Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 3(248). С. 384–389

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

УРОВНИ ЭНЕРГИИ ТРЕХЧАСТИЧНЫХ МЮОН-ЭЛЕКТРОННЫХ ИОНОВ

Ф. А. Мартыненко [а, 1], *В. И. Коробов* [а, б], *А. П. Мартыненко* [а], *Р. Н. Фаустов* [в], *А. В. Эскин* [а]

[а] Самарский университет, Самара, Россия

[б] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[в] Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва

Мюонный лэмбовский сдвиг $2P$–$2S$ в мюон-электронных атомах и ионах гелия, лития, бериллия и бора с электроном в основном состоянии вычислен по теории возмущений по постоянной тонкой структуры и отношению масс электрона и мюона. Учтены поправки первого и второго порядков теории возмущений на поляризацию вакуума, структуру ядра и отдачу.

The muonic $2P$–$2S$ Lamb shift in muon–electron atoms and ions of helium, lithium, beryllium, and boron with the electron in the ground state is calculated by the perturbation theory in the fine structure constant and the electron–muon mass ratio. The corrections of first and second orders of perturbation theory on the vacuum polarization, nuclear structure, and recoil are taken into account.

PACS: 31.30.Jv; 12.20.Ds; 32.10.Fn

ВВЕДЕНИЕ

Исследование уровней энергии трехчастичных кулоновских систем представляет собой одну из фундаментальных проблем атомной физики, которая имеет практическое применение при изучении реакций мюонного катализа. Спектр энергии трехчастичных систем мюон–электрон–ядро изучается в ряде экспериментов наряду с двухчастичными мюонными атомами [1–3]. Так, например, новые планы прецизионной микроволновой спектроскопии коллаборации J-PARC MUSE [4] связаны с измерением сверхтонкой структуры (СТС) основного состояния мюонного гелия с точностью, на два порядка превосходящей точность предыдущих экспериментов 1980-х гг. [5].

Обычно при расчете тонкой и сверхтонкой структуры спектра в системах мюон–электрон–ядро используют два метода. Один из них — вариационный метод, который позволяет находить волновые функции и значения энергий с очень высокой точностью [6, 7]. Другой аналитический метод расчета уровней энергии таких трехчастичных систем был сформулирован в работах [8] и применен для расчета сверхтонкой структуры спектра и электронного лэмбовского сдвига в [9, 10]. Он основан на использовании метода теории возмущений (ТВ) по двум малым параметрам: постоянной

[1] E-mail: f.a.martynenko@gmail.com

тонкой структуры α и отношению масс электрона и мюона. Этот подход имеет определенные преимущества, как и любой другой аналитический метод, но для достижения высокой точности расчета необходимо вычислять многочисленные поправки в старших порядках теории возмущений.

В эксперименте по измерению зарядового радиуса α-частицы [2] пучок мюонов пропускался через камеру с гелием при низком давлении 2 мбар. Условия эксперимента таковы, что образующийся газ ионов $(\mu_2^4\mathrm{He})^+$ не нейтрализуется. Вместе с тем отдельные атомы нейтрального мюонного гелия могут присутствовать и вносить погрешность в результаты измерения лэмбовского сдвига. Прецизионный расчет спектра энергии двухчастичных мюонных ионов выполнен в [11, 12]. В данной работе мы продолжаем исследования [9, 10] уровней энергии мюон-электронных атомов и ионов гелия, лития, бериллия и бора в части, относящейся к мюонному лэмбовскому сдвигу.

МЕТОД РАСЧЕТА ОСНОВНЫХ ВКЛАДОВ

Для расчета уровней энергии методом аналитической теории возмущений разобьем гамильтониан системы на несколько частей, выделив основной вклад кулоновского взаимодействия H_0 в виде

$$H = H_0 + \Delta H + \Delta H_{\mathrm{rec}} + \Delta H_{\mathrm{vp}} + \Delta H_{\mathrm{str}} + \Delta H_{\mathrm{vert}}, \tag{1}$$

$$H_0 = -\frac{1}{2M_\mu}\nabla_\mu^2 - \frac{1}{2M_e}\nabla_e^2 - \frac{Z\alpha}{x_\mu} - \frac{(Z-1)\alpha}{x_e}, \tag{2}$$

$$\Delta H = \frac{\alpha}{|\mathbf{x}_\mu - \mathbf{x}_e|} - \frac{\alpha}{x_e}, \quad \Delta H_{\mathrm{rec}} = -\frac{1}{M}\boldsymbol{\nabla}_\mu \cdot \boldsymbol{\nabla}_e, \tag{3}$$

