

## КРИТЕРИИ ПОДАВЛЕНИЯ ФОНА ВО ФРАКТАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ МОНТЕ-КАРЛО Au–Au-СОБЫТИЙ ПРИ ЭНЕРГИИ $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ

*Т. Г. Дедович<sup>а,б</sup>, М. В. Токарев<sup>а,б,1</sup>*

<sup>а</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>б</sup> Государственный университет «Дубна», Дубна

В работе Монте-Карло Au–Au-события при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ, полученные с помощью генератора АМРТ, МС-фракталы и события со случайно распределенными частицами анализируются SePaC-методом. Изучена зависимость доли Prtn исследуемых событий, определяемых как фракталы, от параметра метода  $P_{\max}$ . Установлено, что гипотезы независимого и зависимого формирования фракталов соответствуют различным областям поведения Prtn( $P_{\max}$ ) для АМРТ Au–Au-событий. SePaC-метод позволяет выделить АМРТ Au–Au-события, обладающие равными фрактальными размерностями  $D_F$  на разных уровнях. Распределение событий по  $D_F$  различается для различных гипотез. События, выделенные гипотезой независимого деления, имеют группу лидирующих частиц по  $p_t$ , а оставшиеся обнаруживают экспоненциальное поведение  $p_t$ -спектра. Использование критериев подавления фона, описывающих статистические характеристики структур на разных уровнях, показало, что значительная часть событий, выделенных гипотезой независимого деления, имеют одинаковые структуры и могут быть интерпретированы как фракталы. События, выделенные гипотезой зависимого деления, подавлены.

Monte Carlo AuAu events at energy  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  GeV obtained with the AMPT generator are analyzed. Special sets of MC fractals and events with randomly distributed particles are studied using the SePaC method. The dependence of the portion Prtn of the events, reconstructed as fractals, on the method parameter  $P_{\max}$  is studied. It is established that the hypotheses of independent and dependent formation of fractals correspond to different regions of Prtn( $P_{\max}$ ) behavior for AMPT AuAu events. The SePaC method allows one to identify AMPT AuAu events that have equal fractal dimensions  $D_F$  at different levels. It is found that the distribution of events over  $D_F$  differs for different hypotheses. The events identified by the hypothesis of independent partition have a group of leading particles in  $p_t$ , and the remaining ones exhibit an exponential behavior of the  $p_t$  spectrum. The application of background suppression criteria describing the statistical characteristics of structures at different levels showed that a significant part of the events identified by the hypothesis of independent partition have the same structures and can be interpreted as fractals. The events highlighted by the dependent partition hypothesis are suppressed.

PACS: 89.75.Da; 89.75.Fb

---

<sup>1</sup>E-mail: tokarev@jinr.ru

## ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие адронов и ядер высоких энергий является сложным процессом, включающим в себя образование ливней партонов в начальном и конечном состояниях, жесткие и полужесткие процессы, фрагментацию кварков и глюонов в бесцветные адроны, распад нестабильных адронов. Набор частиц, рожденных в таких взаимодействиях, можно рассматривать как набор точек в пространстве координат, например,  $p_t, \eta, \phi$ . Распределение частиц в исследуемом пространстве определяется динамикой взаимодействия, не является однородным и может рассматриваться как фрактал. В работе [1] Дж. Бьеркен обращал внимание на то, что новым направлением для изучения КХД на коллайдерах является фрактальность партонных каскадов, которая должна приводить к аномальной размерности фазового пространства, и подчеркивал, что обнаружение фрактальности является важной экспериментальной задачей.

Анализ событий, полученных генераторами Монте-Карло, позволяет проверить теоретические модели и механизмы взаимодействия частиц, оптимизировать методы анализа экспериментальных данных и выработать критерии поиска новой физики.

В настоящей работе проведен фрактальный анализ Монте-Карло (MC) Au–Au-событий при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ, полученных с помощью генератора АМРТ [2,3], а также MC-фракталов и событий со случайно распределенными частицами методом систем уравнений степенных покрытий (SePaC). Описание метода приведено в работах [4–11]. Критерии, позволяющие подавить фоновые события, обсуждаются в работе [11]. В разд. 1 представлены наборы данных, используемые в работе. Краткое описание SePaC-метода приведено в разд. 2. Гипотеза о наличии фракталов в наборе данных обсуждается в разд. 3. Для этого исследуется зависимость доли событий  $\text{Pr}_{\text{fn}}$ , интерпретируемых как фракталы, от параметров метода. В разд. 4 проведено разделение событий на фрактальные и нефрактальные (Fractal cut) с использованием SePaC-метода. Определены оптимальные значения параметров метода, рассмотрены характеристики и  $D_F$ -спектры событий. В разд. 5 представлены результаты применения дополнительных критериев для событий, выделенных SePaC-методом с гипотезами независимого и зависимого деления частей. Основные выводы сформулированы в заключении.

## 1. ОПИСАНИЕ НАБОРОВ ДАННЫХ

В работе проводится фрактальный анализ АМРТ Au–Au-событий при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ. В качестве исследуемой переменной использовался поперечный импульс  $p_t$  отрицательно заряженных частиц, регистрируемых в интервале псевдобыстрот  $|\eta| \leq 0,5$ . События разделялись по центральности. Количество событий  $N_{\text{ev}}$  и их средняя множественность  $\bar{N}_{h-}$  для разных классов центральности представлены в табл. 1.

