача (41)–(43) будет использована при решении физических проблем.

Воспользуемся представлением степенной функции в (43) в виде контурного интеграла в комплексной плоскости параметра  $p$  с обходом особенности в нуле

$$z^\nu = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{(0)}^{\infty} p^{-\nu-1} \exp(-pz) dp \quad (44)$$

и будем искать решение в аналогичной форме:

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(0)}^{\infty} \Phi(x, y; p) \exp(-pz) dp. \quad (45)$$

Функция  $\Phi$  в декартовых  $x, y$  и криволинейных  $u, v$  координатах удовлетворяет уравнению Гельмгольца и следующим условиям при  $v = 0$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + p^2 \Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + p^2 h^2 \Phi = 0; \quad \Phi_e = \frac{p^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)}, \quad \Phi_{ve} = 0. \quad (46)$$

Уравнения (46) справедливы и для функции Римана  $G$  и имеют в качестве решения функцию Бесселя нулевого порядка:

$$G = J_0(\lambda), \quad \lambda = pr, \quad r^2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2. \quad (47)$$

Используя формулу Римана (9), получаем

$$\begin{aligned} \Phi(u, v; p) &= \frac{p^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)} \left[ 1 + p \operatorname{Re} \int_0^v \frac{(x_e - x) \beta_e - (y_e - y) \alpha_e}{r_e} J_1(\lambda_e) d\xi \right], \\ \zeta &= u + i\xi, \quad \lambda_e = pr_e, \quad r_e^2 = (x_e - x)^2 + (y_e - y)^2. \end{aligned} \quad (48)$$

Функции  $x_e, y_e, \alpha_e, \beta_e$  под интегралом зависят от  $\zeta$ . После подстановки  $\Phi$  в формулу (45) под контурным интегралом оказывается произведение  $p^{-\nu} J_1(pr_e) \exp(-pz)$ , а сам интеграл является известным интегралом Липшица–Ганкеля, выражаемым через гипергеометрическую функцию Гаусса:

$$\varphi(x, y, z) = z^\nu + \frac{\nu(1-\nu)}{2} \operatorname{Re} \int_0^v \frac{(x_e - x)\beta_e - (y_e - y)\alpha_e}{(z^2 + r_e^2)^{1-\nu/2}} F\left(\frac{2-\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}; 2; \frac{r_e^2}{z^2 + r_e^2}\right) d\xi. \quad (49)$$

Описанный алгоритм не работает при целочисленном значении  $\nu = n$ . Вторая эталонная задача с условиями на  $\Gamma$  вида

$$\varphi_e = a_n z^n, \quad \varphi_{ve} = 0 \quad (50)$$

имеет решение полиномиальной структуры, зависящей от того, является ли  $n$  четным или нечетным:

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi_0 + \Phi_2 z^2 + \dots + \Phi_{2k-2} z^{2k-2} + a_{2k} z^{2k}, \quad n = 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ \varphi &= \Phi_1 z + \Phi_3 z^3 + \dots + \Phi_{2k-1} z^{2k-1} + a_{2k+1} z^{2k+1}, \quad n = 2k + 1, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (51)$$

Функции  $\Phi_{n-2l}$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi_{n-2l}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{n-2l}}{\partial v^2} = -(n-2l+2)(n-2l+1)h^2(u, v)\Phi_{n-2l+2}. \quad (52)$$

Выполнение условий (50) обеспечивает последнее слагаемое в формулах (51):  $\Phi_n = a_n$ , поэтому все прочие функции на границе  $v = 0$  должны давать нулевой вклад в потенциал и поле. Функция Римана для уравнения (52) равна единице ( $G = 1$ ), а двойной интеграл в формуле Римана имеет нужные свойства при  $v = 0$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{n-2l} &= -(n-2l+2)(n-2l+1) \times \\ &\times \operatorname{Re} \int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} h^2(u + i\xi, \eta) \Phi_{n-2l+2}(u + i\xi, \eta) d\xi, \quad l = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (53)$$

Вычисление функций  $\Phi_m$  выполняется в порядке убывания индекса, причем каждая полученная функция подвергается аналитическому продолжению по аргументу  $u$ , замене  $v \rightarrow \eta$  и дважды интегрируется с весом  $h^2$ , что приводит к появлению функции  $\Phi_{m-2}$ .

**5.2. Цилиндрический пучок с произвольным сечением на основе решения Чайлда–Ленгмюра для плоского диода в  $\rho$ -режиме.** Решение задачи описывается формулой (49) при  $\nu = 4/3$  [31]:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= z^{4/3} - \frac{2}{9} \operatorname{Re} \int_0^v \frac{(x_e - x)\beta_e - (y_e - y)\alpha_e}{(z^2 + r_e^2)^{1/3}} F\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{6}; 2; \frac{r_e^2}{z^2 + r_e^2}\right) d\xi; \\ \varphi = 0: X &= \theta(u)z + a_2(u)z^2 + a_3(u)z^3 + \dots \end{aligned} \quad (54)$$

Рассматривая окрестности катода, можно записать явное уравнение нулевой эквипотенциали ( $X$  — нормаль к контуру), приведенное в формуле (54). Коэффициент  $\theta(u)$  при первом члене удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{2}{9}\theta^2(u) \int_0^1 [1 + \theta^2(u)(1 - x^2)]^{-1/3} F\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{6}; 2; \lambda_0\right) dx = 1, \quad \lambda_0 = \frac{\theta^2(u)(1 - x^2)}{1 + \theta^2(u)(1 - x^2)}. \quad (55)$$

Точное решение уравнения (55) может быть найдено исходя из того, что  $\theta(u)$  имеет смысл тангенса угла наклона эквипотенциали  $\varphi = 0$  к границе пучка в плоскости  $(X, z)$ , а значение этой величины для кругового цилиндра, входящего в семейство произвольных цилиндров, известно (см. (30)). Сравнение с локальным решением для круглого сечения (34), где все коэффициенты являются константами, позволяет указать точные значения функций  $a_k(u)$  в (54), которые выражаются через нетабличные определенные интегралы с гипергеометрическими функциями и кривизну контура  $k_\Gamma$ . В результате вблизи катода для кривой  $\varphi = 0$  получаем

$$X = \left(\pm \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}\right) z + \frac{9}{56} \left(\sin \frac{\pi}{8}\right)^{-2} k_\Gamma z^2 \mp \frac{153}{6272\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\pi}{8}\right)^{-4} k_\Gamma^2 z^3. \quad (56)$$

Двойной знак соответствует сплошному пучку и полости.

Из формулы (56) следуют два вывода: угол наклона нулевой эквипотенциали вне зависимости от формы сечения составляет  $67,5^\circ$ ; для произвольного цилиндра справедлив локальный принцип независимости сечений: форма эквипотенциали зависит только от локального значения кривизны контура  $k_\Gamma$ , но не от ее производных.

Кривизна  $k_0$  и производная  $k'_0$  линии  $\varphi = 0$  в сечении  $(X, z)$  на кромке катода описывается формулами

$$k_0 = \left(\frac{9}{28} \sin \frac{\pi}{8}\right) k_\Gamma \approx 0,123k_\Gamma, \quad k'_0 = \mp \left[\frac{945}{3136\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\pi}{8}\right)^{-1}\right] k_\Gamma^2 \approx \mp 0,557k_\Gamma^2. \quad (57)$$

Формула (54) приводит к третьей форме решения для круглого цилиндрического пучка [31]:

$$\varphi = z^{4/3} - \frac{2}{9}R_0^2 z^{-2/3} \int_{R_0}^R \left[1 - \frac{R}{2R_0} \left(\frac{\sigma}{R_0} + \frac{R_0}{\sigma}\right)\right] (1 - \lambda_e)^{1/3} F\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{6}; 2; \lambda_e\right) d\sigma, \quad (58)$$

$$\lambda_e = \frac{(\sigma - R)(\sigma R + R_0^2)}{\sigma z^2 + (\sigma - R)(\sigma R + R_0^2)}, \quad z \geq 0.$$

В отличие от (34) все прочие варианты определяют поле вне пучка только при  $z \geq 0$  и не в состоянии описать эквипотенциали во втором и третьем квадрантах.

**5.3. Цилиндрический пучок с произвольным сечением при эмиссии в  $T$ -режиме.** Потенциал в пучке для этого случая в дополнительных нормировках может быть представлен в виде универсальной параметрической зависимости

$$\bar{z} = \frac{z}{(E^3/J^2)}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{(E^4/J^2)}; \quad \bar{z} = \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^3, \quad 2\bar{\varphi} = \left(\tau + \frac{1}{2}\tau^2\right)^2. \quad (59)$$

Опуская черту, для явной функции  $\varphi = \varphi(z)$  получаем ряд по полуцелым степеням  $z$  [32]:

$$\varphi = z + \varphi_3 z^{3/2} + \varphi_4 z^2 + \varphi_5 z^{5/2} + \dots \quad (60)$$

При сохранении коэффициента  $\varphi_7$  в (60) и  $z = 1$ ,  $\tau = 1,196$  точное значение потенциала  $\varphi_{\text{ex}} = 1,826$  из (59) отличается от  $\varphi_{\text{ap}} = 1,813$  из (60) на 0,7%.

При решении уравнения Лапласа [33] дробные степени в формуле (60) обрабатываются по алгоритму, результатом которого является выражение (49), в то время как слагаемые с целочисленными степенями  $z$  приводят к комплексам (51), (53). Поскольку формулы (49), (51) аддитивно содержат порождающие их члены  $z^\nu$ ,  $z^n$ , то после суммирования воспроизводится ряд по полуцелым степеням  $z$ , эквивалентный точному выражению (59). В результате решение задачи Коши, построенное описанным образом, точно удовлетворяет условиям на границе произвольного цилиндра, а сходимость оставшегося ряда зависит от поведения разложения (60).

**5.4. Решение в виде двойного интеграла.** Подобно случаю осесимметричных систем (27)–(29) задача о произвольном цилиндре имеет решение в виде двойного интеграла [34]. При эмиссии, ограниченной пространственным зарядом, формула для потенциала имеет вид

$$\varphi = z^{4/3} - \frac{4}{9} \operatorname{Re} \int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} \frac{h^2(\zeta, \eta)}{(z^2 + r^2)^{1/3}} F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; 1; \lambda\right) d\xi, \quad \lambda = \frac{r^2}{z^2 + r^2}, \quad (61)$$

$$r^2 [x(\zeta, \eta) - x(u, v)]^2 + [y(\zeta, \eta) - y(u, v)]^2, \quad x + iy = x_e(w) + iy_e(w).$$

## 6. КОНУС И ТОРОИД С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

**6.1. Конические пучки.** Уравнение Лапласа в сферических координатах  $r$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  после перехода к новым переменным

$$\xi = \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \eta = \pm \ln \frac{r}{r_0}, \quad (62)$$

где  $r_0$  — радиус катода, двойной знак соответствует расходящемуся или сходящемуся пучку, принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \xi} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \pm \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (63)$$

В уравнении (63) на псевдоплоскости  $\xi$ ,  $\psi$  выделен лапласиан с декартовой метрикой.

Конус с произвольным сечением определен параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_e(u), \quad \psi = \psi_e(u); \quad \xi + i\psi = \xi_e(w) + i\psi_e(w), \quad w = u + iv; \\ \alpha + i\beta &= \xi'_e(w) + i\psi'_e(w), \quad h^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \alpha_e = \xi'_e(u), \quad \beta_e = \psi'_e(u). \end{aligned} \quad (64)$$

Первая эталонная задача подобна аналогичной задаче для произвольного цилиндра, причем контур сечения задается на поверхности сферы:

$$\varphi_e = \eta^\nu, \quad \varphi_{ve} = 0; \quad \xi = \xi_e(u), \quad \psi = \psi_e(u); \quad \varphi = \int_{(0)}^{\infty} \Phi(u, v; p) \exp(-p\eta) dp;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} + \frac{P}{\text{ch}^2 \xi} \Phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \frac{P}{\text{ch}^2 \xi} h^2 \Phi = 0; \quad (65)$$

$$\Phi_e = \frac{p^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)}, \quad \Phi_{ve} = 0, \quad P = p(p \mp 1).$$

Функция Римана удовлетворяет тому же уравнению, что и  $\Phi$ , однако выразить  $G$  через известные специальные функции не удается. В работе [35] построены два приближения асимптотического ряда для  $G$ , нулевое и первое из которых определены формулами

$$G = J_0(\lambda) + \frac{1}{2} \left[ \pm \frac{1}{\text{ch} \xi_c} r + \lambda \text{th} \xi_c (\xi - \xi_c) \right] J_1(\lambda) + \dots, \quad (66)$$

$$\lambda = \frac{pr}{\text{ch} \xi_c}, \quad r^2 = (\xi - \xi_c)^2 + (\psi - \psi_c)^2.$$

Видно, что нулевое приближение функции Римана для конического пучка, являющегося в координатах  $\xi, \psi, \eta$  «истинным цилиндром», отличается от формулы (47) лишь множителем  $\text{ch} \xi_c$  в знаменателе  $\lambda$ .