где $\mathbf{x}_\mu$ и $\mathbf{x}_e$ — радиусы-векторы мюона и электрона относительно ядра; $Z\alpha$ — заряд ядра. Слагаемые ΔH_{vp}, ΔH_{str} и ΔH_{vert} обозначают вклады на поляризацию вакуума, структуру ядра и вершинные поправки. Приведенные массы в подсистемах электрон–ядро, мюон–ядро равны величинам

$$M_e = \frac{m_e M}{(m_e + M)}, \quad M_\mu = \frac{m_\mu M}{(m_\mu + M)}. \tag{4}$$

В исходном приближении, которое определяется гамильтонианом H_0, волновая функция системы имеет простой аналитический вид:

$$\Psi_{2S}(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_\mu) = \psi_{e\ 1S}(\mathbf{x}_e)\psi_{\mu\ 2S}(\mathbf{x}_\mu) = \\ = \frac{(W_e W_\mu)^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi}\left(1 - \frac{W_\mu x_\mu}{2}\right)\exp\left(-\frac{W_\mu x_\mu}{2}\right)\mathrm{e}^{-W_e x_e}, \tag{5}$$

$$\Psi_{2P}(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_\mu) = \psi_{e\ 1S}(\mathbf{x}_e)\psi_{\mu\ 2P}(\mathbf{x}_\mu) = \\ = \frac{(W_e W_\mu)^{3/2}}{2\sqrt{6}}(W_\mu x_\mu)\exp\left(-\frac{W_\mu x_\mu}{2}\right)\mathrm{e}^{-W_e x_e}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{n}), \tag{6}$$

$$W_\mu = Z\alpha M_\mu,\ W_e = (Z-1)\alpha M_e, \tag{7}$$

что делает возможным прецизионный расчет поправок по теории возмущений.

В исходном приближении энергия связанной системы определяется суммой кулоновских энергий электрона и мюона:

$$E_{2S,2P} = -\frac{1}{2}M_e(Z-1)^2\alpha^2 - \frac{1}{8}M_\mu Z^2\alpha^2. \tag{8}$$

В энергетическом интервале ($2P$–$2S$) эти вклады сокращаются. В первом порядке теории возмущений кулоновское взаимодействие ΔH дает сдвиги, которые определяются матричными элементами:

$$\begin{aligned} \Delta E^{(1)}(2S) &= \left\langle \Psi_{2S} \left| \left(\frac{\alpha}{x_{\mu e}} - \frac{\alpha}{x_e} \right) \right| \Psi_{2S} \right\rangle = W_e\alpha\left(-28a_1^2 + 220a_1^3 - 1152a_1^4 \ldots\right), \\ \Delta E^{(1)}(2P) &= \left\langle \Psi_{2P} \left| \left(\frac{\alpha}{x_{\mu e}} - \frac{\alpha}{x_e} \right) \right| \Psi_{2P} \right\rangle = W_e\alpha\left(-20a_1^2 + 140a_1^3 - 672a_1^4 \ldots\right), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Delta E^{(1)}(2S - 2P) = W_e\alpha\frac{8a_1^2}{(1+2a_1)^5}, \quad a_1 = \frac{W_e}{W_\mu}. \tag{10}$$

Результаты (4) представлены в виде разложения по параметру a_1.

