Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 6(251). С. 1389–1400

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ МЕТОДОМ ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

В. В. Пупышев [1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Метод фазовых функций используется для исследования фаз двумерного рассеяния центральным коротко- или дальнодействующим потенциалом. В результате выводятся явные низкоэнергетические приближения таких фаз.

The variable phase approach is used for investigation of phases of two-dimensional scattering by a central short- or long-range potential. As a result, explicit low-energy approximations of these phases are derived.

PACS: 03.65.−W; 03.65.Nk; 02.30.Mv

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в 60–70-е годы прошлого века метод фазовых функций в квантовой механике интенсивно развивался сотрудниками ЛТФ ОИЯИ В. В. Бабиковым, Р. М. Мир-Касимовым и Н. Б. Шульгиной. Основные результаты, полученные этим методом в теории трехмерного потенциального рассеяния, были просуммированы В. В. Бабиковым в его монографии [1].

Дальнейшее развитие, но уже для построения теории рассеяния в двумерном пространстве метод фазовых функций получил в цикле работ [2–7].

Настоящая работа является естественным продолжением этого цикла.

Объект нашего исследования — двумерное рассеяние квантовой частицы неподвижным силовым центром O, воздействующим на нее посредством потенциала U. Предполагается, что этот потенциал зависит только от расстояния r между квантовой частицей и центром O. Такие потенциалы принято называть центральными. Как известно [1,2], в случае любого центрального потенциала исходная задача двумерного рассеяния квантовой частицы, записанная в полярных координатах (r, φ), сводится к бесконечной, но счетной ($m = 0, 1, \ldots$) совокупности не зацепляющихся одномерных задач Шредингера на полуоси $r > 0$. Асимптотика решения каждой такой задачи при больших значениях аргумента r содержит парциальную фазу рассеяния δ_λ с полуцелым индексом $\lambda = m - 1/2$. Через все такие фазы известным образом [1] выражаются дифференциальное и полное сечения двумерного рассеяния.

[1] E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

Наша главная задача — найти явные асимптотики всех парциальных фаз δ_λ двумерного рассеяния квантовой частицы центральным коротко- или дальнодействующим потенциалом в пределе малых положительных значений ее полной энергии.

Настоящая работа устроена следующим образом. Разд. 1 является вводным. В нем поясняются основные определения и приводятся разложения функций Риккати–Бесселя полуцелого порядка. Такие разложения окажутся ключевыми в следующих разделах. В разд. 2 и 3, соответственно, исследуются фазы двумерного рассеяния коротко- и дальнодействующим потенциалом. Основные результаты выполненных исследований суммируются и обсуждаются в заключении.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ В КЛЮЧЕВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Начнем с основных определений. Пусть квантовая частица имеет массу μ и обладает полной положительной энергией $E = (\hbar k)^2/(2\mu)$ и волновым числом k. Введем единицу d измерения расстояния r и будем использовать безразмерные аргументы $x = r/d$, $q = kd$ и $\rho = kr = qx$. По определению потенциал

$$V(x) = \frac{2\mu}{\hbar^2} d^2\, U(r)$$

считаем непрерывной на всей полуоси $x > 0$ функцией. Короткодействующим называем потенциал $V(x)$, удовлетворяющий при любом целом n предельному соотношению

$$\lim_{x\to\infty} x^n\, V(x) = 0. \tag{1}$$

Если такое соотношение не выполняется хотя бы при одном значении n, то потенциал $V(x)$ считается дальнодействующим.

Приведем пример дальнодействующего потенциала. Предположим, что на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ потенциал $V(x)$ является некоторой непрерывной функцией, а на полуоси $x \geqslant 1$ определен формулами

$$V(x) = \frac{\alpha}{x^\beta}, \quad \alpha \in (-\infty, \infty)\,, \quad \beta > 2, \quad x \geqslant 1. \tag{2}$$

Такой потенциал является дальнодействующим и часто называется потенциалом со степенным «хвостом».

Пределом низких энергий считаем предел $q \to 0$ при фиксированных значениях параметров λ, α и β. Приближения функций в таком пределе называем низкоэнергетическими.