Решение задачи (65) с функцией Римана (66) определено формулой

$$\varphi(u, v, \eta) = \eta^\nu - \text{Re} \int_0^v \frac{\eta^{\nu-2}}{\text{ch}^2 \xi} Y^{(\nu-2)/2} \left\{ [(\xi_e - \xi) \beta_e - (\psi_e - \psi) \alpha_e] \times \right.$$

$$\times \left[ -\frac{\nu(1-\nu)}{2} F\left(\frac{2-\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}; 2; X\right) \pm \frac{\nu}{2} \eta Y^{1/2} F\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{\nu}{2}; 1; X\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\nu(1-\nu)}{2} \text{th} \xi (\xi_e - \xi) F\left(\frac{2-\nu}{2}, \frac{\nu-1}{2}; 2; X\right) \right] +$$

$$\left. + \frac{\nu(1-\nu)}{4} \beta_e \text{th} \xi r_e^2 F\left(\frac{2-\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}; 2; X\right) \right\} d\sigma, \quad (67)$$

$$X = \frac{r_e^2}{r_e^2 + \eta^2 \text{ch}^2 \xi}, \quad Y = 1 + \frac{r_e^2}{\eta^2 \text{ch}^2 \xi}, \quad r_e^2 = (\xi_e - \xi)^2 + (\psi_e - \psi)^2;$$

$$\xi + i\psi = \xi_e(w) + i\psi_e(w), \quad w = u + iv, \quad \zeta = u + i\sigma, \quad \alpha_e = \xi'_e(u), \quad \beta_e = \psi'_e(u).$$

Функции  $\xi_e, \psi_e, \alpha_e, \beta_e$  под интегралом зависят от  $\zeta$ .

Множитель  $\text{ch} \xi_c$ , появившийся в выражении для функции Римана нулевого приближения, отличает функции  $\Phi_n$  во второй эталонной задаче с  $\nu = n$  от соответствующих функций в (51). Так, для потенциала на границе

$$\varphi_e = \varphi_3 \eta + \varphi_6 \eta^2 + \varphi_9 \eta^3, \quad \varphi_k = \text{const} \quad (68)$$

функции  $\Phi_n$  описываются выражениями

$$\begin{aligned}\Phi_3 &= \eta \pm \Phi_0, & \Phi_6 &= \eta^2 \pm 2\Phi_0\eta + 2(\Phi_0 + 2\Phi_{20}), \\ \Phi_9 &= \eta^3 \pm 3\Phi_0\eta^2 + 6(\Phi_0 + \Phi_{20})\eta \pm 6(2\Phi_{20} + \Phi_{30}), \\ \Phi_0 &= -\operatorname{Re} \int_0^v d\sigma \int_0^{v-\sigma} \frac{h^2}{\operatorname{ch}^2 \xi} d\tau, & \Phi_{20} &= -\operatorname{Re} \int_0^v d\sigma \int_0^{v-\sigma} \frac{h^2}{\operatorname{ch}^2 \xi} \Phi_0 d\tau, \\ \Phi_{30} &= -\operatorname{Re} \int_0^v d\sigma \int_0^{v-\sigma} \frac{h^2}{\operatorname{ch}^2 \xi} \Phi_{20} d\tau.\end{aligned}\tag{69}$$

Функции аргументов  $u, v$  под интегралами испытывают аналитическое продолжение по первому из них  $u \rightarrow u + i\sigma$  и замене  $v \rightarrow \tau$ .

### 6.2. Конический пучок с произвольным сечением при эмиссии в $\rho$ -режиме.

Пучок подобной конфигурации представляет собой вырезку из течения в сферическом диоде, для потенциала в котором известны хорошо сходящиеся ряды по логарифму радиуса  $\eta$  [36], использованного в качестве продольной координаты в (62) с факторизованной особенностью  $\eta^{4/3}$ . Решение этой задачи анализируется в работах [1, 2, 35] с использованием формул (67). Рассматривая окрестность стартовой поверхности, приходим к локальным уравнениям нулевой эквипотенциали, аналогичным (54), позволяющим вычислить угол наклона к границе пучка и кривизну линии  $\varphi = 0$ . Угол в  $67,5^\circ$  оказывается универсальным и для этой геометрии и связан вне зависимости от конфигурации и физических характеристик потока с аналитическим продолжением члена  $\eta^{4/3}$ , свойственного эмиссии в  $\rho$ -режиме. Как и в случае цилиндра при эмиссии в  $T$ -режиме, первое слагаемое в формуле (67) после суммирования может быть заменено точным параметрическим решением (39) в функциях Бесселя.

Кривизна нулевой эквипотенциали определена формулой

$$k_0 = \pm \frac{2}{r_0} \cos \frac{\pi}{8} \left[ -\frac{3}{4} \left( \bar{\varphi}_7 \mp \frac{1}{6} \right) + \left( \frac{9}{56} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) k_\Gamma \right], \quad \bar{\varphi}_7 = \frac{\varphi_7}{\varphi_4} = \mp \frac{2}{5}.\tag{70}$$

**6.3. Конические бриллюэновские потоки.** Возможность бриллюэновских течений, зависящих от сферических координат  $r, \theta$ , с эквипотенциальными поверхностями в виде конусов  $\theta = \operatorname{const}$  отмечена в [37, 38], где получены решения в элементарных функциях в нерелятивистском случае при  $v_r, v_\psi \neq 0$  и для радиального релятивистского потока с одной отличной от нуля компонентой скорости  $v_r$ .

Подробное исследование конических бриллюэновских пучков проведено в работе [39]. Решения [37, 38] использованы при построении моделей релятивистских пучков с самоизоляции [40] (в монографии [41] они именуется парапотенциальными потоками) наряду с релятивистским решением [42], зависящим от  $x, y$  и имеющим одну компоненту скорости  $v_z$ .

Поскольку потенциалы электрического  $\varphi$  и магнитного  $A_r$  полей и их производные на границе произвольного конуса не зависят от  $r$ , задача сводится к двумерному лапласиану с декартовой метрикой на псевдоплоскости  $\xi, \psi$  [30], решение кото-

рого известно:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \psi^2} = 0, \quad f = \operatorname{Re} \left[ f_e(w) + \int_0^v f_{ve}(\zeta) d\tau \right], \quad w = u + iv, \quad \zeta = u + i\tau; \quad (71)$$

$$\bar{\xi} + i\psi = \bar{\xi}_e(w) + i\psi_e(w), \quad \bar{\xi} = \xi - \xi_*, \quad \xi_* = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2), \quad \theta_0 = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2).$$

Здесь величины  $\xi_1, \xi_2$  соответствуют углам  $\theta_1, \theta_2$ , между которыми заключен произвольный конус.

В случае релятивистского потока условия на границе для потенциалов  $\varphi$  и  $A_r$  описываются выражениями

$$\begin{aligned} \varphi_e(u) &= \operatorname{ch} [\Xi(u)] - 1, \quad \varphi_{ve} = -a \operatorname{sh} [\Xi(u)]; \\ A_e &= -\operatorname{sh} [\Xi(u)], \quad A_{ve} = a \operatorname{ch} [\Xi(u)]; \quad \Xi(u) \equiv a \bar{\xi}_e(u) + \ln \bar{W}_0; \\ \bar{W}_0 &= W_0 \frac{\operatorname{tg}(\theta_1/2) \operatorname{tg}(\theta_2/2)}{\operatorname{tg}^2[(\theta_1 + \theta_2)/2]}, \quad W_0^2 = \frac{1 + V_0}{1 - V_0}, \quad a^2 = J_0 \sin \theta_0 \frac{1 - V_0}{V_0}, \end{aligned} \quad (72)$$

где  $V_0, J_0$  — радиальная скорость и плотность тока при  $r = 1, \theta = \theta_0$ .

**6.4. Тороид с произвольным сечением.** Поток этого типа с плоской стартовой поверхности имеет азимут  $\psi$  в качестве продольной координаты. Для неизменной формы сечения  $R = R_e(u), z = Z_e(u)$  пучок описывается точным решением Б. Мельцера [43] при эмиссии в  $\rho$ -режиме с существенно неоднородным токоотбором. Движение происходит по схеме ускорение–торможение с линией симметрии  $\psi = 60^\circ$ :

$$\varphi = \frac{1}{2R^2} \Phi^{4/3}(\psi), \quad \rho = \frac{1}{2R^4} \Phi^{-2/3}(\psi), \quad J = \frac{1}{2R^5}, \quad \Phi(\psi) = \sin \left( \frac{3\psi}{2} \right). \quad (73)$$

Применение преобразования Лапласа с целью исключения продольной координаты  $\psi$  приводит к появлению бета-функции  $B(p)$  [44] (вместо степенной функции из (44)) и функции Римана в виде [31]

$$G = F \left( \frac{1}{2} + ip, \frac{1}{2} - ip; 1; \lambda \right), \quad \lambda = -\frac{r^2}{4RR_c}, \quad r^2 = (z - z_c)^2 + (R - R_c)^2. \quad (74)$$

Невозможность вычислить контурные интегралы, обусловленная как бета-функцией, так и гипергеометрической функцией вместо ранее встречавшихся функций Бесселя, вынуждает к принятию следующих мер. Во-первых, представим потенциал в (43) в виде степенного ряда

$$\Phi^{4/3}(x) = x^{4/3} (1 + \Phi_2 x^2 + \Phi_4 x^4 + \Phi_6 x^6 + \dots), \quad x = \frac{3\psi}{2}. \quad (75)$$

При сохранении коэффициента  $\Phi_6$  в точке максимума  $x = \pi/2$  отклонение от точного значения составляет 1,5%.

Во-вторых, для функции Римана, удовлетворяющей уравнению

$$\lambda(1 - \lambda)G'' + (1 - 2\lambda)G' - \left( \frac{1}{4} + p^2 \right) G = 0, \quad (76)$$

необходимо построить асимптотический ряд по функциям Бесселя [44, 45], используя алгоритмы задачи о произвольном конусе [35]:

$$G = J_0(\mu) - \frac{1}{2}\mu \left( \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{4p^2} \right) J_1(\mu) - \frac{1}{3}\lambda J_2(\mu), \quad \mu = -\frac{pr}{\sqrt{RR_c}}. \quad (77)$$

В локальных декартовых координатах  $X$ ,  $Y$  (нормаль к контуру, касательная к траектории-окружности) уравнение нулевой эквипотенциали имеет вид

$$X = \theta Y + \theta^2 [(c_1 + c_2 \cos 2\vartheta)\kappa_1 + c_3\kappa_2] Y^2, \quad \alpha_e = \frac{dR_e}{du}, \quad \beta_e = \frac{dz_e}{du}, \quad (78)$$

$$\theta = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\alpha_e}{\beta_e}, \quad \kappa_1 = -\frac{\beta_e}{R_e h_e}, \quad \kappa_2 = \frac{\alpha'_e \beta_e - \alpha_e \beta'_e}{h_e^3} = k_\Gamma,$$

где  $\vartheta$  — угол наклона контура к оси  $z$ ;  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  — главные кривизны тора  $v = 0$ ;  $k_\Gamma$  — кривизна контура;  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  — константы, выражаемые через нетабличные определенные интегралы с гипергеометрическими функциями.

После суммирования фрагментов решения с аддитивным слагаемым  $\Phi_k x^{4/3+k}$  полученное выражение точно удовлетворяет условиям на границе пучка. В отличие от потоков с прямолинейными траекториями при построении решения для тороидальной геометрии используется формула Римана с отличной от нуля производной потенциала на границе потока.

**6.5. Биполярные течения.** Эталонные задачи (49), (51) и (67), (69) позволяют рассмотреть биполярные потоки с прямолинейными траекториями, имеющими вид цилиндра или конуса с произвольным сечением [28, 29].