На рис. 1 приведено распределение событий по множественности  $N_{h-}$  для разных классов центральности АМРТ Au–Au-событий.

Видно, что события с наибольшей центральностью имеют большую среднюю множественность.

Таблица 1. Характеристики АМРТ Au–Au-событий при  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ и  $|\eta| \leq 0,5$

Центральность, %	$N_{\text{ev}}$	$\bar{N}_{h-}$
0–5	29 018	283
5–10	30 000	229
10–20	30 000	176
20–30	29 998	120
30–40	30 000	79

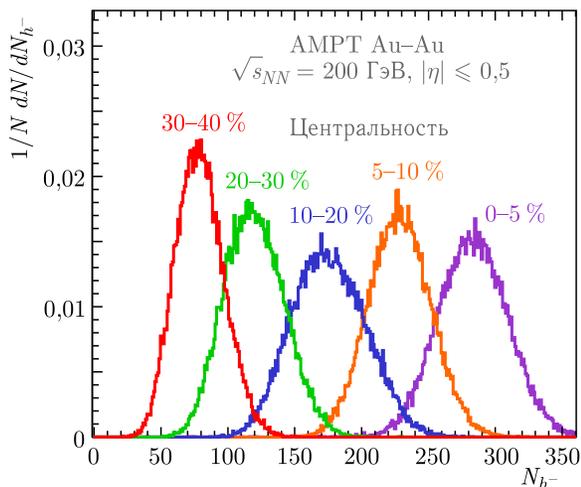


Рис. 1 (цветной в электронной версии). Распределение событий по множественности  $N_{h^-}$  для разных классов центральности АМРТ Au-Au-событий при  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ и  $|\eta| \leq 0,5$

Для сравнительного анализа рассматривались наборы случайных событий и МС-фракталы. Распределение по множественности для наборов случайных событий совпадает с распределением, полученным с помощью АМРТ-генератора (см. рис. 1). Фрактальный набор данных содержит 1823 события, полученных независимым [4], зависимым [5] и комбинированным [6] делением. Фракталы различались множественностью (от 8 до 1024), основанием образования  $P_F$  (от 3 до 8) и типом структур.

## 2. ПАРАМЕТРЫ И КРИТЕРИИ SePaC-МЕТОДА

В данной работе фрактальный анализ выполняется методом систем уравнений степенных покрытий (SePaC). Подробное описание метода и примеры его применения на тестовых фракталах и различных видах фоновых событий представлены в работах [4–11].

Метод SePaC основан на определении размерности Хаусдорфа–Безиковича [12], для вычисления которой рассматриваются различные наборы степенных покрытий исследуемой величины. Основание покрытия  $P_{cov}$  связано с количеством бинов  $N = (P_{cov})^i$  в  $i$ -м распределении набора, которое соответствует  $i$ -му уровню фрактала. Пособытийный анализ определяет, является ли событие фрактальным. Для этого в рассматриваемом наборе распределений строится система уравнений  $\sum_{j=1}^{N_i} (l_{ji})^{d_{F,i}} = 1$ , где  $N_i$  — количество элементов фрактала, а  $l_{ji}$  — длина  $j$  элемента на  $i$ -м уровне. Элементы фрактала определяются на основе ненулевых бинов в распределении исследуемой величины. Событие считается фрактальным, если условие  $|d_{F,i} - \bar{d}_F| / \bar{d}_F < Dev$  выполнено как минимум для трех уровней. Здесь  $Dev$  — параметр метода,  $\bar{d}_F$  — среднее значение размерностей  $d_{F,i}$ . Рассматриваются наборы покрытий с различными основаниями  $P_{cov} = 3, \dots, P_{max}$  ( $P_{max}$  — параметр метода), а также гипотезы независимого и зависимого деления элементов и способы реконструкции. Фрактальная размерность определяется по формуле  $D_F = \bar{d}_F$ .

В работе [11] SePaC-метод применялся к различным типам фоновых событий (спектры по исследуемой величине описывались функцией Гаусса, экспоненциальной и степенной зависимостями, а также равномерным распределением). Установлены значения параметров  $Dev$  и  $P_{max}$ , при которых восстанавливается максимальное количество фракталов, а доля фоновых событий минимальна. Большие значения оснований фракталов соответствуют большим значениям  $P_{max}$  для их реконструкции и доли фоновых событий. В работе введены критерии подавления фона. Они включают различные ограничения, гарантирующие статистическую повторяемость структур на различных уровнях. Критерий  $Cr_K: |\bar{\delta}_K| \leq K_{lim}$  ограничивает среднее относительное отклонение  $\bar{\delta}_K$  показателя  $K$  от значения  $i$ -го уровня в степенной зависимости  $N_i = (N_1)^K$ , характерной для фракталов. Здесь  $N_1$  и  $N_i$  — количество элементов на первом (базовом) и  $i$ -м уровне. Критерий  $Cr_D: |\bar{\delta}_D| \leq D_{lim}$  вводит ограничение на среднее относительное отклонение  $\bar{\delta}_D$  количества делений элементов фрактала от количества делений базового элемента. Одновременно рассматриваются отклонения как в большую ( $\bar{\delta}_{D+} > 0$ ), так и в меньшую ( $\bar{\delta}_{D-} < 0$ ) стороны. Критерий  $Cr_P: P_{1,1} \leq P_{lim}$  ограничивает долю неделящихся элементов с одной заполненной частью  $P_{1,1}$ . При точной реконструкции значения  $\bar{\delta}_K$ ,  $\bar{\delta}_D$  и  $P_{1,1}$  равны 0.