Общее выражение поправки к уровням энергии во втором порядке теории возмущений по взаимодействию ΔH, когда мюон находится в промежуточном состоянии $n = 2S$, имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta E_{2S}^{(2)}(n = 2S) = \int \psi_{\mu 2S}(\mathbf{x}_\mu)\psi_{e1S}(\mathbf{x}_e)\left(\frac{\alpha}{x_{\mu e}} - \frac{\alpha}{x_e}\right)\psi_{\mu 2S}(\mathbf{x}_\mu)\left(\frac{\alpha}{x'_{\mu e}} - \frac{\alpha}{x'_e}\right) \times \\ \times \psi_{\mu 2S}(\mathbf{x}'_\mu)\psi_{e1S}(\mathbf{x}'_e)\tilde{G}_{e1S}(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}'_e)\psi_{\mu 2S}(\mathbf{x}'_\mu)\, d\mathbf{x}_\mu\, d\mathbf{x}'_\mu\, d\mathbf{x}_e\, d\mathbf{x}'_e, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\tilde{G}_{e1S}(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}'_e)$ — редуцированная кулоновская функция Грина электрона для состояния $1S$. В (11) входят два одинаковых интеграла, которые вычисляются аналитически:

$$\begin{aligned} V_\mu(\mathbf{x}_e) = \int d\mathbf{x}_\mu |\psi_{\mu 2S}(\mathbf{x}_\mu)|^2 \left(\frac{\alpha}{x_{\mu e}} - \frac{\alpha}{x_e}\right) = \\ = -\frac{\alpha\, \mathrm{e}^{-W_\mu x_e}}{8x_e}\left(8 + 6W_\mu x_e + 2(W_\mu x_e)^2 + (W_\mu x_e)^3\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Используя (12) и явный вид $\tilde{G}_{e1S}(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}'_e)$ [9, 11], получим после аналитического интегрирования и разложения по a_1:

$$\Delta E_{2S}^{(2)}(n = 2S) = -M_e\alpha^2 a_1^3\left[\frac{5993}{64} + a_1\left(-\frac{24111}{64} - 784\ln 4a_1\right) + \ldots\right]. \tag{13}$$

Аналогичный результат для мюона в $2P$-состоянии имеет вид

$$\Delta E_{2P}^{(2)}(n = 2P) = -M_e\alpha^2 a_1^3\left[\frac{31329}{576} + a_1\left(-\frac{26965}{192} - 400\ln 4a_1\right) + \ldots\right]. \tag{14}$$

Пусть теперь мюон находится в промежуточном состоянии, которое не совпадает с $2S$ (или $2P$). Во втором порядке теории возмущений такой вклад определяется выражением

$$\Delta E^{(2)}_{2S}(n\neq 2S)=\int \psi_{\mu 2S}(\mathbf{x}_\mu)\psi_{e1S}(\mathbf{x}_e)\left(\frac{\alpha}{x_{\mu e}}-\frac{\alpha}{x_e}\right)\psi_{\mu 2S}(\mathbf{x}'_\mu)\,d\mathbf{x}_e\,d\mathbf{x}'_e\,d\mathbf{x}_\mu\,d\mathbf{x}'_\mu\times$$
$$\times\sum_{n\neq 2S}\psi_{\mu n}(\mathbf{x}_\mu)\psi^*_{\mu n}(\mathbf{x}'_\mu)\sum_{n'}\frac{\psi_{en'}(\mathbf{x}_e)\psi^*_{en'}(\mathbf{x}'_e)}{E_{e1S}-E_{en'}+E_{\mu 2S}-E_{\mu n}}\left(\frac{\alpha}{x'_{\mu e}}-\frac{\alpha}{x'_e}\right)\psi_{e1S}(\mathbf{x}'_e). \quad (15)$$

В (15) входит кулоновская функция Грина электрона, которую мы заменим в лидирующем порядке по a_1 на свободную функцию Грина:

$$G_e(\mathbf{x}_e,\mathbf{x}'_e)=\sum_{n'}\frac{\psi_{en'}(\mathbf{x}_e)\psi^*_{en'}(\mathbf{x}'_e)}{E_{e1S}-E_{en'}+E_{\mu 2S}-E_{\mu n}}\approx-\frac{M_e\alpha^2}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-b_n|\mathbf{x}_e-\mathbf{x}'_e|}}{|\mathbf{x}_e-\mathbf{x}'_e|},$$
$$b_n=\sqrt{2M_e(E_{\mu n}-E_{\mu 2S}-E_{e1S})}. \quad (16)$$