## 7. «ПОЧТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЕ» СЕЧЕНИЕ

**7.1. Роль конформного отображения.** Приведенные выше выражения для произвольного осесимметричного течения, произвольных цилиндра, конуса и тороида позволяют получить общие локальные характеристики эквипотенциалей, но остаются формальным решением, если не построено конформное отображение внешности границы пучка на какую-либо каноническую область или по меньшей мере однозначная координатная сетка вне занятой зарядами области достаточно широкая, чтобы рассчитанные в ней электроды обеспечивали реализацию пучка нужной конфигурации. Заданный контур  $\Gamma$  может описываться бесчисленным множеством параметрических представлений  $x = x_e(u)$ ,  $y = y_e(u)$ , любое из которых при аналитическом продолжении  $u \rightarrow u + iv$  определяет ортогональную сетку в окрестности  $\Gamma$  без гарантий сохранения однозначности при удалении от нее. Так, простейшая параметризация параболы

$$x = y^2, \quad y_e = u, \quad x_e = u^2, \quad x + iy = w^2 + iw, \quad (79)$$

к счастью, определяет отображение верхней полуплоскости на внешность параболы, но не дает отображения на внутренность кривой. «Правильная» параметризация

$$y_e = -\frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{u}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{u^2}{2} + 1} \right), \quad x_e = \frac{1}{\pi^2} \ln^2 \left( \frac{u}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{u^2}{2} + 1} \right) \quad (80)$$

становится известной после построения конформного отображения и не может быть угадана, как параметризация (79). Теорема существования конформного отображения не оказывает конструктивной помощи при решении конкретных задач.

Возможные трудности не исчерпываются сказанным выше. Для учета торцевых эффектов при формировании ленточных пучков попытка выбрать в качестве скругленного прямоугольника линию  $v = \varepsilon \ll 1$  из конформного отображения внешности прямоугольника  $v = 0$  на внешность единичного круга (интеграл Кристоффеля–Шварца) не приводит к успеху, так как порождает в лапласовской области разрывное решение [46].

**7.2. Отображение «повышенной гладкости».** В работе [46] разработан способ построения отображения «повышенной гладкости» за счет разложения интегранда в ряд Лорана и интегрирования конечного фрагмента этого ряда. Результат представлен формулами

$$x + iy = c \left[ t + \sum_{k=1}^n c_k t^{1-2k} \right], \quad t = \exp(-v + iu), \quad c = \frac{c_0}{1 - c_1}; \tag{81}$$

$$c_1 = \cos 2\gamma, \quad c_2 = -\frac{1}{6}(1 - c_1^2), \quad c_3 = -\frac{1}{10}c_1(1 - c_1^2), \quad c_4 = \frac{1}{56}(1 - 6c_1^2 + 5c_1^4).$$

Здесь  $c_0$  — масштабный множитель;  $\gamma$  — параметр, определяющий отношение сторон  $a/b$  прямоугольника. Сравнительно малое число членов ( $n = 2$  при  $a/b = 1$ ;  $n = 3$  при  $a/b \sim 2$ ;  $n = 4$  при  $a/b \sim 10$ ) дает приемлемую конфигурацию контура (рис. 8). При  $n = 1$  формулы (81) описывают эллиптический контур — нулевое приближение скругленного прямоугольника.

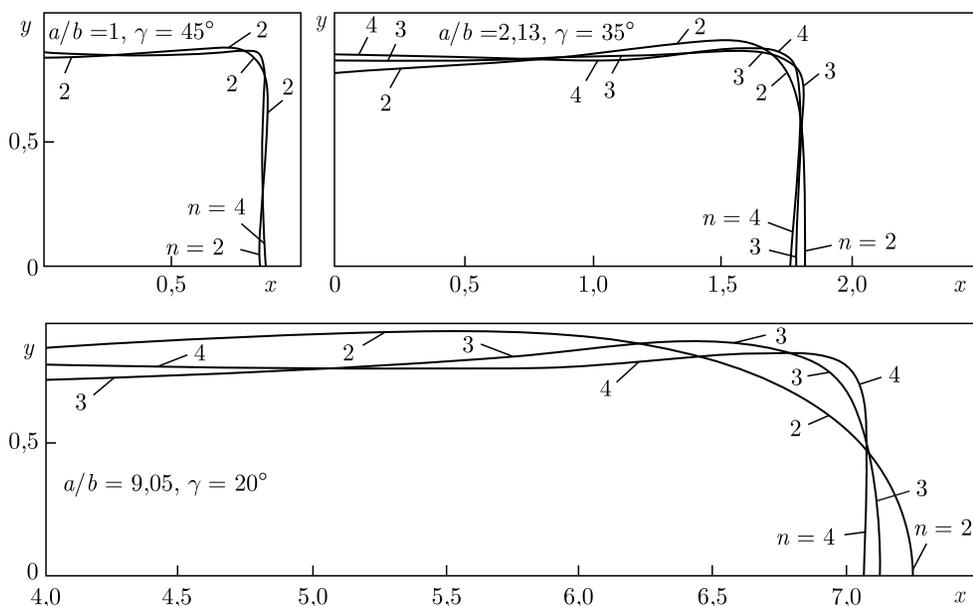


Рис. 8. Контур скругленных прямоугольников

**7.3. Вырезка в виде скругленного прямоугольника из плоского диода в  $\rho$ -режиме.** Расчет поля во внешней области цилиндрического пучка с сечением в виде скругленного прямоугольника выполнен в работе [46]. На рис. 9 приведена картина эквипотенциалей в диагональном сечении скругленного квадрата при  $n = 2$  и  $n = 4$ . Основная качественная особенность поведения поля состоит в повороте эквипотенциалей в области, прилегающей к углу, в сторону, противоположную направлению ускорения. Этот поворот приводит к образованию «складки» в нулевом формирующем электроде и «ребра» ускоряющего электрода над этой складкой. Характер поведения эквипотенциалей соответствует картине поля в плоской пушке Дж.Р. Пирса лишь в полосе, ширина которой сравнима с радиусом скругления угла. Тенденция к пово-

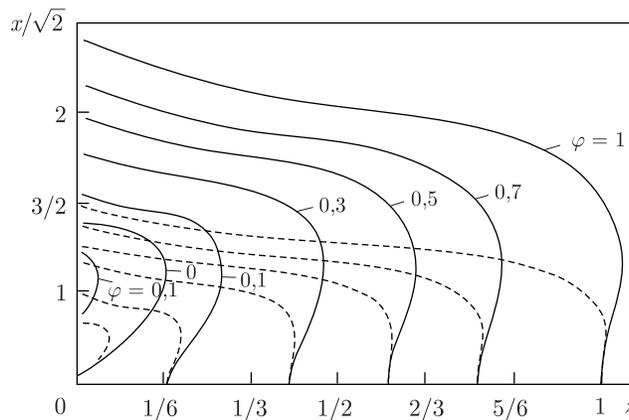


Рис. 9. Эквипотенциальные кривые в диагональном сечении скругленного квадрата при  $n = 2$  (сплошные линии) и  $n = 4$  (штриховые)

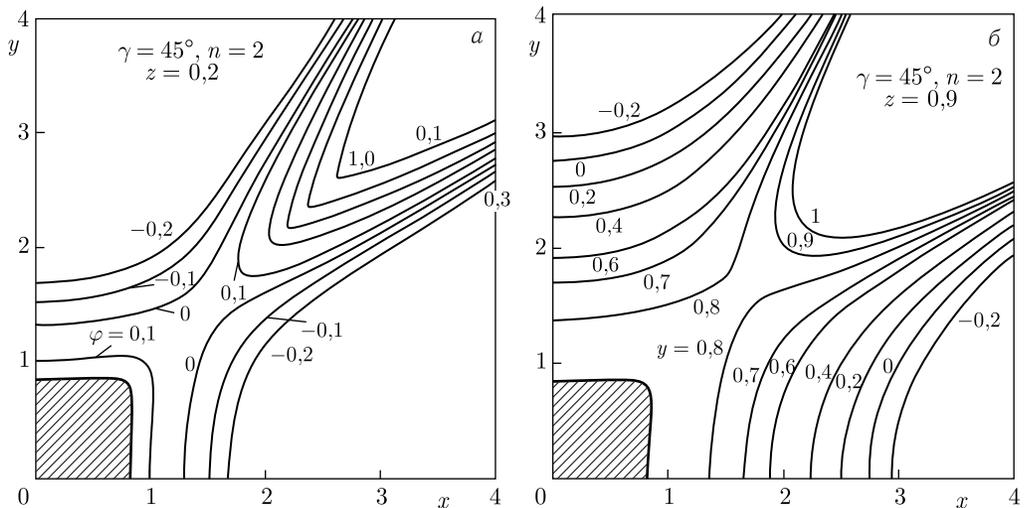


Рис. 10. Эквипотенциальные кривые для скругленного квадрата в поперечных сечениях  $z = \text{const}$

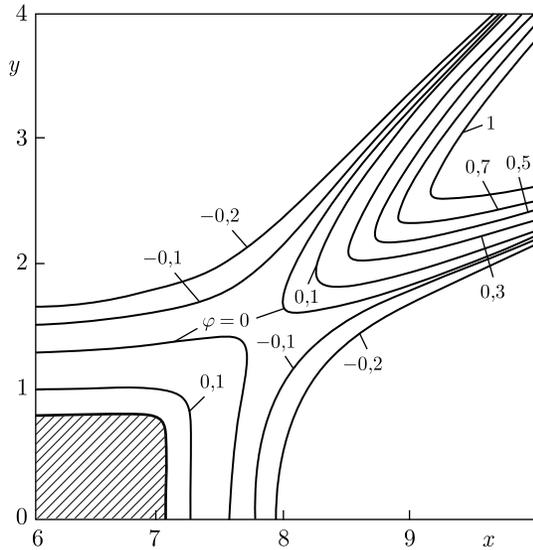


Рис. 11. Эквипотенциальные кривые для скругленного прямоугольника  $a/b \sim 9$  в сечении  $z = 0,21$

роту проявляется тем сильнее, чем больше кривизна  $k_\Gamma$  контура в скругленном угле ( $k_\Gamma = 10$  и  $k_\Gamma = 25$  на рис. 9). На рис. 10 приведены сечения  $z = 0,2$  и  $z = 0,9$  для квадрата при  $n = 2$ .

Для прямоугольников с  $a/b > 1$  конфигурация поля в окрестности скругления в качественном отношении сохраняется, при этом теряется симметрия относительно луча  $45^\circ$ . На рис. 11 представлены эквипотенциалы в сечении  $z = 0,21$  для прямоугольника с  $a/b \sim 9$ .

**7.4. Эллиптическое сечение.** Попытка решения задачи в случае вырезки в виде эллиптического цилиндра из потока в плоском диоде при эмиссии в  $\rho$ -режиме предпринята в работе [47]. Метод разделения переменных, предложенный в [5] для двумерных систем, предлагалось распространить на трехмерную задачу в эллиптической цилиндрической системе  $\xi, \eta, z$ :

$$x = \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad y = \sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{ch} \xi \cos \eta. \quad (82)$$

Тот факт, что потенциал и поле на границе пучка не зависят от  $\eta$ , оказался основанием для предположения, что решение также не зависит от этой координаты. Оно было представлено в виде контурного интеграла в комплексной плоскости параметра  $p$  с подынтегральным выражением в виде бесконечного ряда по функциям Матье  $M_{2m}^{(j)}(\xi)$ , в свою очередь, представлявшимся бесконечными рядами из произведений функций Бесселя и Ханкеля. Предположение о независимости решения от  $\eta$  привело, в частности, к выводу о зависимости угла наклона нулевой эквипотенциали к границе потока от точки контура.

Расчеты на основании решения [31] в виде определенного интеграла в системе (82) выполнены в работе [48]. В поперечных сечениях  $z = \text{const}$  эквипотенциалы представ-

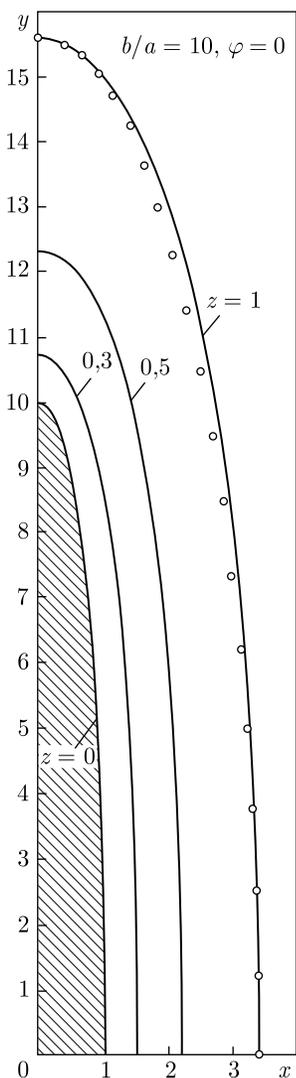


Рис. 12. Эквипотенциальные кривые  $\varphi = 0$  в сечениях  $z = \text{const}$  для эллиптического пучка  $b/a = 10$

ляют собой эллипсоидальные овалы, очень близкие к эллипсу с соответствующими полуосями. На рис. 12 для  $b/a = 10$  координаты эллипса отмечены кружками. В сечениях, проходящих через вершины эллипса, эквипотенциали тем быстрее увеличивают свой наклон, чем больше кривизна контура, не поворачивая при этом к катоду, как это было в случае скругленного прямоугольника. При удалении от границы цилиндра отношение полуосей  $b/a$  быстро стремится к константе, зависящей от значения этого параметра для контура пучка и отличной от единицы, как этого можно было бы ожидать (рис. 13).

