Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 3(248). С. 513–520

ГРАВИТАЦИЯ КАК ТЕОРИЯ ВЛОЖЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИИ В ГАЛАКТИКАХ

С. А. Пастон [1], *А. Д. Капустин* [2]

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

В основе описания гравитации в форме теории вложения лежит гипотеза о том, что пространство-время представляет собой четырехмерную поверхность в плоском десятимерном пространстве. Стандартный выбор действия в этом случае приводит к более общим, чем уравнения Эйнштейна, уравнениям движения теории. Записывая их в виде уравнений Эйнштейна с вкладом дополнительной фиктивной материи, можно пытаться интерпретировать такую материю как темную материю. С целью изучения поведения фиктивной материи в центрах галактик обсуждается аналитический способ получения соответствующего профиля распределения материи. Этот способ основан на рассмотрении функции распределения частиц по возможным траекториям движения и позволяет оценить, распределение какого типа (core или cusp) возникает.

The description of gravity in the form of an embedding theory is based on the hypothesis that our space-time is a four-dimensional surface in a flat ten-dimensional space. The choice of standard Einstein–Hilbert action leads in this case to more general field equations than Einstein's equations. By writing them in the form of Einstein's equations with the contribution of additional fictitious matter, one can try to interpret such matter as dark matter. In order to study the behavior of this fictitious matter near the centers of real galaxies, we discuss an analytical method of obtaining corresponding matter density profiles. This method is based on the consideration of the distribution function of particles over all possible trajectories and allows us to estimate the type (core or cusp) of the arising density profile.

PACS: 04.50.Kd; 04.50.−h

ВВЕДЕНИЕ

При обычном описании гравитации в рамках ОТО четырехмерное пространство-время представляет собой псевдориманово пространство. В качестве примера риманова или псевдориманова пространства можно рассматривать d-мерную поверхность в плоском пространстве большего числа измерений, считая, что метрика этой поверхности является индуцированной, т. е. расстояния между близкими точками поверхности

[1] E-mail: pastonsergey@gmail.com
[2] E-mail: sashakapusta96@gmail.com

определяются как расстояние между этими точками в объемлющем пространстве. В частности, легко представимым примером риманова пространства является двумерная поверхность в трехмерном пространстве.

Оказывается, что поверхность в плоском объемлющем пространстве является не только частным случаем риманова пространства, но и, в определенной степени, рассмотрение произвольного риманова пространства может быть заменено рассмотрением такой поверхности. Такое заключение позволяет сделать теорема Жане–Картана–Фридмана [1], гласящая, в частности, что произвольное псевдориманово пространство размерности d может быть локально изометрически вложено в плоское псевдоевклидово объемлющее пространство с подходящей сигнатурой и размерностью $d(d+1)/2$. Это означает, что для четырехмерного пространства-времени в качестве объемлющего достаточно брать десятимерное пространство. При этом достаточно предположить существование в нем единственного времениподобного направления, т. е. считать объемлющим псевдоевклидово пространство $R^{1,9}$.

Поскольку рассмотрение пространства-времени как псевдориманова пространства может быть, с некоторыми оговорками, заменено рассмотрением четырехмерной поверхности в десятимерном пространстве $R^{1,9}$, возникает идея: при описании гравитации в качестве независимых переменных использовать не поле метрики $g_{\mu\nu}(x)$, а переменные, описывающие поверхность. В качестве таких переменных наиболее удобно выбрать функцию вложения $y^a(x^\mu)$ (где $a, b, \ldots = 0, \ldots, 9$), осуществляющую отображение

$$y : R^4 \longrightarrow R^{1,9}. \tag{1}$$

В результате гравитация описывается как динамика трехмерного пространства, рассматриваемая аналогично динамике точечной частицы, которой соответствует мировая линия, и динамике струны, которой соответствует двумерная поверхность в пространстве Минковского. Данная аналогия является одной из главных мотиваций обсуждаемого описания гравитации (часто называемого теорией вложения), впервые предложенного в работе [2]. В разд. 1 мы кратко опишем эту теорию гравитации и покажем, что ее уравнения движения могут быть записаны [3] в виде совокупности уравнений Эйнштейна с вкладом дополнительной фиктивной материи, а также уравнений, как-то ограничивающих свойства этой материи.