### 3. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О НАЛИЧИИ ФРАКТАЛОВ В НАБОРЕ ДАННЫХ

В данном разделе изучается возможность выделения кандидатов во фракталы на основе анализа зависимости  $Prtn(P_{max})$ . В работах [4–11] показано, что для МС-фракталов и степенных наборов данных доля  $Prtn$  отлична от нуля при малых значениях ( $P_{max} = 3$ ). Для других фоновых событий (перемешанных данных, событий с гауссовским, экспоненциальным и равномерным распределениями) величина  $Prtn$  растет, начиная с  $P_{max} > 10$ . Предполагается, что набор содержит кандидаты во фракталы, если функция  $Prtn(P_{max})$  растет, начиная с малых значений  $P_{max} < 5$ . Ожидается, что сравнение характерных особенностей зависимости  $Prtn(P_{max})$  для АМРТ Au–Au-событий с МС-фракталами и фоновыми событиями позволит подтвердить гипотезу о наличии фракталов в АМРТ Au–Au-событиях для последующего более детального анализа, учитывающего в том числе критерии  $Cr_K$ ,  $Cr_D$  и  $Cr_P$ .

На рис. 2 показана зависимость доли  $Prtn$  событий, определяемых как фракталы SePaC-методом с гипотезами независимого и зависимого деления при  $Dev = 0,05$ , от параметра  $P_{max}$  для АМРТ Au–Au и случайных (Rndm) событий. Выбор значения  $Dev = 0,05$  обоснован в работе [11].

Из рис. 2 видно, что доля  $Prtn(P_{max})$  для АМРТ Au–Au-событий имеет несколько режимов поведения: быстрый рост ( $P_{max} = 3–5$ ), первое плато ( $P_{max} = 6–11$ ), монотонное возрастание ( $P_{max} = 12–94$ ) с выходом на плато ( $P_{max} = 95–100$ ). Качественное отличие в поведении  $Prtn(P_{max})$  для случайного набора данных наблюдается при  $P_{max} < 15$ . В этом диапазоне они не восстанавливаются как фракталы. Отметим, что первое плато для АМРТ Au–Au-событий соответствует гипотезе независимого деления, а область дальнейшего роста — гипотезе зависимого деления. Случайные события восстанавливаются как фракталы только при использовании гипотезы зависимого деления.

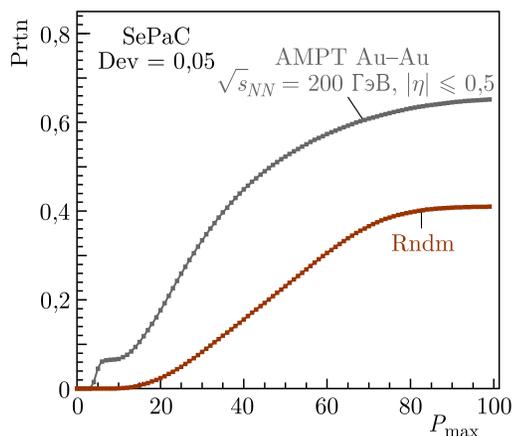


Рис. 2 (цветной в электронной версии). Зависимость доли  $Prtp$  событий, определяемых как фракталы SePaC-методом с гипотезами независимого и зависимого деления при  $Dev = 0,05$ , от параметра  $P_{max}$  для разных типов событий

Таким образом, установлено существенное различие в поведении зависимости доли  $Prtp$  случайных и Au–Au-событий, определяемых как фракталы, от параметра  $P_{max}$ . Это позволяет предположить наличие фрактальных Au–Au-событий. Обнаружены различные области поведения зависимости  $Prtp(P_{max})$  для Au–Au-событий, которые соответствуют применению различных гипотез формирования фракталов. Последующий анализ будет проводиться с отдельным применением гипотез.

#### 4. РАЗДЕЛЕНИЕ СОБЫТИЙ НА ФРАКТАЛЬНЫЕ И НЕФРАКТАЛЬНЫЕ

Разделение событий на фрактальные (Fractal) и нефрактальные (Non-fractal) после применения SePaC-метода будем называть термином Fractal cut.

**4.1. Применение гипотезы независимого деления.** В данном разделе фрактальные и нефрактальные события определяются SePaC-методом с гипотезой независимого деления. На рис. 3, а показано распределение частиц по поперечному импульсу  $p_t$  для AMPT Au–Au-событий всех центральностей. В спектре всех событий (темные символы) наблюдается экспоненциальное ( $p_t < 3$  ГэВ/с) и степенное ( $p_t > 5$  ГэВ/с) поведение. Форма спектра фрактальных событий (красные символы), определяемых при  $Dev = 0,05$ , показывает сложное поведение (экспоненциальное падение, «плечо» и степенное поведение), а соответствующие нефрактальные события (синие символы) демонстрируют экспоненциальное поведение при  $p_t > 1$  ГэВ/с. На рис. 3, б показана зависимость  $\chi^2/N$  от  $Dev$  для нефрактальных AMPT Au–Au-событий с центральностью 30–40%. Из этого рисунка видно, что значение  $\chi^2/N$  в области  $Dev = 0,01–0,03$  постоянно и далее увеличивается с ростом  $Dev$ . Выбор значения  $Dev = 0,03$ , обеспечивающего большую долю фрактальных событий, считаем оптимальным.