Универсальным способом построения решения является представление его в виде ряда. Дж. Г. Стокс писал по этому поводу, что «решение в виде ряда имеет преимущество широкой приложимости, но совершенно лишено элегантности».

Заметим, что подобный подход может давать в самом общем случае не страдающие этим недостатком результаты, относящиеся к локальным характеристикам траекторий частиц (кривизна, кручение) [49, 50] или эквипотенциальных поверхностей (угол наклона к границе пучка, кривизна и связанное с этими параметрами вычисление точных значений нетабличных интегралов и сумм [28, 29]). Информация такого рода имеет непосредственное практическое значение, так как относится к области неразогнанных «мягких» электронов большой плотности, легко поддающихся нежелательному внешнему воздействию из-за нарушения адекватности модели. Кроме того, в механике жидкости известны поразительные по своей неожиданности и эффективности результаты по применению нелинейных преобразований Д. Шенкса [52], являющихся частным случаем аппроксимации Паде [53] рациональными дробями, к коротким фрагментам медленно сходящихся или расходящихся рядов. В условиях дефицита членов разложения более успешными могут оказаться нелинейные  $m$ -преобразования, предложенные Л. П. Шантуриным [54, 55]. Мысль о том, что не имеющий на первый взгляд физического смысла ряд может содержать информацию о точном решении, которая поддается

извлечению, представляется очень привлекательной.

Отвлекаясь от перечисленных возможностей, следует заметить, что хотя в прагматическом плане быстро сходящийся ряд может являться вполне пригодным решением, с эстетической точки зрения нельзя не согласиться с Дж. Г. Стоксом. В полной мере суждение Дж. Г. Стокса касается опубликованной в журнале «Physical Review. Accelerators and Beams» статьи [56], в которой авторы исправили ошибку, допущенную в работе [47], дополнив подынтегральную функцию контурного интеграла бес-

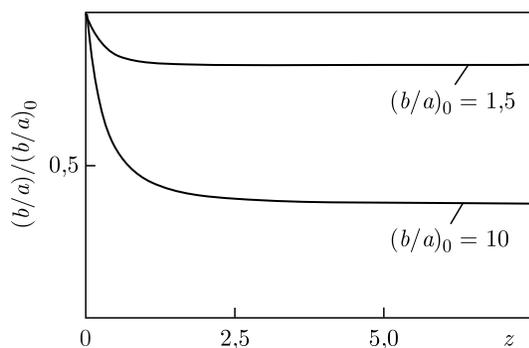


Рис. 13. Функция  $b/a(z)$  в зависимости от значения  $b/a(0)$  для эквипотенциали  $\varphi = 0$  эллиптического пучка

конечным рядом с произведениями радиальных и угловых функций Матье. Это же решение вошло в диссертацию [57] одного из авторов этой статьи.

Качество решения в виде контурного интеграла, представляющего в известном смысле пример «вещи в себе», применительно к задаче о круговом конусе оценивал Д. Е. Рэдли [5, 6], метод которого в работах [47, 56, 57] распространен на трехмерный случай: «The only hope of numerical evaluation of the integral in (10) lies in expanding the integrand in powers of  $\nu$ . Expansion in ascending powers of  $\nu$  leads to a form valid near the beam surface, whilst an asymptotic expansion leads to a solution valid near the cathode edge». Здесь  $\nu$  — параметр в комплексной плоскости, по которому ведется интегрирование с обходом особенности в нуле.

Публикации [56, 57] появились 30–35 лет спустя после выхода работ [31, 46, 48], в которых решение более общей задачи представлено в замкнутой форме, удобной для анализа и проведения непосредственных вычислений. В работе [58] в элементарных функциях приведено параксиальное решение задачи о формировании пучка с сечением в виде скругленного прямоугольника. Эллиптический пучок в этом приближении рассмотрен в работе [59]. Результаты работ [31, 46, 48, 58] отражены в обзоре [60].

Решение в виде двойного интеграла (61) приводит еще к одной форме для пучков с эллиптическим и круглым сечениями, для последнего — к четвертой по счету [34]. При этом достаточно сохранить два или один член в формуле (81). В случае эллиптического сечения координаты  $u, v$  с границей пучка  $v = 0$  получаются из эллиптических координат  $\xi, \eta$  с границей  $\xi = \xi_0$  в (82) за счет поворота осей  $x, y$  на  $90^\circ$  и выбора нормировочной константы в соответствии с условием

$$c_0^2 = \frac{1 - c_1^2}{4c_1}. \quad (83)$$

В координатах  $\xi, \eta$  и  $u, v$  полуоси эллипса определены формулами

$$a = \operatorname{ch} \xi_0 = c_0 \frac{1 + c_1}{1 - c_1}, \quad b = \operatorname{sh} \xi_0 = c_0. \quad (84)$$

Связь координат  $x, y$  и  $u, v$  и функция  $h^2(u, v)$  из (61) описываются выражениями

$$x = c [\exp(-v) + c_1 \exp(v)] \cos u, \quad y = c [\exp(-v) - c_1 \exp(v)] \sin u, \quad (85)$$

$$h^2(u, v) = c^2 [\exp(-2v) + c_1^2 \exp(2v) - 2c_1 \cos u].$$

Для пучка с круглым сечением имеем

$$\varphi = z^{4/3} - \frac{4}{9}c^2 \int_0^v \exp(-2\eta) \int_0^{v-\eta} (z^2 + r^2)^{-1/3} F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}; 1; \lambda\right) d\xi,$$

$$x = c \exp(-v) \cos u, \quad y = c \exp(-v) \sin u, \quad h^2 = c^2 \exp(-2v). \quad (86)$$

**7.5. Прямоугольник на сфере.** В силу того, что уравнение (63) включает двумерный лапласиан по  $\xi, \psi$  с декартовой метрикой, аппарат комплексных переменных и конформных отображений может быть использован на псевдоплоскости  $\xi, \psi$ . Для почти прямоугольного контура  $\xi = \xi_e(u), \psi = \psi_e(u)$  вместо (81) имеем [30, 61]

$$\bar{\xi} + i\psi = c \left[ t + \sum_{k=1}^n c_k t^{1-2k} \right], \quad t = \exp(-v + iu), \quad \bar{\xi} = \xi - \xi_*, \quad \xi_* = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) \quad (87)$$

при сохранении значений коэффициентов из (81).

Прямоугольник на псевдоплоскости  $\xi, \psi$  при  $r = 1$  образован в результате пересечения линий  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_2$  и  $\psi = \pm\psi_0$  (рис. 14, а), переменные  $\theta, \psi$  играют роль

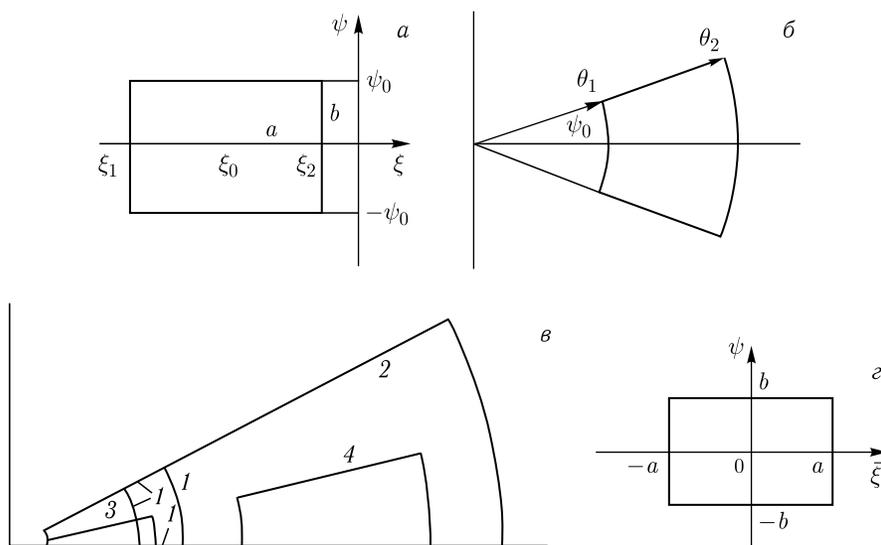


Рис. 14. Контур сечения на псевдоплоскости  $\xi, \psi$  (а), псевдоплоскости  $\theta, \psi$  (б), псевдоплоскости  $\xi, \psi$  (в) с различными параметрами: кривая 1 —  $a/b = 1/3$  ( $\theta_1 = 22^\circ, \theta_2 = 30^\circ, \psi_0 = 28^\circ$ ); кривые 2–4 —  $a/b = 3$  (2 —  $\theta_1 = 6^\circ, \theta_2 = 86^\circ, \psi_0 = 28^\circ$ ; 3 —  $\theta_1 = 6^\circ, \theta_2 = 25^\circ, \psi_0 = 14^\circ$ ; 4 —  $\theta_1 = 40^\circ, \theta_2 = 73^\circ, \psi_0 = 14^\circ$ ), псевдоплоскости  $\bar{\xi}, \psi$  (з)

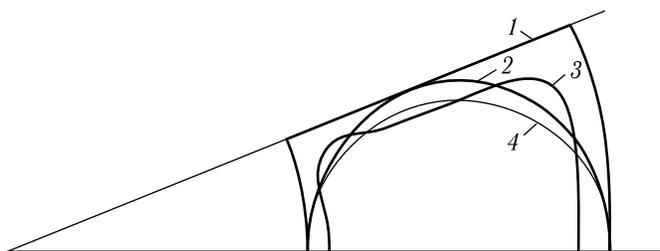


Рис. 15. Аппроксимация «квадрата» при  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = 60^\circ$ ,  $\psi_0 = 22^\circ$ : 1 — «квадрат» на псевдоплоскости  $\theta, \psi$ ; 2 — нулевое приближение; 3 — скорректированный контур при  $n = 4$ ; 4 — окружность

полярного радиуса и азимута (рис. 14, б). Длины сторон прямоугольника определены формулами

$$a = \xi_1 - \xi_2, \quad b = 2\psi_0, \quad (88)$$

симметризация контура выполняется за счет сдвига на  $\xi_*$ . В плоскости  $x, y$  поворот сечения на  $90^\circ$  не приводит к геометрическим последствиям, в то время как прямоугольники на псевдоплоскости  $\xi, \psi$  с отношением сторон  $a/b$  и  $b/a$  соответствуют различным геометрическим объектам (рис. 14, в). Кроме того, прямоугольники с фиксированным значением  $a/b$  являются подобными только на псевдоплоскости  $\xi, \psi$ .

Рассмотрим в качестве примера «квадрат» в координатах  $\bar{\xi}, \bar{\psi}$  со следующими значениями соответствующих углов:  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = 60^\circ$ ,  $\psi_0 = 22^\circ$ . Этот контур приведен на рис. 15, где нулевая аппроксимация области кругом  $\bar{\xi}^2 + \bar{\psi}^2 = \text{const}$  и скорректированный вариант при  $n = 4$ . Чтобы продемонстрировать отличие нулевого приближения от истинного круга, проведена окружность диаметром, равным размеру сечения  $\psi = 0$  (кривые 1–4). Из рис. 15 видно, что растяжение контура 3 в 1,206 раз (масштабный множитель  $c_0$  в (87)) дает приемлемую аппроксимацию исходной кривой. Использование следующих членов разложения (87) приведет к еще меньшему отличию от оригинала.

**7.6. Конические пучки с прямоугольным сечением.** Контур (87) может быть использован при решении задачи о формировании конической вырезки из сферического диода с использованием формулы (67).