Такая возможность позволяет пытаться интерпретировать возникающую в рамках теории вложения фиктивную материю как *темную материю*, гипотеза о существовании которой объясняет наблюдения в соответствии с моделью ΛCDM (см., например, [4]). В ее рамках темная материя может рассматриваться как нерелятивистская пылевидная материя, которая порождает такое же гравитационное поле, как и обычная материя, а негравитационное взаимодействие темной материи с обычной либо отсутствует, либо оказывается необнаружимо слабым. Поскольку многочисленные предпринимаемые попытки прямого детектирования темной материи пока что не дают результатов [5, 6], есть все основания считать темную материю чисто гравитационным эффектом, связанным с некоторой модификацией теории гравитации.

Кроме теории вложения для этой цели могут использоваться и другие варианты модификаций, содержащие неэйнштейновские решения. В особенности хорошо для этого подходят модификации, возникающие, как и теория вложения, в результате содержащей дифференцирование замены независимой переменной в действии ОТО (см. подробности в [7]). Среди таких теорий наиболее широко известна миметическая гравитация [8, 9] (см. также обзор [10]). Для того чтобы достаточно успешно объяснять связанные с темной материей эффекты на разных масштабах, необходимо, чтобы возникающая в рамках конкретной модификации гравитации фиктивная материя обладала достаточно большим количеством степеней свободы. Для миметической гравитации это количество оказывается недостаточным, поэтому для успешного объяснения наблюдений теорию приходится усложнять, вводя в действие дополнительные слагаемые [10]. Для теории вложения количество степеней свободы фиктивной материи достаточно велико, что позволяет обсуждать эффекты как в космологических масштабах [11, 12], так и в масштабах галактик. Однако сравнение с наблюдениями в последнем случае требует проведения дополнительных исследований поведения фиктивной материи в нерелятивистском пределе, в котором она ведет себя как пылевидная материя с некоторым самодействием [13].

Один из вопросов, который необходимо изучить, — какой профиль образует распределение темной материи в галактиках, если темная материя представляет собой фиктивную материю теории вложения. Этот вопрос особенно интересен в связи с существованием известной *core-cusp* проблемы. Данная проблема заключается в несоответствии наблюдаемых данных о распределении темной материи вблизи центров галактик, в которых плотность материи обладает достаточной гладкостью и образует *core*, с результатами численных симуляций процесса формирования космических структур, в которых изначальное распределение материи приходит в процессе эволюции к сингулярному распределению материи, называемому *cusp*. Классическим результатом работ по численной симуляции можно назвать универсальный профиль плотности [14], часто называемый NFW-распределением, в котором плотность числа частиц в окрестности центра галактики сингулярна и ведет себя как r^α с $\alpha = -1$. Этот профиль стабильно воспроизводится в симуляциях, соответствующих формированию структур из невзаимодействующей темной материи (см., например, [15]). Решение *core-cusp* проблемы можно искать, вводя некоторое самодействие темной материи (см., например, работу [16]), поскольку самодействие может препятствовать излишнему сгущению темной материи в центре галактик. Поэтому описание темной материи как фиктивной материи теории вложения, обладающей в нерелятивистском пределе некоторым взаимодействием, кажется достаточно перспективным.

Необходимо научиться оценивать, как появление самодействия влияет на формирующийся профиль распределения материи в галактике. Чтобы при получении ответа на этот вопрос избежать проведения объемных численных симуляций, возникает задача достичь на аналитическом уровне понимания того, когда какое распределение — *core* или *cusp* — возникает. Прежде всего на этот вопрос необходимо ответить в случае отсутствия самодействия, а дальше, при изучении свойств фиктивной материи с конкретным видом самодействия, можно добавлять рассмотрение этого самодействия как некоторую модификацию задачи. В разд. 2 мы опишем предложенный в [17] простой аналитический способ определения асимптотики в нуле для радиальной зависимости плотности пылевидной материи в галактике путем рассмотрения функции распределения частиц по возможным траекториям движения. В основном обсуждение ограничивается в среднем статическим и сферически-симметричным распределением, однако при этом движение каждой конкретной частицы сферическую симметрию нарушает.