Используем стандартные определения [11] константы Эйлера $\gamma = 0{,}5772156\ldots$, символа Кронекера δ_{ab} и символов $n!$ и $n!!$. Напомним, что $0! = 1$ и $0!! = 1$. Всюду ниже полагаем

$$a_\lambda \equiv (2\lambda + 1 + \delta_{2\lambda,-1})^{-1}, \quad b_\lambda \equiv (2\lambda - 1 + 2\,\delta_{2\lambda,-1})!!, \quad \lambda = m - 1/2 = -1/2, 1, 2, \ldots$$

Для краткости записи будем использовать множитель τ_λ, заданный равенствами

$$\tau_\lambda = \frac{2}{\pi}(2\lambda+1)!!\,(2\lambda - 1 + 2\delta_{2\lambda,-1}) = \frac{2}{\pi}\frac{b_\lambda^2}{a_\lambda}.$$

Следуя работе [2], логарифмическую функцию $h(q)$ определим формулами

$$h(q) \equiv (2/\pi)\ln(q/q_0), \quad q_0 \equiv 2\exp(-\gamma) = 1{,}122918\ldots,$$

а функции Риккати–Бесселя j_λ, $\tilde{n}_\lambda$ и n_λ полуцелого порядка λ представим через функции Бесселя J_m и Y_m, $m = \lambda + 1/2$, равенствами

$$j_\lambda(\rho) = (\pi\rho/2)^{1/2} J_m(\rho), \quad \tilde{n}_\lambda(\rho) = (\pi\rho/2)^{1/2} Y_m(\rho), \quad n_\lambda(x,q) = \tilde{n}_\lambda(\rho) - h(q) j_\lambda(\rho). \tag{3}$$

Теперь приведем ключевые разложения функций j_λ и n_λ.

Функции j_λ и n_λ являются рядами [2]

$$j_\lambda(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{a_\lambda}{b_\lambda}\,\rho^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{2n}, \quad n_\lambda(x,q) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{b_\lambda}{\rho^\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x)\,\rho^{2n}, \quad \rho = qx > 0. \tag{4}$$

Коэффициенты a_n удобно вычислять по рекуррентным формулам

$$a_0 = 1, \quad a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n(2\lambda + 2n + 1)} = -\frac{a_{n-1}}{4n(n+m)}, \quad n \geqslant 1.$$

Если $2\lambda = -1$, то все функции $b_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, определяются равенствами

$$b_n(x) = a_n[h_n - \ln x], \quad h_0 = 0, \quad h_p = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

В случае $2\lambda \geqslant 1$ функции $b_n(x)$ с номерами $n < m = \lambda + 1/2$ являются числовыми коэффициентами

$$b_0(x) \equiv 1, \quad b_n(x) = \frac{b_{n-1}(x)}{2n(2\lambda + 1 - 2n)} = \frac{b_{n-1}(x)}{4n(m-n)}, \quad n = 1, 2, \ldots, m-1,$$

а все остальные $(n \geqslant m)$ функции $b_n(x)$ вычисляются по формулам

$$b_n(x) = a_{n-m}\,\frac{a_\lambda}{b_\lambda^2}\left[\frac{h_n + h_{n-m}}{2} - \ln x\right], \quad n = m, m+1, \ldots$$

Перейдем к исследованию рассеяния короткодействующим потенциалом.

2. РАССЕЯНИЕ КОРОТКОДЕЙСТВУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В методе фазовых функций [1] тангенс фазы рассеяния $\delta_\lambda(q)$ равен пределу

$$\operatorname{tg}\delta_\lambda(q) = \lim_{x\to\infty} T(x,q) \tag{5}$$

функции T, которая является решением нелинейного уравнения

$$\partial_x T(x,q) = -\frac{1}{q} V(x)\,\left[j_\lambda(qx) - T(x,q)\,\tilde{n}_\lambda(qx)\right]^2, \quad x > 0, \tag{6}$$

с начальным условием $T(x,q) = 0$ при $x = 0$.

Для начала решим две задачи. Первая задача: из исходного уравнения (6) вывести уравнение, содержащее вместо функции $\tilde{n}_\lambda(qx)$ функцию $n_\lambda(x,q)$. Вторая задача — найти представление тангенса фазы, в котором логарифмическая функция $h(q)$ выделена в явном виде.