Заметим, что это приближение можно улучшить, используя ряд теории возмущений для функции Грина электрона, как в [10]. Интегрирование по координатам в (15) можно выполнить с помощью условия полноты:

$$\sum_{n\neq 2S}\psi_{\mu n}(\mathbf{x}_\mu)\psi^*_{\mu n}(\mathbf{x}'_\mu)=\delta(\mathbf{x}_\mu-\mathbf{x}'_\mu)-\psi_{\mu 2S}(\mathbf{x}_\mu)\psi^*_{\mu 2S}(\mathbf{x}'_\mu). \quad (17)$$

При этом первоначально вычисляется следующий интеграл в (15):

$$I=\int d\mathbf{y}_1\frac{\mathrm{e}^{-b_n|\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_1|}}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_1||\mathbf{y}_2-\mathbf{y}_1|}\psi_{e1S}(\mathbf{y}_1)\approx\psi_{e1S}(0)\frac{4\pi}{b_n^2}\frac{(1-\mathrm{e}^{-b_n|\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_2|})}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_2|}\approx$$
$$\approx\psi_{e1S}(0)4\pi\left[\frac{1}{b_n}-\frac{|\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_2|}{2}+\frac{b_n|\mathbf{x}_1-\mathbf{y}_2|^2}{6}+\ldots\right], \quad (18)$$

где также использовано разложение по параметру отдачи a_1. Вклад первого слагаемого в квадратных скобках равен 0 из-за ортогональности волновых функций мюона, а второе слагаемое дает вклад лидирующего порядка по a_1, который после вычисления координатных интегралов имеет вид

$$\Delta E^{(2)}_{2S}(n\neq 2S)=M_e\alpha^2a_1^2\left(-56+\frac{20073}{64}a_1+\frac{137165}{128}a_1^2\ldots\right). \quad (19)$$

Если мюон находится в состоянии $2P$, то аналогичный вклад равен

$$\Delta E^{(2)}_{2P}(n\neq 2P)=M_e\alpha^2a_1^2\left(-40+\frac{12441}{64}a_1+\frac{76997}{128}a_1^2\ldots\right). \quad (20)$$

Суммарный вклад первого и второго порядков ТВ по ΔH:

$$\Delta E(2P-2S) = W_e \alpha a_1^2 \Bigg(8 - 80a_1 + 480a_1^2 + \frac{16}{Z-1} - \\ - \frac{80}{Z-1}a_1 - \frac{11221}{48(Z-1)}a_1^2 - \frac{384}{Z-1}a_1^2 \ln 4a_1 \Bigg). \quad (21)$$

Наряду с кулоновской поправкой (21) необходимо учесть и другие поправки на поляризацию вакуума, структуру ядра и отдачу для получения полного значения мюонного лэмбовского сдвига. Поправки такого типа были вычислены в [11, 12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Измерение лэмбовского сдвига в двухчастичных мюонных атомах и ионах, выполненное коллаборацией CREMA [1], позволило получить на порядок более точные значения зарядовых радиусов протона, дейтрона и α-частицы. Сделать это удалось после прецизионных расчетов лэмбовского сдвига, которые включали эффекты поляризации вакуума, структуры ядра, релятивистские поправки и эффекты смешанного типа высокого порядка по α и отношению масс частиц [11, 12]. В данной работе исследуется влияние эффектов связанности частиц на величину мюонного лэмбовского сдвига в трехчастичных системах мюон–электрон–ядро. Присутствие электрона приводит к дополнительному кулоновскому взаимодействию с мюоном и ядром и изменяет величину лэмбовского сдвига по сравнению с двухчастичными системами. Численные значения поправки (21) для различных мюон-электронных систем следующие:

$$\Delta E(\mu_2^3\mathrm{He}) = 4{,}04 \text{ МэВ}, \quad \Delta E(\mu_2^4\mathrm{He}) = 3{,}97 \text{ МэВ}, \\ \Delta E(\mu_3^7\mathrm{Li}) = 9{,}12 \text{ МэВ}, \ \Delta E(\mu_4^9\mathrm{Be}) = 14{,}27 \text{ МэВ}, \ \Delta E(\mu_5^{11}\mathrm{B}) = 19{,}33 \text{ МэВ}. \quad (22)$$