1. ГРАВИТАЦИЯ КАК ТЕОРИЯ ВЛОЖЕНИЯ

При описании гравитации в форме теории вложения независимой переменной, описывающей гравитационное поле, является функция вложения (1), а метрика выражается через нее формулой индуцированной метрики

$$g_{\mu\nu} = (\partial_\mu y^a)(\partial_\nu y^b)\eta_{ab}, \tag{2}$$

где η_{ab} — плоская метрика объемлющего пространства $R^{1,9}$. В качестве действия теории берется стандартное для ОТО действие Эйнштейна–Гильберта

$$S = -\frac{1}{2\varkappa}\int d^4x\,\sqrt{-g}\,R, \tag{3}$$

в которое подставляется метрика (2). В результате варьирования такого действия по $y^a(x)$ возникают уравнения Редже–Тейтельбойма [2]

$$D_\mu\left((G^{\mu\nu} - \varkappa T^{\mu\nu})\partial_\nu y^a\right) = 0. \tag{4}$$

Эти уравнения являются более общими, чем уравнения Эйнштейна $G^{\mu\nu} = \varkappa T^{\mu\nu}$, т. е. любое решение уравнений Эйнштейна будет решением уравнений теории вложения, но не наоборот. Таким образом, теория вложения, попадающая в класс теорий, получаемых из ОТО дифференциальной заменой переменной [7], содержит неэйнштейновские решения. После статьи [2] идеи теории вложения критически обсуждались в работе [18], а впоследствии они достаточно много использовались для описания гравитации, в том числе и в связи с ее квантованием (см., например, работы [19–25]). Подробный список литературы, связанной с теорией вложения и смежными с ней вопросами, может быть найден в обзоре [26].

Уравнения движения (4) теории вложения можно переписать [3] в виде совокупности уравнений:

$$G^{\mu\nu} = \varkappa(T^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}), \quad D_\mu\left(\tau^{\mu\nu}\partial_\nu y^a\right) = 0. \tag{5}$$

Первое из них представляет собой уравнение Эйнштейна, содержащее дополнительный вклад тензора энергии-импульса $\tau^{\mu\nu}$ некоторой фиктивной материи. Второе же можно воспринимать как уравнение, ограничивающее возможное поведение величины $\tau^{\mu\nu}$, а значит, как уравнение движения этой фиктивной материи. При записи уравнений движения теории вложения в форме (5) анализ свойств фиктивной материи упрощается [13].

2. АНАЛИЗ ПРОФИЛЯ ПЛОТНОСТИ МАТЕРИИ

При моделировании распределения материи в галактике в первом приближении можно пренебречь отклонениями от сферической симметрии. Рассмотрим в среднем сферически-симметричное и не зависящее от времени распределение пылевидной материи, состоящей из массивных частиц, взаимодействующих только гравитационно и движущихся по ограниченным траекториям. Считаем, что частицы двигаются с нерелятивистскими скоростями и плотность материи $\rho(x)$ достаточно мала. Тогда она связана со статическим сферически-симметричным гравитационным потенциалом $\varphi(x)$ уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi(x) = 4\pi G\rho(x), \tag{6}$$

где G — гравитационная постоянная Ньютона.

При движении в сферически-симметричном потенциале для каждой частицы сохраняются ее полная энергия E и момент импульса L_k $(i, k, \ldots = 1, 2, 3)$. При этом движение каждой частицы происходит по плоской орбите, плоскость которой проходит через центр симметрии. При рассмотрении только финитного движения изменение радиальной координаты будет периодичным, но орбита может быть как замкнутой, так и нет. Каждую орбиту можно однозначно задать с помощью удельной (на единицу массы m) энергии $\varepsilon = E/m$, удельного момента импульса $\ell_k = L_k/m$, а также направления τ_k, определяющего положение орбиты в плоскости, перпендикулярной вектору момента импульса L_k. Для полного описания движения частицы нужно ввести еще скалярный параметр γ, задающий в начальный момент времени фазу частицы при периодическом движении по орбите. В итоге движение конкретной частицы описывается функцией $\hat{x}_m(t, \varepsilon, \ell_k, \tau_l, \gamma)$, где t — время.

Введя функцию распределения частиц f, можно с ее помощью записать выражение для плотности в виде

$$\rho(x_m) = m \int d\varepsilon\, d^3\ell\, d\tau\, d\gamma\, f(\varepsilon, \ell_k, \tau_l, \gamma)\, \delta\left(x_m - \hat{x}_m(t, \varepsilon, \ell_k, \tau_l, \gamma)\right). \tag{7}$$

Учитывая предполагаемые сферическую симметрию и независимость от времени плотности материи ρ, ее удается записать в виде (см. подробности в [17])

$$\rho(r) = \frac{m}{2\pi r^2} \int d\varepsilon \int\limits_0^\infty d\ell\, \frac{\hat{f}(\varepsilon, \ell)\, \theta\left(2\varepsilon - 2\varphi(r) - \dfrac{\ell^2}{r^2}\right)}{\hat{T}\left(\varepsilon, \ell\right) \sqrt{2\varepsilon - 2\varphi(r) - \dfrac{\ell^2}{r^2}}}, \tag{8}$$