Для решения обеих задач в уравнении (6) положим

$$T(x,q) = -\frac{L(x,q)}{1-h(q)\,L(x,q)} \tag{7}$$

и согласно формулам (3) функцию $\tilde{n}_\lambda$ представим суммой функций n_λ и $h\,j_\lambda$. В результате для новой неизвестной функции $L(x,q)$ получим уравнение

$$\partial_x L(x,q) = q^{-1}\,V(x)\,\left[j_\lambda(qx) + n_\lambda(x,q)\,L(x,q)\right]^2, \quad x>0, \tag{8}$$

с начальным условием $L(x,q)=0$ при $x=0$. Правая часть этого уравнения содержит известные функции j_λ и n_λ, которые являются бесконечными степенными рядами (4) по переменной q. Следовательно, функцию L следует искать в виде ряда такого же типа. Так и поступим. Будем считать, что

$$L(x,q) = q^{2\lambda+1}\,\tau_\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}L_n(x) = q^{2\lambda+1}\,\frac{\pi}{2}\frac{1}{(2\lambda+1)!!(2\lambda_1+2\delta_{2\lambda,-1})!!}\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}L_n(x). \tag{9}$$

В уравнении (8) заменим функции j_λ и n_λ рядами (4), а функцию $L(x;q)$ представим в виде ряда (9).

В результате для искомых компонент $L_n(x)$ получатся нулевые начальные условия ($L_n(x)=0$ при $x=0$) и рекуррентная по номеру n цепочка уравнений. Ее первое ($n=0$) уравнение — нелинейное

$$\partial_x L_0(x) = a_\lambda\,V(x)\,\left[a_0x^{\lambda+1} - b_0(x)\,x^{-\lambda}L_0(x)\right]^2, \tag{10}$$

а все остальные ($n>0$) уравнения — линейные:

$$\partial_x L_n(x) = \xi(x)\,L_n(x) + R_n(x), \quad n=1,2,\ldots \tag{11}$$

В этих уравнениях при любом $n>0$ функция $\xi(x)$ содержит компоненту $L_0(x)$:

$$\xi(x) = -2a_\lambda V(x)\,d_0(x)\left[a_0x - x^{-2\lambda}\,b_0(x)\,L_0(x)\right], \tag{12}$$

а правая часть $R_n(x)$ содержит все компоненты L_j с номерами $j=0,1,\ldots,n-1$:

$$R_n(x) = a_\lambda\,V(x)\,x^{2n+2\lambda+2}\,A_n - r_n(x). \tag{13}$$

Здесь по определению

$$r_n(x) \equiv a_\lambda V(x)\,\left[2x\sum_{j=0}^{n-1}B_{nj}(x)\,L_j(x) - x^{-2\lambda}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}C_{njk}(x)L_j(x)L_k(x)\right], \tag{14}$$

а множитель A_n и функции $B_{nj}(x)$ и $C_{njk}(x)$ являются следующими суммами:

$$A_n = \sum_{p+i=n} a_p a_i, \tag{15}$$

$$B_{nj}(x) = \sum_{p+i=n-j} x^{2(p+i)}\, a_p\, b_i(x), \tag{16}$$

$$C_{njk}(x) = \sum_{p+i=n-j-k} x^{2(p+i)}\, b_p(x)\, b_i(x). \tag{17}$$

Если компонента L_0 известна, то последовательно увеличивая номер n и используя интегральное представление

$$L_n(x) = \mathrm{e}^{\omega(x)} \int\limits_0^x R_n(t)\, \mathrm{e}^{-\omega(t)}\, dt, \quad \omega(x) \equiv \int\limits_0^x \xi(t)\, dt, \tag{18}$$

можно вычислить все остальные компоненты L_n с любым номером $n \geqslant 1$.

Исследуем поведение этих компонент в пределе $x \to \infty$ методом математической индукции. Итерируя уравнение (10), можно показать, что при условии (1) искомое решение $L_0(x)$ ограничено в пределе $x \to \infty$. Чтобы продолжить доказательство, используем определение функции R_n и интегральное представление (18). В этом представлении функции $\mathrm{e}^{\omega(x)}$ и $\mathrm{e}^{\omega(-t)}$ ограничены при любых n, x и t. Предположим, что все компоненты L_j с номером $j = 1, 2, \ldots, n-1$ ограничены в этом же пределе. Нетрудно убедиться в том, что условие (1) является достаточным для сходимости обоих интегралов (18) при любом значении их верхнего предела x, в том числе и при $x = \infty$. Поэтому компонента $L_n(x)$ в пределе $x \to \infty$ принимает конечное значение $L_n(\infty)$.