Симметричный относительно полюса сферы радиусом  $r = 1$  контур естественно задавать в касательной плоскости, а потом перенести на поверхность сферы. Работа на плоскости более привычна, и, кроме того, прямоугольные мишени, на которые должен воздействовать пучок, обычно бывают плоскими. Если  $x = x_e(u)$ ,  $y = y_e(u)$  — параметрические уравнения контура при  $z = 1$ , то контур на сфере определен выражениями

$$\xi = \xi_e = \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_e}{2} = \ln \left( \frac{\sqrt{R_e^2 + 1} - 1}{R_e} \right), \quad \psi = \psi_e = \operatorname{arctg} \frac{y_e}{x_e}, \quad R_e^2 = x_e^2 + y_e^2. \quad (89)$$

Однако для контуров (89) с функциями  $x_e, y_e$ , определяющими скругленный прямоугольник, неизвестно конформное отображение, задающее на псевдоплоскости  $\xi, \psi$  однозначную ортогональную сетку криволинейных координат  $u, v$ , в которой контур  $\Gamma$  имеет уравнение  $v = 0$ . Вместе с тем локальные характеристики нулевого (70)

и ускоряющего электродов могут быть получены в любой системе  $u, v$ , построенной с использованием аналитического продолжения контура (89). Соответствующая информация является пригодной для расчета трехмерных оптических систем.

Формулы (87) позволяют получить точное решение задачи о формировании радиального релятивистского бриллюэновского потока (71), (72) с прямоугольным на сфере контуром [61]. Для нерелятивистского конического пучка решение выражено в элементарных функциях [61].

## 8. ПАРАКСИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

**8.1. Модели узких пучков заряженных частиц.** Практические потребности выходят далеко за пределы решений, описываемых элементарными или специальными функциями, хотя бы и в варианте рассмотренных в предыдущих разделах вырезов, приводящих к трехмерным задачам. Речь, скорее, идет о потоках, которые были названы квазицилиндрическими, с высокой компрессией, неоднородным токоотбором, искривленной осью в присутствии внешнего неоднородного магнитного поля. Единственным подходом в этих случаях при решении задачи формирования интенсивного пучка является параксиальное приближение. Сравнение результатов с точным решением в задачах, где оно существует, позволяет оценить возможности приближенного описания и наметить пути их корректировки.

Узкие пучки с искривленной осью и возможностью выделения фрагмента с произвольным сечением могут быть рассчитаны на основе параксиальной теории В. Н. Данилова [62, 63], геометризованной теории интенсивных пучков [64–69], а также на примыкающей к ней теории эллиптических потоков [59, 70–75]. Геометризованные уравнения представляют новый вид уравнений пучка и формулируются в заранее неизвестной неортогональной системе координат  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), связанной с траекториями (линии  $x^1$ ) или трубками тока (поверхности  $x^2 = \text{const}$ ). Помимо уравнений движения и Максвелла геометризованные соотношения включают в себя уравнения для метрического тензора системы координат — условия эвклидовости пространства (шесть тождеств Ляме). Комбинированные геометризованные модели с повышенной точностью описания прикатодной зоны и расчетом траекторий — наиболее консервативных элементов модели — в первом приближении позволяют учесть неоднородный токоотбор и переменную кривизну стартовой поверхности.

Узкие пучки характеризуются плотностью  $\rho = \rho(l)$ , зависящей от продольной координаты.

**8.2. Квазиаксиально-симметричные потоки.** Под этим термином понимаются пучки с круглым сечением  $R = R_0(l)$  и гладкой пространственной осью с кривизной  $k$  и кручением  $\kappa$ , уравнения которых формулируются в ортогональной системе  $l, x, y$  с «раскруткой» [76]. Последняя связана с неортогональными координатами  $l, s, q$  ( $s, q$  — расстояния по нормали и бинормали к оси в сечении  $l = \text{const}$ ) соотношениями

$$x + iy = (s + iq) \exp(i\theta), \quad \theta = \int \kappa dl, \quad R^2 = x^2 + y^2. \quad (90)$$

Решение внешней задачи в первом приближении для электростатических потоков  $R = R_0(l)$  в виде асимптотического ряда по малому геометрическому параметру  $\varepsilon$

имеет вид [1]

$$\varphi = U + \varepsilon 2kU(x \cos \theta + y \sin \theta) + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} \left( k^2 U - \frac{1}{2} U'' \right) R^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} k^2 U \cos 2\theta (x^2 - y^2) + 3k^2 U \sin 2\theta xy + \frac{1}{4} \rho R_0^2 \left( 1 - 2 \ln \frac{R}{R_0} \right) \right], \quad (91)$$

где  $U(l)$  — потенциал на оси.

Высшие приближения этой задачи приведены в [1, 15, 76]. Ряд (91) характеризуется возрастанием порядка особенности членов:  $U \sim l^{4/3}$ ;  $U''$ ,  $\rho \sim l^{-2/3}$ . В работе [77] в результате исключения  $\rho$  с помощью параксиального уравнения, введения деформированной продольной координаты  $\zeta$  и эффективной поперечной координаты  $\eta$ , а также использования понятия «фальшивого» асимптотического представления расходящаяся часть разложения регуляризована с соблюдением принципа невозрастания порядка особенности [51]

$$\varphi = \operatorname{Re} U(\zeta + i\eta) + U(\zeta)F(\zeta, R), \quad \Lambda = -\frac{1}{2} \frac{R_0'}{R_0}, \quad (92)$$

$$\zeta = l - \varepsilon^2 R_0^2 \Lambda(\zeta) \left( 2 \ln \frac{R}{R_0} + 1 \right), \quad \eta = R_0 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{R^2}{R_0^2} - 1 - 2 \ln \frac{R}{R_0} \right) \right]^{1/2},$$

где  $F(\zeta, R)$  — регулярная функция.

Общий случай релятивистского пучка в магнитном поле рассмотрен в [2, 78], когда использованный в [77] алгоритм не позволяет полностью выделить особенность, имеющую более сложный характер. В работе [78] показано, что при эмиссии в  $\rho$ -режиме структура особенности на эмитирующей поверхности для потенциала описывается «линейной комбинацией» двух точек ветвления, роль коэффициентов при которых играют регулярные функции

$$\varphi = l^{4/3} \Phi_1 + l^{8/3} \Phi_2 + l^{6/3} \Phi_3. \quad (93)$$

При эмиссии в  $T$ -режиме структура особенности описывается двучленной формулой

$$\varphi = l^{3/2} \Phi_1 + l^{2/2} \Phi_2. \quad (94)$$

В работе [4] идея метода многих масштабов [51], использованного в механике жидкости при рассмотрении задач с двумя существенно различными масштабами длины, модифицирована следующим образом. Вместо продольной координаты  $\zeta$  введены две координаты — «быстрая»  $z$  и «медленная»  $Z$ :

$$\zeta \rightarrow z + \varepsilon Z, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Z}. \quad (95)$$

Быстрая координата предназначена для описания особенности в области ее влияния, медленная — соответствует регулярным функциям. В правой части уравнения Лапласа при этом появляются члены  $\varepsilon 2\partial^2 \varphi / \partial z \partial Z$ ,  $\varepsilon^2 \partial^2 \varphi / \partial Z^2$ , что дает возможность организовать итеративный процесс построения решения. По завершении вычислений обе продольные координаты отождествляются:  $\zeta = z = Z$ . Все приближения, кроме нулевого, будут выражаться через интегралы, кратность которых в каждом приближении увеличивается на два. По этой причине для практических задач интерес представляет только нулевое приближение. В работах [4, 15, 79] построены семь

приближений для тестовой задачи с потоком по траекториям-окружностям (73) и оценены возможности нулевого приближения, оказавшиеся приемлемыми с практической точки зрения (ошибка  $\sim 10\%$  при удалении 0,4 от пучка шириной 0,1).

Для электростатических потоков (91) особенность факторизуется, в результате чего первый член принимает вид с регулярной функцией  $\bar{U}$ :

$$\operatorname{Re} U(\zeta + i\eta) = \operatorname{Re} (\zeta + i\eta)^{4/3} \bar{U}(\zeta, R). \quad (96)$$

Аналогичная операция может быть выполнена в случае более сложной структуры особенности (93), (94).

**8.3. Трехмерные потоки.** Потенциал вне пучка, необязательно тонкого, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0; \quad h_1 = 1 - k(x \cos \theta + y \sin \theta). \quad (97)$$

Идея построения параксиального приближения для осесимметричных систем предложена В. Т. Овчаровым в работе [11]:

$$\varphi = \varphi_i + \varepsilon^2 S, \quad (98)$$

где  $\varphi_i$  — потенциал в пучке;  $S$  — функция второго порядка малости. Она удовлетворяет двумерному уравнению Пуассона с однородными условиями на границе потока, если продольная производная  $\partial/\partial l$ , кривизна  $k$  и кручение  $\kappa$  оси имеют порядок  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = -\rho, \quad S = -\operatorname{Re} \int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} \rho(l, u + i\xi, \eta) h^2(l, u + i\xi, \eta) d\xi. \quad (99)$$

**8.4. Цилиндр с произвольным сечением при эмиссии в  $\rho$ -режиме.** Решение в этом случае имеет вид [58]

$$\varphi = z^{4/3} - \frac{4}{9} z^{-2/3} \operatorname{Re} \int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} h^2(u + i\xi, \eta) d\xi, \quad (100)$$

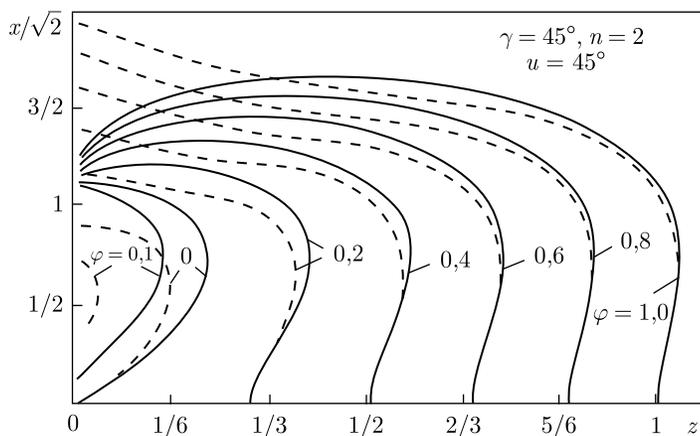


Рис. 16. Сравнение приближенного (сплошные линии) и точного (штриховые) решений в диагональном сечении скругленного квадрата

где функция  $h^2(u, v)$  для системы (81) определена формулой

$$c^{-2}h^2(u, v) = \exp(-2v) - 2c_1 \cos 2u + \exp(2v)(c_1^2 - 6c_2 \cos 4u) + \dots \quad (101)$$

с сохранением коэффициента  $c_4$ . Выполняя интегрирование, получаем решение в элементарных функциях. На рис. 16 приведено сопоставление точного и приближенного решений для скругленного квадрата в диагональном сечении. В качественном отношении структуры полей близки, но приближенное решение отличается большей «мягкостью» как в диагональном сечении, так и в поперечных сечениях (меньшая кривизна эквипотенциалей и ее градиента). Различие решений для эллиптического контура при  $b/a = 10$  показано на рис. 17.

При локальном рассмотрении выражения (99) в случае произвольного контура приходим к уравнению нулевой эквипотенциали

$$X = \alpha_3 z + \frac{3}{4}k_\Gamma z^2 + \frac{1}{4}\alpha_3 k_\Gamma^2 z^3, \quad \alpha_3 = \operatorname{tg} \vartheta = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad (102)$$

позволяющему вычислить кривизну  $k_0$  и производную  $k'_0$  этой линии в точке старта. Угол наклона  $\vartheta \approx 64,76^\circ$  при параксиальном описании пучков в связанной с геометрией потока системе координат имеет столь же универсальный характер, как и угол  $67,5^\circ$  при точной постановке задачи. На основании (102) для  $k_0, k'_0$  имеем

$$k_0 = \frac{3}{2} \left( \frac{2}{11} \right)^{3/2} k_\Gamma \approx 0,116k_\Gamma, \quad (103)$$

$$k'_0 = \mp \frac{45}{\sqrt{2}} \left( \frac{2}{11} \right)^{5/2} k_\Gamma^2 \approx \mp 0,499k_\Gamma^2,$$

что на 5,7 и 19,5% соответственно отличается от точных значений (57).

В работе [33] структура решения не позволила получить локальное уравнение нулевой эквипотенциали, в параксиальном приближении эта задача решена в [80].

Помимо приведенного сравнения решений для цилиндрических пучков со скругленным прямоугольником и эллипсом в сечении опишем два примера параксиального формирования непараксиальных потоков в системе, связанной с геометрией течения. Результаты свидетельствуют в пользу геометризованной теории в тех случаях, когда возможна альтернатива.