где $\hat{T}(\varepsilon, \ell)$ — период радиального движения частицы по орбите; $r = \sqrt{x_k x_k}$; $\ell = \sqrt{\ell_k \ell_k}$; $\theta(x)$ — тэта-функция Хевисайда и введено обозначение

$$\hat{f}(\varepsilon, \ell) = \int\limits_{S_\ell} d^2\ell \int d\tau\, d\gamma\, f(\varepsilon, \ell_k, \tau_l, \gamma), \tag{9}$$

а через S_ℓ обозначена сфера радиуса ℓ. Величина $\hat{f}(\varepsilon, \ell)$ имеет смысл функции распределения частиц по удельным энергии и модулю момента импульса.

Рассмотрим поведение плотности (8) в асимптотике $r \to 0$. В силу того, что гравитационный потенциал связан с неотрицательной плотностью материи уравнением (6), величина $-\varphi(r)$ не может при $r \to 0$ расти быстрее или так же, как $1/r^2$. Поэтому при малых r слагаемое ℓ^2/r^2 оказывается доминирующим в аргументе θ-функции, а значит, вклад в интеграл по ℓ дает только область малых значений

$$\ell \leqslant r\sqrt{2\varepsilon - 2\varphi(r)}. \tag{10}$$

В результате асимптотика $\rho(r)$ при $r \to 0$ определяется асимптотикой при $\ell \to 0$ входящих в (8) функций $\hat{f}(\varepsilon, \ell)$ и $\hat{T}(\varepsilon, \ell)$. Период радиального движения частицы по орбите $\hat{T}(\varepsilon, \ell)$ имеет при $\ell \to 0$ конечный предел $\hat{T}(\varepsilon, 0)$ за исключением, может быть, дающих малый вклад очень маленьких значений удельной энергии ε, что соответствует частицам, почти покоящимся в центре. Про функцию же распределения $\hat{f}(\varepsilon, \ell)$ заранее что-то определенное сказать нельзя, поэтому рассмотрим разные возможные варианты ее асимптотики.

Сначала предположим, что $\hat{f}(\varepsilon, \ell)$ имеет при $\ell \to 0$ конечный предел, для которого хотя бы в какой-то области изменения ε будет $\hat{f}(\varepsilon, 0) \neq 0$. В этом случае можно при интегрировании в (8) по ℓ сделать замену переменных $\ell = r\tilde{\ell}$, что приведет к асимптотике

$$\rho(r) = \frac{m}{2\pi r} \int d\varepsilon \, d\tilde{\ell} \, \frac{\hat{f}(\varepsilon, 0) \, \theta(2\varepsilon - 2\varphi(r) - \tilde{\ell}^2)}{\hat{T}(\varepsilon, 0)\sqrt{2\varepsilon - 2\varphi(r) - \tilde{\ell}^2}} = \frac{m}{4r} \int d\varepsilon \, \frac{\hat{f}(\varepsilon, 0)}{\hat{T}(\varepsilon, 0)}. \tag{11}$$

Как видно, плотность числа частиц при $r \to 0$ в этом случае оказывается сингулярной, причем она ведет себя как $1/r$ (отметим, что $\hat{f}(\varepsilon, 0) > 0$, так что интеграл в (11) не обращается в ноль). Это в точности соответствует возникающему в численных расчетах профилю типа *cusp* с $\alpha = -1$. Отметим, что гравитационный потенциал в этом случае остается конечным при $r = 0$, но имеет в этой точке излом, т. е. $\varphi'(0) \neq 0$.