На рис. 3, в представлено распределение частиц по  $p_t$  в нефрактальных (синие символы) и фрактальных (красные символы) AMPT Au–Au-событиях с центральностью 30–40%, определяемых при  $Dev = 0,03$ . Аппроксимация нефрактальных событий экспоненциальной функцией соответствует параметру наклона  $b = -2,315 \pm 0,002$  и  $\chi^2/N = 3,2$ .

В табл. 2. приведены результаты аппроксимации экспоненциальной зависимостью распределения по  $p_t$  для нефрактальных AMPT Au–Au-событий, определяемых SePaC-методом с гипотезой независимого деления. Из табл. 2 видно, что с ростом централь-

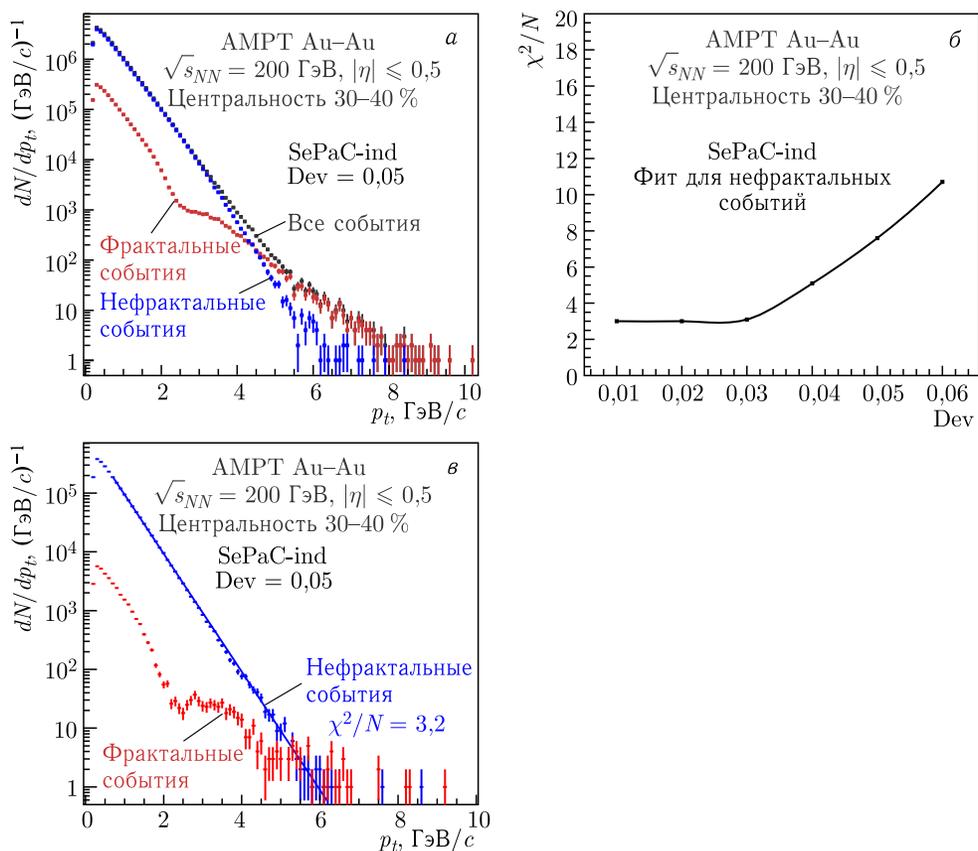


Рис. 3 (цветной в электронной версии). Распределение частиц по  $p_t$  для АМРТ Au–Au-событий всех центральностей (а), нефрактальные и фрактальные события определяются при Dev = 0,05. Зависимость  $\chi^2/N$  от Dev для нефрактальных АМРТ Au–Au-событий с центральностью 30–40% (б). Распределение частиц по  $p_t$  в нефрактальных и фрактальных АМРТ Au–Au-событиях с центральностью 30–40%, определяемых при Dev = 0,03 (в). Фрактальные и нефрактальные события определяются SePaC-методом с гипотезой независимого деления

ности от 30–40% до 0–5% оптимальное значение параметра Dev уменьшается, величина  $\chi^2/N$  растет от 3,2 до 19,3 и от 1,8 до 7,9 для диапазонов  $p_t = 0,7–6,2$  ГэВ/с и 1,2–6,2 ГэВ/с соответственно. Установлено, что параметр наклона  $b$  слабо зависит от центральности.

Приведем результаты сравнения характеристик фрактальных (5%) и нефрактальных (95%) событий, определяемых при оптимальном значении Dev. Найдено, что их средние множественности для каждой центральности практически не различаются. На рис. 4, а и б показаны распределения частиц во фрактальных и нефрактальных АМРТ Au–Au-событиях на плоскости  $\{p_t, p_t^{\max}\}$ , где  $p_t^{\max}$  — максимальный поперечный импульс в событии. Явно виден дефицит частиц во всех фрактальных событиях вблизи  $p_t^{\max}$ . Это соответствует поведению  $p_t$ -спектра на рис. 3, в в области «плеча». Для нефрактальных событий наблюдается плотное заполнение области до  $p_t^{\max} < 4$  ГэВ/с.