По той же причине все компоненты $L_j(x)$, $j > n$, в этом же пределе принимают конечные значения $L_j(\infty)$.

Поэтому в равенствах (5), (7), (9) можно перейти к пределу $x \to \infty$ и получить искомое представление тангенса фазы $\delta_\lambda(q)$:

$$\operatorname{tg} \delta_\lambda(q) = -\frac{L(\infty, q)}{1 - h(q)\, L(\infty, q)}, \quad L(\infty, q) = q^{2\lambda+1} \tau_\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} L_n(\infty). \tag{19}$$

В этом представлении неаналитическая функция $h(q)$ выделена в явном виде, а в пределе $q \to 0$ бесконечный ряд $L(\infty, q)$ можно аппроксимировать его любой конечной подсуммой $M(q)$. В результате получится следующее явное низкоэнергетическое приближение:

$$\operatorname{tg} \delta_\lambda(q) \approx -\frac{M(q)}{1 - h(q) M(q)}, \quad M(q) \equiv \tau_\lambda^{-1} q^{2\lambda+1} \sum_{n=0}^{p<\infty} q^{2n} L_n(\infty, q). \tag{20}$$

Используя равенства (19), найдем связь между функцией $L(\infty, q)$ и функцией эффективного радиуса $K(q)$. По определению [2]

$$K(q) \equiv q^{2\lambda+1}\, [\operatorname{ctg} \delta_\lambda(q) - h(q)] = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\, q^2\, x_0 + \ldots$$

Следовательно, искомая связь является равенством

$$K(q) = -\frac{q^{2\lambda+1}}{L(\infty, q)}.$$

Благодаря ему длину рассеяния a и эффективный радиус x_0 можно вычислить по формулам

$$a = \tau_\lambda^{-1}\, L_0(\infty), \quad x_0 = 2\,\tau_\lambda\, \frac{L_1(\infty)}{L_0^2(\infty)}.$$

Известен и другой способ вычисления параметров рассеяния a и x_0. Как показано в работах [2] и [3], эти параметры можно представить через решения систем двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Точные решения таких систем в случае потенциала прямоугольной формы впервые получены в работе [3].

В работах [4] и [5] с помощью параметров a и x_0 найдены простые решения двух важных проблем теории двумерного низкоэнергетического рассеяния короткодействующим потенциалом.

Перечислим основные результаты этих работ.

В работе [4] впервые выведены трансцендентные уравнения, предназначенные для вычисления энергий слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний квантовой частицы. Такие уравнения в качестве параметров содержат a и x_0.

Как впервые показано в работе [5], наличие слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний порождает физически интересные особенности поведения фаз и парциальных сечений при низких энергиях. Для вывода низкоэнергетических приближений таких сечений использовались параметры a и x_0.

Стоит отметить, что нелинейное уравнение (8) для функции L можно линеаризовать. Для этого нужно использовать подстановку

$$L(x, q) = -s(x, q)/c(x, q)$$

и дополнительное тождество

$$j_\lambda(qx)\,\partial_x c(x, q) - n_\lambda(x, q)\,\partial_x s(x, q) \equiv 0, \quad x \geqslant 0.$$

В результате для искомых функций c и s получится система двух линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_x c(x, q) &= -q^{-1} V(x)\, \left[c(x, q)\, j_\lambda(qx) - s(x, q)\, n_\lambda(x, q)\right] n_\lambda(x, q), \\ \partial_x s(x, q) &= -q^{-1} V(x)\, \left[c(x, q)\, j_\lambda(qx) - s(x, q)\, n_\lambda(x, q)\right]\, j_\lambda(qx) \end{aligned} \tag{21}$$

с начальными условиями $c(x, q) = 1$ и $s(x, q) = 0$ в точке $x = 0$. В работе [6] впервые показано, что такая система имеет единственное решение.

3. РАССЕЯНИЕ ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Предположим, что на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ потенциал $V(x)$ является некоторой непрерывной функцией, а на полуоси $x > 1$ определяется формулами (2).