Теперь предположим, что функция распределения $\hat{f}(\varepsilon, \ell)$ при $\ell \to 0$ может быть разложена в ряд по ℓ, но ее нулевой член разложения оказывается равен нулю при всех ε, т. е. при $\ell \to 0$

$$\hat{f}(\varepsilon, \ell) \approx \hat{f}'(\varepsilon, 0)\ell, \tag{12}$$

где штрих означает производную по ℓ. В этом случае, рассуждая аналогично, вместо (11) получаем

$$\rho(r) = \frac{m}{2\pi} \int d\varepsilon \, d\tilde{\ell} \, \frac{\hat{f}'(\varepsilon, 0)\tilde{\ell} \, \theta\left(2\varepsilon - 2\varphi(r) - \tilde{\ell}^2\right)}{\hat{T}\,(\varepsilon, 0)\,\sqrt{2\varepsilon - 2\varphi(r) - \tilde{\ell}^2}} = \frac{m}{2\pi} \int d\varepsilon \, \frac{\hat{f}'(\varepsilon, 0)}{\hat{T}\,(\varepsilon, 0)} \sqrt{2\varepsilon - 2\varphi(r)}. \tag{13}$$

Предполагая ограниченность значения $\varphi(0)$ гравитационного потенциала в нуле (что имеет место даже в рассмотренном выше *cusp*-случае), заключаем, что при рассмотрении асимптотики $r \to 0$ в последнем выражении в (13) можно заменить $\varphi(r)$ на $\varphi(0)$. Это означает, что в данном случае зависимость плотности от радиуса соответствует профилю типа *core*.

Таким образом, достаточно простое аналитическое рассуждение позволяет заключить, что образуемый материей в центре галактики профиль плотности материи определяется наличием или отсутствием нулевого члена разложения по ℓ функции $\hat{f}(\varepsilon, \ell)$ при $\ell = 0$. При этом, с учетом положительности $\hat{f}(\varepsilon, \ell)$, достаточно анализировать наличие или отсутствие нулевого члена разложения при $\ell = 0$ для функции распределения

$$\hat{f}(\ell) = \int d\varepsilon \hat{f}(\varepsilon, \ell) \tag{14}$$

частиц только по модулю удельного момента импульса. Можно показать, что в начальный момент времени, когда распределение частиц по координатам и скоростям имеет некоторый случайный вид, эта функция распределения при $\ell \to 0$ имеет поведение

$$\hat{f}(\ell) \approx C\ell, \tag{15}$$

см. подробности в [17].

Если рассмотреть ситуацию, когда облако частиц формирует стационарную в среднем конфигурацию в заранее заданном сферически-симметричном гравитационном потенциале $\varphi(x_i)$, то для каждой частицы при ее движении сохраняется момент импульса. Тогда определяемая (14) функция распределения $\hat{f}(\ell)$ не меняется со временем и ее поведение (15) будет иметь место уже и для сформированной стационарной конфигурации частиц. Поскольку такая асимптотика соответствует (12), можно заключить, что в рассматриваемом случае возникает профиль плотности материи типа *core*. Такая ситуация, когда в процессе формирования профиля плотности рассматриваемой материи гравитационный потенциал все время остается достаточно сферически-симметричным, может реализоваться, когда гравитационный потенциал в основном создается темной материей. При этом темная материя может подчиняться своим законам (например, обладая некоторым специфическим самодействием), определяющим, образует она *cusp* или *core*, а мы изучаем формирование профиля плотности обычной материи и получаем для него распределение типа *core*.

Альтернативной ситуацией является случай, когда облако частиц формирует стационарную в среднем конфигурацию при отсутствии заданного сферически-симметричного гравитационного потенциала. Тогда гравитационный потенциал формируется одновременно с возникновением стационарной конфигурации, и в процессе такого формирования могут возникать заметные отклонения от сферической симметрии. Данная ситуация может реализоваться, если мы изучаем формирование профиля для частиц темной материи, предполагая, что она представляет собой обычную пылевидную материю без какого-либо самодействия. Такая постановка задачи близка к используемой при проведении упоминавшихся выше численных симуляций.

В этом случае траектории частиц уже не будут точно соответствовать описанным выше траекториям, характеризуемым параметрами $\varepsilon, \ell_k, \tau_l, \gamma$. Однако, если сферическая симметрия нарушена не слишком сильно, отклонения от таких траекторий будут не очень большими и частицы можно по-прежнему описывать параметрами $\varepsilon, \ell_k, \tau_l, \gamma$, но уже считая, что не все они сохраняются со временем. В частности, для каждой частицы момент импульса, определенный относительно центра возникающей стационарной конфигурации, уже не сохраняется, поскольку он может изменяться под действием сил, действующих со стороны центров малых сгущений частиц, которые в конечном итоге могут образовывать сателлиты. В результате, в отличие от описанного выше случая, функция распределения $f(\varepsilon, \ell_k, \tau_l, \gamma)$, а значит и $\hat{f}(\ell)$, уже может меняться со временем. Как следствие, со временем может измениться и ее асимптотика при $\ell = 0$, которая определяет, будет возникать *core* или *cusp*. В результате «притекания» частиц в пространстве модуля удельного момента импульса к точке $\ell = 0$ с течением времени функция распределения $\hat{f}(\ell)$ может изменить асимптотику (15) на

$$\hat{f}(\ell) \approx \hat{f}(0) + C\ell \tag{16}$$

с $\hat{f}(0) > 0$. Поскольку, как говорилось выше, это соответствует профилю материи типа *cusp*, мы получаем, что такой профиль может возникать в процессе формирования стационарной конфигурации частиц при наличии отклонений от сферической симметрии.