Таблица 2. Результаты аппроксимации экспоненциальной зависимостью распределения по  $p_t$  для нефрактальных АМРТ Au–Au-событий, определяемых SePaC-методом с гипотезой независимого деления

Центральность событий, %	Dev	Диапазон по $p_t$ , ГэВ/с	$\chi^2/N$	$b$
30–40	0,03	0,7–6,2	3,2	$-2,315 \pm 0,002$
		1,2–6,2	1,8	$-2,346 \pm 0,005$
20–30	0,03	0,7–6,2	4,8	$-2,331 \pm 0,002$
		1,2–6,2	1,8	$-2,365 \pm 0,004$
10–20	0,02	0,7–6,2	6,1	$-2,358 \pm 0,002$
		1,2–6,2	2,1	$-2,388 \pm 0,003$
5–10	0,02	0,7–6,8	9,1	$-2,377 \pm 0,002$
		1,2–6,8	2,5	$-2,388 \pm 0,003$
0–5	0,02	0,7–6,8	19,3	$-2,287 \pm 0,002$
		1,2–6,8	7,9	$-2,333 \pm 0,002$

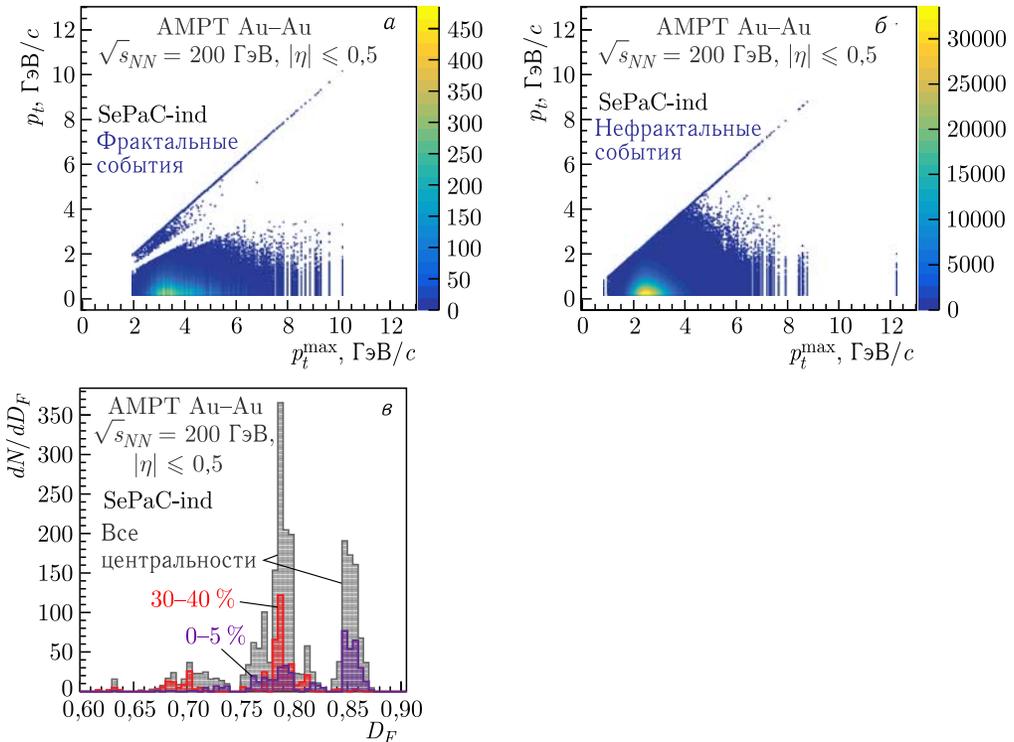


Рис. 4 (цветной в электронной версии). Распределения частиц во фрактальных (а) и нефрактальных (б) АМРТ Au–Au-событиях на плоскости  $\{p_t, p_t^{\max}\}$ , распределение фрактальных событий по размерности  $D_F$  (в). Фрактальные и нефрактальные события определяются SePaC-методом с гипотезой независимого деления при оптимальном для каждой центральности значении Dev

На рис. 4, в показано распределение фрактальных событий по размерности  $D_F$  для всех событий (серая область), событий с центральностью 0–5% (синяя область) и 30–40% (красная область). Распределение имеет несколько пиков. Установлено, что с ростом центральности значение размерности увеличивается.

Таким образом, применение SePaC-метода с гипотезой независимого деления выделяет 5% событий различных центральностей, которые обладают равными фрактальными размерностями на разных уровнях (отличие на 2–3%), имеют несколько пиков в спектре фрактальных размерностей  $D_F$  в диапазоне от 0,67 до 0,87, а также выделенную группу лидирующих частиц по  $p_t$  во всех событиях. Остальные события показывают экспоненциальное поведение  $p_t$ -спектра и будут проанализированы далее с учетом гипотезы зависимого деления.