Учитывая (22) и результаты работ [11, 12], получим значения мюонного ($2P$–$2S$) лэмбовского сдвига (Ls) (приведены значения для ядер Li, Be, B с одинаковым спином 3/2):

$$E^{\mathrm{Ls}}({}_2^3\mathrm{He}) = 1263{,}90 \text{ МэВ}, \ E^{\mathrm{Ls}}({}_2^4\mathrm{He}) = 1383{,}08 \text{ МэВ}, \\ E^{\mathrm{Ls}}(\mathrm{Li}) = 1540{,}90 \text{ МэВ}, \ E^{\mathrm{Ls}}(\mathrm{Be}) = -1228{,}55 \text{ МэВ}, \ E^{\mathrm{Ls}}(\mathrm{B}) = -7981{,}00 \text{ МэВ}. \quad (23)$$

Кулоновское взаимодействие частиц в трехчастичных системах приводит к небольшому, но существенному изменению величины мюонного лэмбовского сдвига по сравнению с двухчастичными мюонными системами. Учет поправки (22) необходим для извлечения величины зарядового радиуса гелиона и α-частицы с точностью, превышающей 0,01 фм.

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики «Базис» (грант № 22-1-1-23-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Antognini A., Kottmann F., Pohl R.* Laser Spectroscopy of Light Muonic Atoms and the Nuclear Charge Radii // SciPost Phys. Proc. 2021. V. 5. P. 021–032.
2. *Krauth J. J., Schuhmann K., Ahmed M. A. et al.* Measuring the α-Particle Charge Radius with Muonic Helium-4 Ions // Nature. 2021. V. 589. P. 527–531.
3. *Schmidt S., Willig M., Haack J. et al.* The Next Generation of Laser Spectroscopy Experiments Using Light Muonic Atoms // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 1138, No. 1. P. 012010.
4. *Fukumura S., Strasser P. Takashi I. et al. (J-PARC Collab.)*. Proposal for New Measurements of Muonic Helium Hyperfine Structure at J-PARC // Eur. Phys. J. Web Conf. 2022. V. 262. P. 01012.
5. *Gardner C. J., Badertscher A., Beer W., Bolton P. R., Egan P. O., Gladisch M., Greene M., Hughes V. W., Lu D. C., Mariam F. G., Souder P. A., Orth H., Vetter J., Putlitz G.* Precise Measurement of the Hyperfine-Structure Interval and Zeeman Effect in the Muonic Helium Atom // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1168.
6. *Eskin A. V., Korobov V. I., Martynenko A. P., Sorokin V. V.* Energy Levels of Three Particle Muonic Ions (μe Li), (μe Be), (μe B) // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 1690. P. 012092.
7. *Aznabayev D. T., Bekbaev A. K., Korobov V. I.* The Hyperfine Structure of the Ground State in the Muonic Helium Atoms // Phys. Part. Nucl. Lett. 2018. V. 15. P. 236–239.
8. *Lakdawala S. D., Mohr P.* Hyperfine Structure in Muonic Helium // Phys. Rev. A. 1980. V. 22, No. 4. P. 1572.
9. *Dorokhov A. E., Korobov V. I., Martynenko A. P., Martynenko F. A.* Low-Lying Electron Energy Levels in Three-Particle Electron–Muon Ions of Li, Be, and B // Phys. Rev. A. 2021. V. 103, No. 5. P. 052806.
10. *Faustov R. N., Korobov V. I., Martynenko A. P., Martynenko F. A.* Ground-State Hyperfine Structure of Light Muon–Electron Ions // Phys. Rev. A. 2022. V. 105, No. 4. P. 042816.
11. *Krutov A. A., Martynenko A. P., Martynenko F. A., Sukhorukova O. S.* Lamb Shift in Muonic Ions of Lithium, Beryllium, and Boron // Phys. Rev. A. 2016. V. 94, No. 12. P. 062505.
12. *Krutov A. A., Martynenko A. P., Martynenko G. A., Faustov R. N.* Theory of the Lamb Shift in Muonic Helium Ions // JETP. 2015. V. 120, No. 1. P. 73–90.

Получено 27 октября 2022 г.