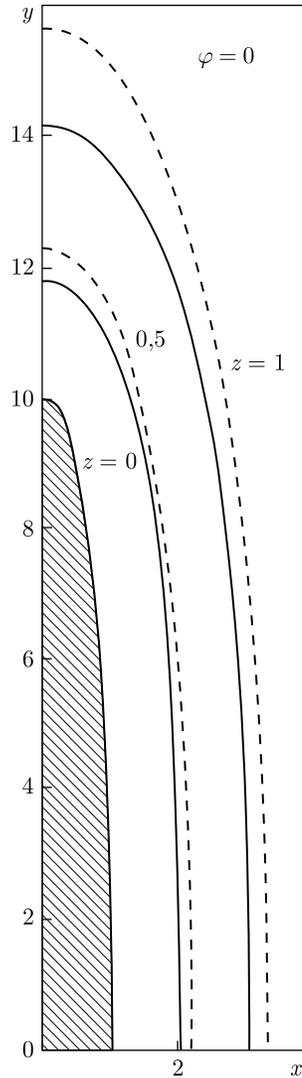


Рис. 17. Сравнение приближенного (сплошные линии) и точного (штриховые) решений в поперечных сечениях для эллиптического пучка  $b/a = 10$

**8.5. Решение Б. Мельцера.** В параксиальном приближении задача формирования течения (73) с границей  $R = R_e$  описывается выражениями [80]

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial S}{\partial R} \right) = -\rho, \quad \varphi = \varphi_i + \frac{1}{2} \rho \left[ \frac{1}{2} (\bar{R}^2 - 1) - \bar{R}^2 \ln \bar{R} \right], \quad \bar{R} = \frac{R}{R_e}. \quad (104)$$

Координата эквипотенциали  $\varphi = 0$  при  $\psi = 60^\circ$  для точного решения [81] равна 2,26. Ее приближенное значение следует из уравнения

$$2 + \frac{1}{2} (\bar{R}^2 - 1) - \bar{R}^2 \ln \bar{R} = 0 \quad (105)$$

и равно 2,2295, что дает ошибку порядка 1,3%.

**8.6. Конус с произвольным сечением.** Для решения в виде (97), опуская в получающемся из (63) уравнении производные по  $\eta$ , имеем [82]

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial \psi^2} = -\frac{r^2 \rho}{\text{ch}^2 \xi}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} = -r^2 \rho \frac{h^2(u, v)}{\text{ch}^2 \xi}, \quad h^2 = \alpha^2 + \beta^2; \quad (106)$$

$$S = -r^2 \rho \int_0^v dt \int_0^{v-t} \frac{h^2(u + i\tau, t)}{\text{ch}^2 \xi(u + i\tau, t)} d\tau.$$

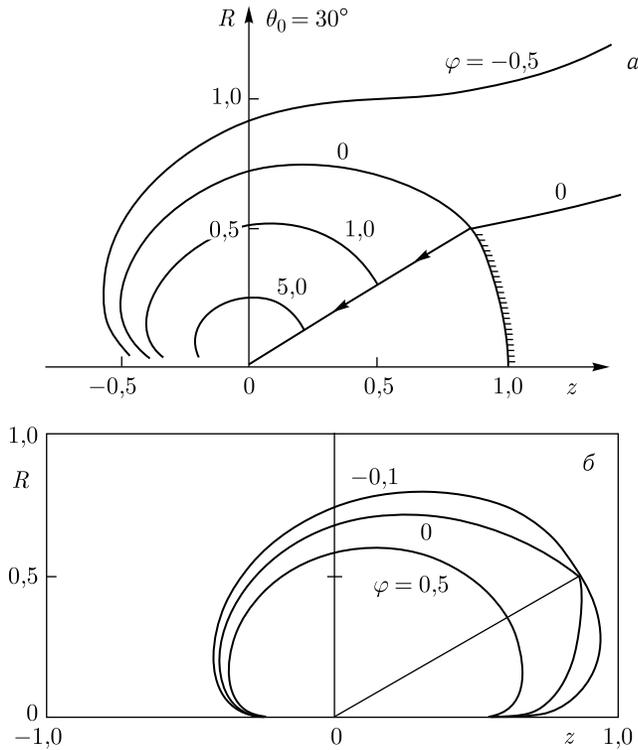


Рис. 18. Сравнение точного (а) и приближенного (б) решений для осесимметричного конического пучка  $\theta_0 = 30^\circ$

Определив круговой конус параметрическими уравнениями

$$\xi_e = \xi_0, \quad \psi_e = -u, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad (107)$$

получим решение в виде

$$\varphi = \varphi_i - \rho r^2 \left\{ \ln \left( \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \right) + \cos \theta_0 \ln \left[ \frac{\operatorname{tg}(\theta/2)}{\operatorname{tg}(\theta_0/2)} \right] \right\}, \quad \xi_0 = \ln \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}. \quad (108)$$

На рис. 18 приведено сопоставление приближенного и точного решений, обнаруживающее близость результатов для эквипотенциалей  $\varphi \geq 0$ . Заметим, что классический параксиальный подход к этой задаче в цилиндрических координатах  $z, R$ , в котором конический пучок трактуется как квазицилиндр в отличие от «истинного цилиндра»  $\theta = \theta_0$  в сферической системе, приводит к соотношению, где угол наклона эквипотенциали  $\vartheta$  зависит от  $\theta_0$ :

$$[\sin \theta_0 + \cos \theta_0 \operatorname{tg}(\vartheta - \theta_0)]^2 = 9/2. \quad (109)$$

**8.7. Тороидальный пучок с произвольным сечением.** Поток с подобной геометрией ограничен поверхностью вращения и имеет азимут  $\psi$  в качестве продольной координаты. Опуская в параксиальном приближении вторую производную по  $\psi$  в уравнении Лапласа в системе  $R, \psi, z$ , приходим к первому уравнению для  $S$  в (28) и решению для  $\varphi$  в форме (29). Пучок может быть описан при помощи параксиальной теории [62] для случая, когда осью является окружность, при этом геометрические размеры сечения меняются в соответствии с результатами [63]. Начальная форма сечения не претерпевает изменений для точного решения (73). Поле вне пучка в варианте с двойным интегралом определено формулой

$$\varphi = \frac{1}{2R^2} \Phi^{4/3}(\psi) - \frac{\Phi^{-2/3}(\psi)}{2\sqrt{R}} \operatorname{Re} \int_0^v d\eta \int_0^{v-\eta} R^{7/2}(\zeta, \eta) h^2(\zeta, \eta) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \lambda\right) d\zeta. \quad (110)$$

Формирующие электроды анализировались в работе [82] для тороида с круглым сечением.

**8.8. Формирование торцевой области планарного гиротрона.** В работах [83, 84], посвященных планарному гиротрону, при расчетах электронно-оптической системы используются численные методы. Формирование первоначально прямоугольного сечения, трансформирующегося в параллелограмм за счет сносовой скорости, требует привлечения аппарата, которым не располагают численные модели. В работе [85], распространяющей подход [58] на новый вид сечения, в параксиальном приближении в элементарных функциях построено решение уравнения Лапласа в окрестности торца. Параметр  $\gamma$ , от которого зависят углы сечения, является функцией длины дуги  $l$  оси пучка, получаемой в результате расчета электронного потока на основании параксиальной [86] или геометризованной теории [67] плоских потоков.

**8.9. Асимптотический ряд с уменьшающимся порядком особенности.** Разложение для потенциала (91) при эмиссии в  $\rho$ -режиме, как уже говорилось, существенно неравномерно. Этим в значительной степени объясняется отличие параксиальных

результатов от точного решения, максимальное в прикатодной зоне. В работах [87, 88] предпринята попытка устранения этого дефекта для трехмерных параксиальных потоков. Общий подход специализирован в задаче о формировании клиновидного пучка с произвольным сечением [89].

## 9. ТРАНСПОРТИРОВКА ПУЧКА С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ СЕЧЕНИЕМ

**9.1. Классические модели.** В монографии [90] приведены выражения для потенциала внутри и вне эллиптического цилиндра с произвольным одномерным распределением пространственного заряда, зависящим от эллиптической координаты  $\xi$ . Эти формулы могут быть использованы для расчета конфигурации канала, сохраняющего начальную форму потока в обычном для параксиальной теории предположении о продольной скорости, намного превышающей скорость поперечного расплывания пучка. Довольно сложное решение [90] в случае полиномиального распределения  $\rho$  удалось свести к элементарным функциям [91].

Известные формулы И. М. Капчинского [92] для потенциала в пучке  $\varphi_i$  и в лапласовской области  $\varphi$  получаются в случае  $\rho = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{1}{4}\rho [(x^2 + y^2) + C_k(x^2 - y^2)], \quad C_k = -\frac{a-b}{a+b}; \\ \varphi &= \varphi_i + \frac{1}{8}\rho \{2 \operatorname{sh} 2\xi_0(\xi - \xi_0) - (\operatorname{ch} 2\xi - \operatorname{ch} 2\xi_0) + [\operatorname{ch} 2(\xi - \xi_0) - 1] \cos 2\eta\}; \quad (111) \\ x &= \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \end{aligned}$$

где  $\xi = \xi_0$  — уравнение границы потока.

Квадруполь с интенсивностью  $C_k$  добавлен к решению уравнения Пуассона исходя из требования логарифмической особенности функции  $\varphi$  на бесконечности.

Заметим, что бесконечный эллиптический цилиндр является математической абстракцией, поэтому придание решению (111) физического смысла с затухающим полем выглядит искусственно. Этот формальный результат нельзя использовать при расчетах реальных устройств с пучками заряженных частиц. Соответствующие задачи формулируются либо как краевые задачи (например, эволюция пучка в канале заданного сечения при требовании эквипотенциальности стенки), либо как задачи Коши с начальными условиями на границе потока (синтез конфигурации канала, сохраняющего начальную форму пучка или расчет формирующих электродов). Ни в том, ни в другом случае нет места для выполнения требований на бесконечности [93].

### 9.2. Примеры точных решений, опровергающие классические представления.

Известные решения о расчете лапласовского поля вне пучков не только эллиптического, но и круглого сечений определяют изменение потенциала на бесконечности, отличное от логарифмического. Так, в работах [5, 94] показано, что асимптотика решения для цилиндрического пучка с круглым сечением (34) при больших значениях  $R$  описывается выражением с функцией Лежандра

$$\varphi = r^{4/3} P_{4/3}(\cos \theta), \quad (112)$$

где  $r, \theta$  — сферические координаты.

Рис. 19 свидетельствует, что эквипотенциали вне эллиптического цилиндра не стремятся к окружностям в сечениях  $z = \text{const}$ . Электрическое поле при удалении от обобщенного бриллюэновского потока с эллиптическими орбитами частиц в однородном магнитном поле и внешнем электрическом квадруполе [61, 95] имеет квадрупольный характер, полученный от объединения внешнего квадруполя и квадруполя, порожденного пространственным зарядом [15, 61]. Электрическое поле, стремящееся к бесконечности при удалении от границы потока, означает, что для поддержания требуемой формы пучка, находясь на бесконечности, нам необходимо располагать бесконечной силой.

Впрочем, перечисленные факты, как и логарифмическая особенность в [90, 92], являются чисто математическим материалом, не имеющим отношения к реальным ситуациям: либо пучок ограничен стенками канала, либо электроды в электронно-оптической системе с поперечными размерами, в 3–5 раз превосходящими размер пучка, эффективно выполняют задачу формирования потока.

По сути дела, в соответствии с формулой (111) эллиптический пучок в ограниченной области предлагается рассматривать не в свободном от полей пространстве, а во внешнем квадруполе. Последний на бесконечности, отсутствующей в физической задаче, устраняет квадруполь пучка, в результате чего главным членом в выражении для  $\varphi$  становится логарифмический член. Следствием этого подхода является быстрое стремление эквипотенциалей вне пучка к окружностям, далеко отстоящим от вершины эллипса с меньшей кривизной. На рис. 19 представлены пучок с отношением полуосей  $a/b = 5$ , потенциалом в вершинах 2,1, 0,42 и эквипотенциаль  $\varphi = 5,5$  ( $a/b = 1,22$ ), которая может определять форму канала транспортировки [91].

**9.3. Модель Дж. Лоусона.** В монографии [96] и работе [97] приведен еще один пример использования внешнего квадруполя: при интенсивности

$$C_L = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \tag{113}$$

потенциал на контуре постоянен. Дж. Лоусон считал, что этот вариант не имеет практического значения, поскольку пучок должен заполнять канал полностью (без просветов). Авторы работы [97] установили факт перестройки поля в лапласовской области с образованием сепаратрисы, однако отвергли этот вариант из-за чересчур малого зазора в случае замкнутого эквипотенциального канала.