**4.2. Применение гипотезы зависимого деления.** Рассмотрим АМРТ Au–Au и случайные события, которые после применения Fractal cut с гипотезой независимого деления определялись как нефрактальные. Используя SePaC-метод с гипотезой зависимого деления, проведем разделение таких событий на фрактальные и нефрактальные.

На рис. 5, а показана зависимость доли Prtn событий, определяемых как фракталы при оптимальных для каждой центральности значениях Dev, от параметра  $P_{\max}$  для АМРТ Au–Au (серая кривая) и случайных событий (коричневая кривая). Из этого рисунка видно, что доля Prtn отлична от нуля при  $P_{\max} > 12$  для АМРТ Au–Au и случайных событий. Такое поведение указывает на то, что события, определяемые как фракталы, не являются таковыми. С увеличением параметра значение Prtn возрастает и выходит на плато. Максимальное значение Prtn равно 0,35 и 0,1 для АМРТ Au–Au и случайных событий соответственно. На рис. 5, б приведено распределение событий, определяемых как фракталы, по размерности  $D_F$  для всех АМРТ Au–Au-событий (черная область), событий с центральностью 0–5% (фиолетовая кривая) и 30–40%

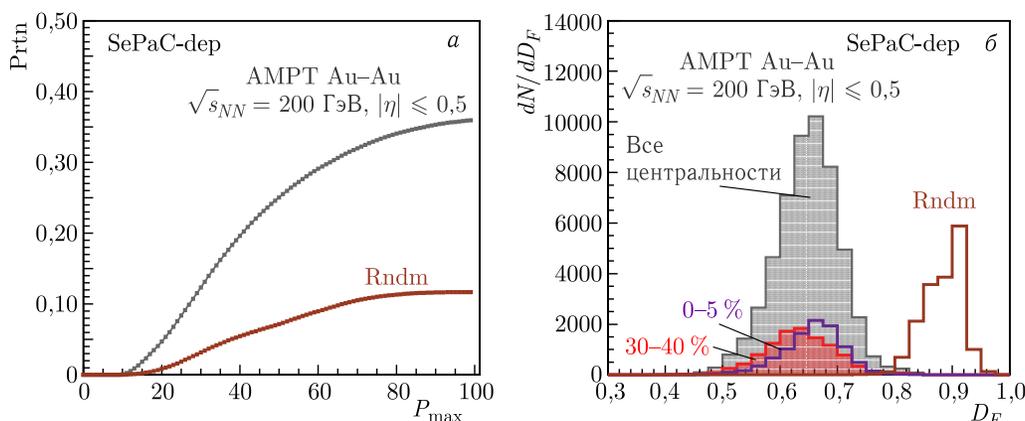


Рис. 5 (цветной в электронной версии). а) Зависимость доли Prtn событий, определяемых как фракталы SePaC-методом при оптимальных для каждой центральности значениях Dev, от параметра  $P_{\max}$  для разных типов событий. б) Распределение фрактальных событий по размерности  $D_F$ . Фрактальные и нефрактальные события определяются SePaC-методом с гипотезой зависимого деления

(красная область). Распределение имеет один пик в области от 0,5 до 0,8. Установлено, что с ростом центральности значение размерности увеличивается. Распределение по  $D_F$  для случайных событий лежит в области от 0,8 до 0,95 и не перекрывается с распределением для АМРТ Au–Au-событий. Различие в распределении указывает на наличие структуры в Au–Au-данных.

Таким образом, применение SePaC-метода с гипотезой независимого деления позволяет выделять 35 % событий различных центральностей, которые обладают равными (на уровне 2–3 %) фрактальными размерностями на разных уровнях и в спектре размерностей  $D_F$  имеют широкий пик ( $D_F = 0,65$ ) в диапазоне от 0,5 до 0,8.

## 5. ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ПОДАВЛЕНИЯ ФОНА

Рассмотрим результаты применения критериев, характеризующих статистическую повторяемость структур на различных уровнях, для событий, определяемых SePaC-методом как фракталы.

На рис. 6 показано распределение диапазонов по  $\bar{\delta}_K$ ,  $\bar{\delta}_D$  и распределение событий по  $P_{1,1}$  для МС-фракталов (черная область), АМРТ Au–Au фрактальных событий (фиолетовая и оранжевая области для гипотез независимого и зависимого деления), а также случайных событий (коричневая область).

Из рис. 6, а видно, что распределения по величине  $\bar{\delta}_K$  для фракталов и случайных событий не пересекаются. Они имеют максимальные значения при  $\bar{\delta}_K = 0$  и 1,7 соответственно. Для АМРТ Au–Au фрактальных событий с независимым делением и МС-фракталов положения пиков совпадают. Распределение для Au–Au фрактальных событий с зависимым делением расположено в диапазоне от  $-1,0$  до  $-0,2$  и существенно отличается от распределения для фракталов и случайных событий. Для критерия  $C_{ГК}$ :  $|\bar{\delta}_K| \leq K_{\text{lim}}$  выбрано значение  $K_{\text{lim}} = 0,25$ , позволяющее подавить случайные события. Область, удовлетворяющая этому критерию, ограничена синими вертикальными линиями. Результаты применения этого критерия приведены в табл. 3. Доля МС-фракталов, удовлетворяющих  $C_{ГК}$ , равна 76%. Отличие доли от 100% связано с тем, что часть фракталов с комбинированным делением не проходит проверку, так как в SePaC-методе эта гипотеза не рассматривается. Из табл. 3 видно, что все АМРТ Au–Au фрактальные события с независимым делением удовлетворяют критерию  $C_{ГК}$ . Большинство АМРТ Au–Au фрактальных событий с зависимым делением и случайных событий исключаются по данному критерию (остается 12 и 9 % событий соответственно).