Работа поддержана РФФИ, грант № 20-01-00081.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Friedman A.* // J. Math. Mech. 1961. V. 10. P. 625.
2. *Regge T., Teitelboim C.* General Relativity à La String: A Progress Report // Proc. of the First Marcel Grossmann Meeting, Trieste, Italy, 1975. Amsterdam: North Holland, 1977. P. 77–88; arXiv:1612.05256.
3. *Pavsic M.* // Class. Quant. Grav. 1985. V. 2. P. 869; arXiv:1403.6316.
4. *Горбунов Д. С., Рубаков В. А.* Введение в теорию ранней Вселенной: Теория горячего Большого взрыва. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
5. *Undagoitia T. M., Rauch L.* // J. Phys. G. 2015. V. 43, No. 1. P. 013001; arXiv:1509.08767.
6. *Gaskins J. M.* // Contemp. Phys. 2016. V. 57, No. 4. P. 496–525; arXiv:1604.00014.
7. *Sheykin A. A., Solovyev D. P., Sukhanov V. V., Paston S. A.* // Symmetry. 2020. V. 12, No. 2. P. 240; arXiv:2002.01745.
8. *Chamseddine A. H., Mukhanov V.* // JHEP. 2013. V. 11. P. 135; arXiv:1308.5410.
9. *Golovnev A.* // Phys. Lett. B. 2014. V. 728. P. 39–40; arXiv:1310.2790.
10. *Sebastiani L., Vagnozzi S., Myrzakulov R.* // Adv. High Energy Phys. 2017. V. 2017. P. 3156915; arXiv:1612.08661.
11. *Davidson A., Karasik D., Lederer Y.* Cold Dark Matter from Dark Energy. arXiv:gr-qc/0111107.
12. *Paston S. A., Sheykin A. A.* // Intern. J. Mod. Phys. D. 2012. V. 21, No. 5. P. 1250043; arXiv:1106.5212.
13. *Paston S. A.* // Universe. 2020. V. 6, No. 10. P. 163; arXiv:2009.06950.
14. *Navarro J. F., Frenk C. S., White S. D. M.* // Astrophys. J. 1996. V. 462. P. 563; arXiv:astro-ph/9508025.
15. *Boldrini P.* // Galaxies. 2022. V. 10, No. 1. P. 5; arXiv:2201.01056.
16. *Tulin S., Yu H.-B.* // Phys. Rep. 2018. V. 730. P. 1–57; arXiv:1705.02358.
17. *Kapustin A. D., Paston S. A.* Analytical Analysis of the Origin of Core-Cusp Matter Density Distributions in Galaxies. arXiv:2207.04288.
18. *Deser S., Pirani F. A. E., Robinson D. C.* // Phys. Rev. D. 1976. V. 14, No. 12. P. 3301–3303.
19. *Tapia V.* // Class. Quant. Grav. 1989. V. 6. P. L49.
20. *Maia M. D.* // Ibid. P. 173–183.
21. *Franke V. A., Tapia V.* // Nuovo Cim. B. 1992. V. 107, No. 6. P. 611.
22. *Karasik D., Davidson A.* // Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 064012; arXiv:gr-qc/0207061.
23. *Пастон С. А.* // ТМФ. 2011. Т. 169, № 2. С. 285–296; arXiv:1111.1104.
24. *Фаддеев Л. Д.* // Там же. Т. 166, № 3. С. 323–335; arXiv:0906.4639; arXiv:0911.0282; arXiv:1003.2311.
25. *Sheykin A. A., Paston S. A.* // AIP Conf. Proc. 2014. V. 1606. P. 400; arXiv:1402.1121.
26. *Pavsic M., Tapia V.* Resource Letter on Geometrical Results for Embeddings and Branes. arXiv:gr-qc/0010045.

Получено 27 октября 2022 г.