**9.4. Канал с высоким значением коэффициента заполнения.** На рис. 20 представлена качественная картина поля с квадруполем (113). При  $a = 5$ ,  $b = 1$  соответствующие координаты  $x_*$ ,  $y_*$  сепаратрисы имеют значения  $x_* = 6,6$ ,  $y_* = 1,026$ : сепаратриса не только чересчур близка к вершине  $B$ , но и слишком далека от вершины  $A$ .

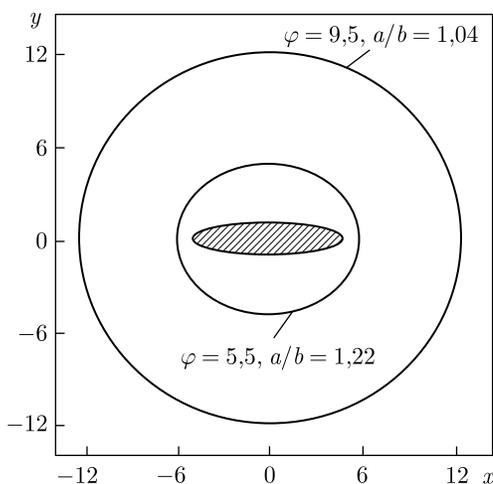


Рис. 19. Эквипотенциали вне эллиптического пучка  $a/b = 5$  с квадруполем  $C_k$

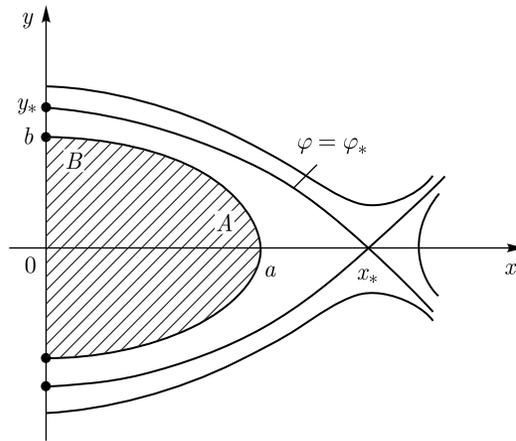


Рис. 20. Качественная картина поля вне эллиптического пучка с квадруполем  $C_L$

Квадруполь (111) приводит к чрезмерно большим, а квадруполь (113) — к недостаточно большим значениям  $y_*$ . Очевидно, что должны быть удачные промежуточные варианты [98]. Для случаев  $a = 5, b = 1$  и  $a = 10, b = 1$  при  $\rho = 1$  квадруполи (111), (113) имеют соответственно следующие интенсивности:

$$\begin{aligned}
 C_k &= -\frac{2}{3} \approx -0,667, & C_L &= -\frac{12}{13} \approx -0,923; \\
 C_k &= -\frac{9}{11} \approx -0,8182, & C_L &= -\frac{99}{101} \approx -0,9802.
 \end{aligned}
 \tag{114}$$

В таблице приведены результаты расчета нескольких вариантов для  $a/b = 5$  и  $a/b = 10$  с разными значениями интенсивности квадруполя, величина  $k$  характеризует степень заполнения канала с сечением, ограниченным эквипотенциалью сепаратрисы и аппроксимируемым эллипсом с полуосями  $x_*, y_*$ . В действительности площадь такого эллипса больше площади, ограниченной сепаратрисой, не говоря уже о том, что контур канала может определяться эквипотенциалью, находящейся под кривой  $\varphi = \varphi_*$ .

Из таблицы видно, что возможны варианты, когда просвет между пучком и каналом ( $\delta x = x_* - a, \delta y = y_* - b$ ) почти постоянен, а коэффициент заполнения достигает высоких значений.

**Параметры пучка и канала при различных интенсивностях квадруполя**

$C$	$\varphi_a$	$\varphi_b$	$\varphi_*$	$\varphi_a/\varphi_b$	$\delta x$	$\delta y$	$k$
$a = 5, b = 1$							
-0,9	2,5	1,9	2,69	1,32	0,45	0,21	0,76
$a = 10, b = 1$							
-0,94	6,0	1,94	6,40	3,09	0,84	1,20	0,42
-0,96	4,0	1,96	4,15	2,04	0,42	0,60	0,60
-0,97	3,0	1,97	3,08	1,52	0,27	0,30	0,75

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Существующие теоретические результаты, относящиеся к точным решениям трехмерных задач и приближенному описанию геометрически разнообразных квазицилиндрических потоков, не учитываются в коммерческих пакетах траекторного анализа. К ним относятся вопросы формирования торцевых областей ленточных пучков конечной ширины, проблемы адекватного построения модели прикатодной зоны в области, занятой зарядами, и вблизи периферии стартовой поверхности (тепловой зазор). Повышение точности расчетов, оценка которой на эталонных физических задачах не встречается в публикациях, актуально как при миниатюризации приборов, так и при возрастании их мощности.

Представление о безусловной достоверности численных моделей, дополненное, возможно, неумелым обращением с ними, приводит либо к публикациям, адекватность которых мог бы обеспечить счет с ошибкой в сотые доли процента, не декларируемой ни одной из коммерческих программ, либо к результатам, противоречащим известным положениям теории [18]. К подобным неожиданным последствиям приводит развитие вычислительной техники и создание программных комплексов, авторы которых ориентированы в большей степени на товарный вид продукта (многочисленные сервисные программы), чем на полную компетентность в вопросах теории интенсивных пучков.

Следует отметить, что исследователи, работа которых не определяется в основном проблемами коммерциализации, понимают недостатки существующих пакетов и изучают возможности повышения их точности [99–104].

Учет пересечения траекторий, указываемый в качестве преимущества перед постановкой синтеза, в действительности не является монополией численного подхода. В работе [105] показано, как этот эффект может быть принят во внимание для параксиального пучка с неоднородным распределением плотности по сечению. Заметим, что расчет неламинарного потока не является целью при решении электронно-оптических задач. Пересечение траекторий под большими углами приводит к токоперехвату элементами конструкции, в лучшем случае уменьшающему срок службы прибора, и это означает, что задача формирования пучка не получила приемлемого решения. В программах анализа такая ситуация может создаваться за счет неадекватного описания прикатодной зоны, выводящей рассмотрение за рамки принятой гидродинамической модели течения. Пересечения под малыми углами не оказывают заметного влияния на результат.

Свою роль играет и укоренившееся мнение, что численные модели заслуживают большего доверия, чем приближенные теоретические построения, которые следует проверять первыми. В действительности расхождение результатов и выявление их причин могло бы содействовать развитию сравниваемых подходов, в то время как совпадение свидетельствует только об одинаковом уровне ошибки, порождаемой разными факторами. В моделях синтеза это в основном ограничения на ширину пучка, в численных моделях — грубое описание прикатодной зоны и ошибки дискретизации.

Противопоставление подходов и крен в сторону численных моделей не способствует развитию ни одного из них, а в целом — прогрессу в области математического описания процессов с интенсивными пучками заряженных частиц.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сыровой В. А. Теория интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004. 552 с.
2. Syrovoy V. A. Theory of Intense Beams of Charged Particles. Elsevier, USA, 2011. 734 p.
3. Harker K. J. Solution of the Cauchy Problem for Laplace's Equation in Axially Symmetric Systems // J. Math. Phys. 1963. V. 4, No. 7. P. 993–997.
4. Данилов В. Н., Сыровой В. А. Приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа применительно к проблеме формирования плотных пространственно-неоднородных пучков заряженных частиц // Прикл. матем. и механика. 1971. Т. 35, № 4. С. 656–668.
5. Radley D. E. The Theory of the Pierce-Type Electron Gun // J. Electr. Contr. 1958. V. 4, No. 2. P. 125–148.
6. Radley D. E. Electrodes for Convergent Pierce-Type Electron Guns // J. Electr. Contr. 1963. V. 15, No. 5. P. 469–477.
7. De Packh D. C., Ulrich P. B. Brillouin Flow in Relativistic Beams // J. Electr. Contr. 1961. V. 10, No. 12. P. 139–146.
8. Сыровой В. А. Бриллюэновские электронные потоки в неоднородных внешних магнитных полях // РЭ. 2014. Т. 59, № 4. С. 375–386.
9. Сыровой В. А. Торцевые формирующие электроды для плотных электронных пучков и осесимметричные бриллюэновские образования // РЭ. 2008. Т. 53, № 4. С. 494–512.
10. Сыровой В. А. Формирование произвольных осесимметричных релятивистских электронных пучков // РЭ. 2013. Т. 58, № 2. С. 185–191.
11. Овчаров В. Т. Внешняя задача для параксиальных электронных пучков // РЭ. 1967. Т. 12, № 12. С. 2156–2161.
12. Кузнецов Ю. Е., Сыровой В. А. О решении уравнений регулярного электростатического пучка при эмиссии с произвольной поверхности // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1966. № 2. С. 41–45.
13. Сыровой В. А. О кривизне нулевого формирующего электрода // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1967. № 5. С. 96–100.
14. Сыровой В. А. Решение задачи о формировании интенсивного пучка заряженных частиц в окрестности криволинейного эмиттера // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 6. С. 28–35.
15. Сыровой В. А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004. 487 с.
16. Сыровой В. А. Об использовании непирсовского угла заделки нулевого формирующего электрода при оптимизации параметров плотного электронного пучка с высокой компрессией // РЭ. 2006. Т. 51, № 7. С. 879–884.
17. Акимов П. И., Невский П. В., Сыровой В. А. Проблема теплового зазора в программах траекторного анализа плотных электронных пучков // РЭ. 2009. Т. 54, № 1. С. 92–101.
18. Акимов П. И., Никитин А. П., Сыровой В. А. К вопросу об адекватности численных моделей при расчете электронно-оптических систем приборов СВЧ с осесимметричными и ленточными электронными пучками // Электрон. техника. Сер. 1: СВЧ-техника. 2018. № 1(536). С. 32–42.
19. Данилов В. Н., Сыровой В. А. К расчету электронных пушек с тепловым зазором по методу синтеза // РЭ. 1976. Т. 40, № 2. С. 418–421.
20. Данилов В. Н., Пегов С. А., Сыровой В. А. Формирование трубчатого пучка заряженных частиц при эмиссии с ненулевой скоростью и напряженностью поля // Прикл. матем. и механика. 1974. Т. 38, № 1. С. 78–83.

21. Ризаханов Р. Н. Аналитическое решение проблемы формирования интенсивного осесимметричного цилиндрического пучка // РЭ. 2006. Т. 51, № 2. С. 226–227.
22. Сыровой В. А. К задаче о формировании цилиндрического электронного пучка // РЭ. 2007. Т. 52, № 5. С. 634–636.
23. Сыровой В. А. Точное решение проблемы формирования кругового конического пучка заряженных частиц // ЖТФ. 1976. Т. 46, № 4. С. 889–892.
24. Кан В. Л. Точное решение проблемы Лэнгмюра для сферического конденсатора // ЖТФ. 1948. Т. 18, № 4. С. 483–494.
25. Вашковский А. В., Сыровой В. А. Формирование сплошных и полых сходящихся конических электронных пучков // РЭ. 2008. Т. 53, № 7. С. 833–841.
26. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. Формирование тороидальных электронных пучков бриллюэновского типа // РЭ. 2016. Т. 61, № 10. С. 1016–1025.
27. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. Формирование релятивистского бриллюэновского тороида // Письма в ЭЧАЯ. 2019. Т. 16, № 2(221). С. 124–126.
28. Сыровой В. А. Формирование биполярных пучков с неизменяющимся сечением // РЭ. 2005. Т. 50, № 8. С. 1003–1016.
29. Сыровой В. А. Формирование биполярного конического пучка с произвольным сечением // РЭ. 2007. Т. 52, № 2. С. 231–250.
30. Сыровой В. А. К теории биполярных и униполярных бриллюэновских потоков // РЭ. 2013. Т. 58, № 3. С. 284–291.
31. Сыровой В. А. Решение задачи Коши для уравнения Лапласа в трехмерном случае применительно к проблеме формирования интенсивных пучков заряженных частиц // Прикл. матем. и механика. 1970. Т. 34, № 1. С. 4–16.
32. Сыровой В. А. Результаты теории антипараксиальных разложений в оптике плотных электронных пучков // РЭ. 1991. Т. 36, № 3. С. 540–559.
33. Сыровой В. А. О формировании цилиндрических электронных пучков с произвольным сечением при эмиссии в  $T$ -режиме // РЭ. 2005. Т. 50, № 2. С. 1503–1508.
34. Сыровой В. А. Формирующие электроды для цилиндрического электронного пучка с произвольным сечением // РЭ. 2012. Т. 57, № 7. С. 804–807.
35. Сыровой В. А. Формирование интенсивного пучка заряженных частиц с произвольной конической поверхностью в качестве границы // ЖТФ. 1971. Т. 41, № 12. С. 2607–2615.
36. Langmuir I., Blodgett K. B. Currents Limited by Space Charge between Concentric Spheres // Phys. Rev. 1924. V. 24, No. 1. P. 49–59.
37. Сыровой В. А. Инвариантно-групповые решения уравнений пространственного стационарного пучка заряженных частиц // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1963. № 3. С. 26–35.
38. Сыровой В. А. О некоторых точных решениях уравнений стационарного моноэнергетического пучка заряженных частиц // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1965. № 6. С. 3–9.
39. Вашковский А. В., Сыровой В. А. О конических бриллюэновских потоках // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 36, № 2. С. 392–399.
40. Рудаков Л. И., Бабыкин М. В., Гордеев А. В. Генерация и фокусировка сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Энергоатомиздат, 1990. 280 с.
41. Миллер Р. Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984. 432 с.
42. Данилов В. Н. О вырожденных решениях уравнений электронного потока // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 1. С. 3–12.
43. Meltzer B. Single-Component Stationary Electron Flow under Space-Charge Conditions // J. Electr. Contr. 1956. V. 2, No. 2. P. 118–127.