Таблица 3. Доли (%) различных типов событий, удовлетворяющих критериям  $C_{ГК}$ ,  $C_{ГD}$ ,  $C_{ГP}$ ,  $C_{ГKDP}$

Тип данных	$C_{ГК}$	$C_{ГD}$	$C_{ГP}$	$C_{ГKDP}$
МС fractal	76	95	99	72
АМРТ Au–Au, fractal-ind	100	88	98	86
АМРТ Au–Au, fractal-dep	12	12	13	0,02
Rndm	9	2	17	0,02

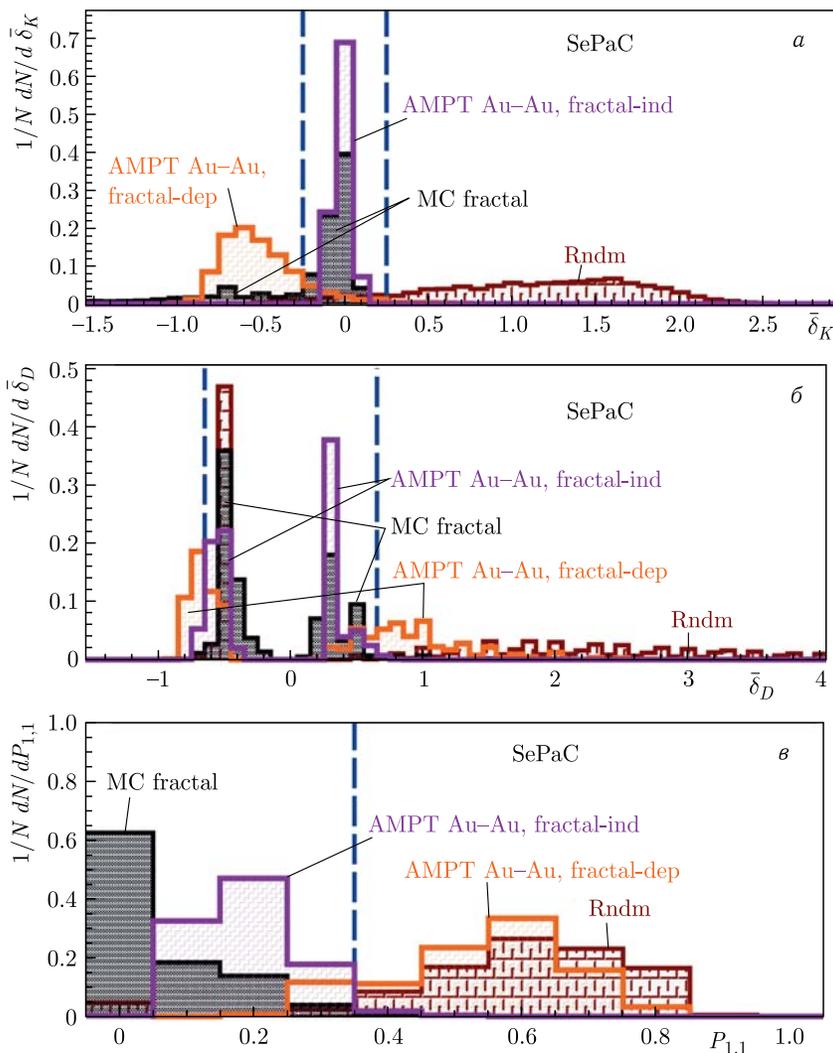


Рис. 6 (цветной в электронной версии). Распределение диапазонов по величинам  $\bar{\delta}_K$  (а) и  $\bar{\delta}_D$  (б), распределение событий по величине  $P_{1,1}$  (в) для МС-фракталов, АМРТ Au–Au фрактальных событий и набора случайных событий

На рис. 6, б показано распределение по  $\bar{\delta}_D$  для МС-фракталов и случайных событий. Видно, что они различаются в области положительных значений ( $\bar{\delta}_D \leq 0,6$  и  $\bar{\delta}_D > 0,6$  соответственно). Распределения для МС-фракталов и Au–Au фрактальных событий с независимым делением расположены в одном диапазоне: от  $-0,6$  до  $0,6$ . Распределения для АМРТ Au–Au фрактальных событий с зависимым делением ( $\bar{\delta}_D = -0,8 \div 2,0$ ), МС-фракталов и случайных событий заметно различаются в области положительных значений  $\bar{\delta}_D$ . Для критерия  $Cr_D: |\bar{\delta}_D| \leq D_{lim}$  выбрано значение  $D_{lim} = 0,65$ , позволяющее подавить случайные события. Область, удовлетворяю-

щая этому критерию, ограничена синими вертикальными линиями. Из табл. 3 видно, что большинство МС-фракталов и АМРТ Au–Au фрактальных событий с гипотезой независимого деления удовлетворяют этому критерию (95 и 88 % соответственно). Наблюдается подавление большей части АМРТ Au–Au фрактальных событий с зависимым делением и случайных событий (остается 12 и 2 % соответственно).

На рис. 6, в приведены распределения по величине  $P_{1,1}$  для МС-фракталов и случайных событий. Видно, что они не пересекаются и имеют максимальные значения при 0 и 0,6 соответственно. Распределения для МС-фракталов и АМРТ Au–Au фрактальных событий с независимым делением расположены в одном диапазоне (от 0 до 0,3), но имеют разную форму с максимумами при 0 и 0,2 соответственно. Для АМРТ Au–Au фрактальных событий с зависимым делением и случайных событий распределения похожи. Они находятся в диапазоне от 0,3 до 0,8 и имеют максимальное значение при  $P_{1,1} = 0,6$ . Для критерия  $Ст_P$ :  $P_{1,1} \leq P_{lim}$  выбрано значение  $P_{lim} = 0,35$ , позволяющее подавить случайные события. Область, удовлетворяющая этому критерию, ограничена синей вертикальной линией. Из табл. 3 видно, что практически все МС-фракталы и АМРТ Au–Au фрактальные события с гипотезой независимого деления удовлетворяют этому критерию (99 и 98 % соответственно). Наблюдается подавление большей части АМРТ Au–Au фрактальных событий с зависимым делением и случайных событий (остается 13 и 17 % соответственно).

Совместное применение трех критериев  $Ст_{KDP}$  (см. табл. 3) оставляет незначительную часть (0,02 %) АМРТ Au–Au-событий, восстанавливаемых как фракталы с зависимым делением, и случайных событий. Большинство МС-фракталов и АМРТ Au–Au фрактальных событий с независимым делением (72 и 86 % соответственно) удовлетворяют критериям.

Таким образом, установлено, что большинство АМРТ Au–Au-событий (86 %), выделенных SePaC-методом с гипотезой независимого деления, имеют приблизительно равные статистические характеристики структур на разных уровнях. Это позволяет интерпретировать такие события как фрактальные. Выделенные SePaC-методом с гипотезой зависимого деления АМРТ Au–Au-события отличаются статистическими характеристиками структур на разных уровнях и не рассматриваются как фрактальные.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе Монте-Карло Au–Au-события при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ, полученные с помощью генератора АМРТ, анализируются SePaC-методом. В качестве исследуемой переменной рассматривается поперечный импульс  $p_t$  отрицательно заряженных частиц, регистрируемых в интервале псевдобыстрот  $|\eta| \leq 0,5$ . Для сравнительного анализа используются МС-фракталы и события со случайно распределенными частицами.

Показано существенное различие в поведении доли  $Pr_{tn}$  случайных и АМРТ Au–Au-событий, определяемых как фракталы, в зависимости от параметра  $P_{max}$ . Установлено, что гипотезы независимого и зависимого формирования фракталов соответствуют различным областям поведения  $Pr_{tn}(P_{max})$  для АМРТ Au–Au-событий.

Получены следующие результаты анализа с отдельным использованием гипотез.

1. Гипотеза независимого деления — выделены 5 % АМРТ Au–Au-событий различных центральныхностей, обладающих равными фрактальными размерностями на разных уровнях, имеющих несколько пиков в спектре фрактальных размерностей  $D_F$  в диапазоне от 0,67 до 0,87 и выделенную группу лидирующих частиц по  $p_t$  во всех событиях. Оставшиеся события обнаруживают экспоненциальное поведение  $p_t$ -спектра.

2. Гипотеза зависимого деления — выделены 35 % событий различных центральныхностей, которые обладают равными фрактальными размерностями на разных уровнях и имеют широкий пик в диапазоне от 0,5 до 0,8 в  $D_F$ -спектре.

Показано, что при использовании критериев, описывающих статистические характеристики структур на разных уровнях, восстанавливается 72 % МС-фракталов. Значительная доля (86 %) событий АМРТ Au–Au-событий, выделенных гипотезой независимого деления, имеет одинаковые структуры и интерпретируется как фракталы. Все случайные и АМРТ Au–Au-события, выделенные гипотезой зависимого деления, подавлены.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность А. О. Кечечяну за полезные и плодотворные обсуждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bjorken J.* // Phys. Rev. D. 1992. V. 45. P. 4077.
2. *Lin Z. W., Ko C. M.* // Phys. Rev. C. 2002. V. 65. P. 034904.
3. *Lin Z. W. et al.* // Phys. Rev. C. 2005. V. 72. P. 064901.
4. *Dedovich T. G., Tokarev M. V.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2013. V. 10. P. 481.
5. *Dedovich T. G., Tokarev M. V.* // Ibid. P. 491.
6. *Dedovich T. G., Tokarev M. V.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2016. V. 13. P. 169.
7. *Dedovich T. G., Tokarev M. V.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2011. V. 8. P. 552.
8. *Dedovich T. G., Tokarev M. V.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2016. V. 13. P. 178.
9. *Dedovich T. G., Tokarev M. V.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2017. V. 14. P. 865.
10. *Dedovich T. G., Tokarev M. V.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2019. V. 16. P. 240.
11. *Dedovich T. G., Tokarev M. V.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2021. V. 18. P. 93.
12. *Hausdorff F.* // Math. Ann. 1918. V. 79. P. 157.

Получено 23 января 2023 г.