44. Сыровой В. А. Применение метода Римана к решению внешней задачи теории формирования плотных электронных пучков в трехмерном случае // РЭ. 1994. Т. 39, № 7. С. 1190–1218.
45. Сыровой В. А. Формирование тороидального пучка заряженных пучков // РЭ. 1974. Т. 19, № 9. С. 1955–1960.
46. Данилов В. Н., Сыровой В. А. Расчет пушки, формирующей интенсивный электронный пучок с сечением, близким к прямоугольному // РЭ. 1977. Т. 22, № 7. С. 1473–1483.
47. Nakai A. A New Method of the Rectilinear Strip Beam Formation under Space-Charge Condition // Nucl. Instr. Meth. 1967. V. 54, No. 1. P. 57–60.
48. Пегов С. А., Сыровой В. А. Формирование цилиндрического пучка заряженных частиц с эллиптическим сечением при эмиссии, ограниченной пространственным зарядом // РЭ. 1974. Т. 19, № 10. С. 2157–2162.
49. Сыровой В. А. О геометрии пространственных электронных потоков в окрестности произвольного гладкого эмиттера // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31, № 8. С. 984–994.
50. Сыровой В. А. Окрестность произвольной стартовой поверхности при эмиссии в  $T$ -режиме // РЭ. 2017. Т. 62, № 5. С. 493–501.
51. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
52. Shanks D. Non-Linear Transformations of Divergent and Slowly Convergent Sequences // J. Math. Phys. 1955. V. 34, No. 1. P. 1–42.
53. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимация Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
54. Шантурин Л. П. Суммирование асимптотических разложений методом нелинейных  $m$ -преобразований // РЭ. 1991. Т. 36, № 5. С. 972–984.
55. Шантурин Л. П. Расширение рабочей области антипараксиальных разложений при синтезе интенсивных релятивистских пучков // Там же. № 6. С. 1193–1206.
56. Bhatt R., Chen C. Theory and Simulation of Non-Relativistic Elliptic-Beam Formation with One-Dimensional Child–Langmuir Flow Characteristics // Phys. Rev. Accel. Beams. 2005. V. 8. P. 014201-1–014201-5.
57. Bhatt R. J. Inverse Problems in Elliptic Charged-Particle Beams. Massachusetts Inst. of Technol., 2006. 159 p.
58. Данилов В. Н., Сыровой В. А. О параксиальном приближении во внешней задаче формирования пространственных электронных пучков // Изв. вузов. Радиофизика. 1977. Т. 20, № 11. С. 1727–1739.
59. Пензяков В. В., Олейников В. И. Приближенное решение задачи формирования эллиптических пучков // РЭ. 1975. Т. 20, № 5. С. 1049–1057.
60. Syrovoy V. A. Shaping of Cylindrical Electron Beam of Arbitrary Cross Section // J. Commun. Technol. Electron. 1994. V. 39, No. 11. P. 30–50.
61. Сыровой В. А. Расчет формирующих электродов в оптике плоских электронных пучков // РЭ. 1994. Т. 39, № 3. С. 481–502.
62. Данилов В. Н. О параксиальном приближении для плотных электронных пучков // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1968. № 5. С. 3–10.
63. Сыровой В. А. Формирование и транспортировка плотного электронного пучка с сечением, близким к прямоугольному // РЭ. 2018. Т. 63, № 8. С. 871–879.
64. Сыровой В. А. Геометризованная теория релятивистских электронных пучков // РЭ. 1999. Т. 44, № 5. С. 615–622.
65. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. Тестирование геометризованных моделей двумерных электронных пучков // РЭ. 2010. Т. 55, № 6. С. 726–756.
66. Сыровой В. А. Геометризованная теория узких электростатических электронных пучков с прямой осью и произвольным поперечным сечением // РЭ. 2014. Т. 59, № 4. С. 358–374.

67. Сыровой В. А. Геометризованная теория плоских электронных пучков и модель электронно-оптической системы планарного гиротрона // РЭ. 2016. Т. 61, № 3. С. 263–280.
68. Сыровой В. А. Геометризованная теория двумерных релятивистских электронных пучков в  $\varphi$ -представлении // РЭ. 2017. Т. 62, № 5. С. 502–507.
69. Сыровой В. А. Геометризованная теория ленточных релятивистских электронных пучков в  $\varphi$ -представлении // РЭ. 2019. Т. 64, № 1. С. 82–95.
70. Сыровой В. А. Теория узких вихревых релятивистских электронных пучков с эллиптическим сечением // РЭ. 2008. Т. 53, № 8. С. 999–1016.
71. Сыровой В. А. Геометризованная теория узких электронных пучков с эллиптическим сечением // РЭ. 2011. Т. 56, № 1. С. 111–124.
72. Сыровой В. А. Модель электронно-оптической системы ленточного пучка конечной ширины при аппроксимации начального прямоугольного контура эллипсом // РЭ. 2016. Т. 61, № 7. С. 692–701.
73. Akimov P., Nikitin A., Chudin V., Gavrilin A., Kalashnikov D., Syrovoy V. Formation and Transport of Intense Sheet Electron Beam for High Power Microwave Devices // IVEC-2016. 2016. P. 329–330.
74. Сыровой В. А. Релятивистские электронные пучки с эллиптическим сечением в плоском магнитном поле // РЭ. 2018. Т. 63, № 5. С. 472–482.
75. Акимов П. И., Гаврилин А. А., Никитин А. П., Сыровой В. А., Шешин Е. П. Электронно-оптические системы с экранированным катодом и ленточным пучком эллиптического сечения // Там же. № 11. С. 1303–1318.
76. Данилов В. Н. Некорректные задачи. Ч. 1 // Квазидвумерные решения задач Коши для уравнений Пуассона и Лапласа в приосевой области применительно к расчету полей в несимметричных электронно-оптических системах с криволинейной осью. М.: Наука, 1974. С. 38–45.
77. Данилов В. Н. Методы расчета электронно-оптических систем // Регуляризация параксиальных разложений потенциала электрического поля в прикатодной зоне электронных пушек. М.: Наука, 1977. С. 61–79.
78. Сыровой В. А. Структура особенности и задача формирования параксиальных квазиаксиально-симметричных релятивистских электронных пучков // РЭ. 2005. Т. 50, № 7. С. 875–885.
79. Неганова Л. А., Сыровой В. А., Цхай В. Н. Расчет и экспериментальное исследование электронной пушки технологического назначения // РЭ. 1990. Т. 35, № 10. С. 2146–2155.
80. Сыровой В. А. Параксиальное решение внешней задачи теории формирования двумерных и трехмерных электронных пучков // РЭ. 2012. Т. 57, № 12. С. 1323–1328.
81. Lotax R. J. Exact Electrode Systems for the Formation of a Curved Space-Charge Beam // J. Electr. Contr. 1957. V. 3, No. 4. P. 367–374.
82. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. Параксиальное приближение проблемы формирования непараксиального конического и тороидального электронных пучков с произвольным сечением // РЭ. 2012. Т. 57, № 8. С. 893–909.
83. Manuilov V. N., Zaslavsky V. Yu., Ginzburg N. S., Glyavin M. Yu., Kuftin A. N., Zotova I. V. Electron-Optical Systems for Planar Gyrotrons // Phys. Plasmas. 2014. V. 21, No. 2. P. 023106.
84. Кишко С. А., Кулешов А. Н., Глявин М. Ю., Зотова И. В., Железнов И. В., Гинзбур Н. С., Мануилов В. Н., Заславский В. Ю. Разработка 75-гигагерцового планарного гиротрона с поперечным выводом энергии // РЭ. 2014. Т. 59, № 7. С. 722–727.
85. Сапронова Т. М., Сыровой В. А. Формирование ленточного электронного пучка планарного гиротрона в торцевой области и вблизи кромки катода // РЭ. 2017. Т. 62, № 11. С. 1106–1115.

86. Сыровой В. А. Параксиальная модель электронно-оптической системы планарного гиротрона при эмиссии в  $T$ -режиме // РЭ. 2017. Т. 62, № 6. С. 584–591.
87. Сыровой В. А. Методы расчета электронно-оптических систем // Построение асимптотического ряда с уменьшающимся порядком особенности в задаче синтеза плотных квазицилиндрических пучков заряженных частиц. М.: Наука, 1977. С. 80–87.
88. Сыровой В. А. Регуляризованное решение задачи расчета формирующих электродов для трехмерных параксиальных электронных пучков // РЭ. 2012. Т. 57, № 2. С. 240–254.
89. Сыровой В. А. Формирование трехмерных клиновидных электронных пучков // Там же. № 11. С. 1221–1228.
90. Муратов М. З. Потенциалы эллипсоида. М.: Атомиздат, 1976. 144 с.
91. Акимов П. И., Гаврилин А. А., Никитин А. П., Сыровой В. А., Богословская А. Б. Транспортировка пучка с начальным эллиптическим сечением при сохранении его формы // Журн. радиоэлектроники. 2015. № 11.
92. Капчинский И. М. Теория линейных резонансных ускорителей. Динамика частиц. М.: Энергоатомиздат, 1982. 240 с.
93. Сыровой В. А. О потенциале эллиптического цилиндра с равномерным по сечению распределением пространственного заряда // Письма в ЭЧАЯ. 2018. Т. 15, № 3. С. 211–215.
94. Daikin P. N. Electrode Shapes for Cylindrical Electron Beam // Brit. J. Appl. Phys. 1955. V. 6, No. 7. P. 248–250.
95. Kirstein P. T. The Complex Formulation of the Equations of Two-Dimensional Space-Charge Flow // J. Electr. Contr. 1958. V. 4, No. 5. P. 425–433.
96. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1980. 438 с.
97. Лебедев В. А., Мешков И. Н., Шарана А. Н. Динамика интенсивного ленточного пучка электронов в сопровождающем магнитном поле // ЖТФ. 1979. Т. 49, № 4. С. 726–732.
98. Сыровой В. А. О транспортировке эллиптического пучка заряженных частиц // Письма в ЭЧАЯ. 2019. Т. 16, № 2. С. 121–123.
99. Свешников В. М. Расчет прикатодной области в электронно-оптических системах, формирующих интенсивные пучки заряженных частиц // Прикл. физика. 2004. № 1. С. 50–55.
100. Свешников В. М. Повышение точности расчета интенсивных пучков заряженных частиц // Там же. С. 55–65.
101. Свешников В. М. О расчете интенсивных пучков заряженных частиц методом итераций по подобластям // Прикл. физика. 2006. № 3. С. 49–57.
102. Greenfield D. Finite-Element Simulation of Thermo-Emission Electron Guns // Proc. SPIE. 2006. V. 6278. P. 627805-1–627805-8.
103. Козырев А. Н., Свешников В. М. Численные алгоритмы расчета объемного заряда, создаваемого интенсивными пучками заряженных частиц // Прикл. физика. 2018. № 1. С. 30–35.
104. Свешников В. М., Третьяков А. С. Численно-аналитические алгоритмы интегрирования уравнений движения заряженных частиц в электромагнитных полях // Прикл. физика. 2019. № 1. С. 5–10.
105. Неганова Л. А., Сыровой В. А. Параксиальная теория релятивистских электронных пучков при наличии неоднородного ионного фона // РЭ. 1992. Т. 37, № 12. С. 2275–2284.