Приступим к исследованию фаз $\delta_\lambda(q)$, порожденных таким потенциалом.

Как и в рассмотренном выше случае короткодействующего потенциала, исходным считаем представление (7) функции T через функцию L и ее компоненты L_n.

Исследуем поведение этих компонент в пределе $x \to \infty$. Для этого используем определение (13) функций R_n и интегральное представление (18) компоненты L_n.

Докажем следующее утверждение. Пусть $\beta \neq 4, 6, 8 \ldots$ и при некотором n все компоненты $L_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, ограничены в пределе $x \to \infty$. Тогда в том же пределе, но при условии $2n + 2\lambda + 3 - \beta < 0$ компонента $L_n(x)$ сходится к конечному значению $L_n(\infty)$, а при условии $2n + 2\lambda + 3 - \beta \geqslant 0$ не ограничена.

Приступим к доказательству. Так как $2n + 2\lambda + 3 - \beta < 0$, то $2n + 2\lambda + 2 - \beta < 0$. Поэтому в сумме R_n, заданной формулами (13)–(17), наиболее медленно при $x \to \infty$ стремится к нулю слагаемое

$$D_n(x) = a_\lambda A_n x^{2n+2\lambda+2}\, V(x) = \alpha a_\lambda A_n x^{2n+2\lambda+2-\beta}.$$

Интеграл от такого слагаемого с верхним пределом x пропорционален степенной или же логарифмической функции этого предела: если $2n + 2\lambda + 3 - \beta \neq 0$, то

$$\int^{x} D_n(t)\, dt = \alpha\, a_\lambda\, \frac{x^{2n+2\lambda+3-\beta}}{2n + 2\lambda + 3 - \beta},$$

а в случае $2n + 2\lambda + 2 - \beta = -1$

$$\int^{x} D_n(t)\, dt = \alpha\, a_\lambda\, \ln x.$$

Следовательно, исследуемый интеграл сходится при $x \to \infty$ тогда и только тогда, когда номер n удовлетворяет условию $2n + 2\lambda + 3 - \beta < 0$. В том же пределе и при том же условии сходятся оба интеграла, содержащихся в представлении (18) компоненты $L_n(x)$.

Если $2n + 2\lambda + 3 - \beta = 0$, то при нечетном β случай $2n + 2\lambda + 2 - \beta = -1$ не реализуется. В случае $2n + 2\lambda + 3 - \beta > 0$ модуль слагаемого D_n суммы R_n растет наиболее быстро по сравнению с модулями ее остальных слагаемых. Поэтому интеграл от слагаемого D_n и от самой суммы R_n расходится на верхнем пределе x при его увеличении.

Теперь докажем следующее утверждение. Пусть β — четное число ($\beta = 2, 4, 6, \ldots$) и при некотором n все компоненты $L_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, ограничены в пределе $x \to \infty$. Тогда в том же пределе, но при условии $2n + 2\lambda + 2 - \beta < 0$ компонента $L_n(x)$ сходится к конечному значению $L_n(\infty)$, а при условии $2n + 2\lambda + 2 - \beta \geqslant 0$ не ограничена.

Доказательство начнем следующим замечанием. Так как β — четное число, то число

$$n = \frac{1}{2}(\beta - 2\lambda - 3)$$

является целым и поэтому верно равенство

$$2n + 2\lambda + 3 - \beta = 0.$$

Следовательно, если все компоненты L_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, ограничены в пределе $x \to \infty$, то компонента L_n окажется неограниченной. Если же все компоненты L_n, $j = 0, 1, \ldots, n-2$, ограничены в пределе $x \to \infty$, то компонента L_{n-1} будет ограниченной.

Заметим, что при четном β

$$n - 1 = \frac{1}{2}(\beta - 2\lambda - 3) - 1 = \frac{1}{2}(\beta - 2\lambda - 5),$$

а также

$$2n + 2\lambda + 2 - \beta = -1 < 0.$$

Суммируем результаты двух рассмотренных выше случаев. Если $\beta \neq 2, 4, 6, \ldots$, то символом ν обозначим максимальное среди целых чисел n, при которых выполняется неравенство $2n+2\lambda+3-\beta < 0$. В случае $\beta = 2, 4, 6, \ldots$ считаем, что ν — максимальное среди целых чисел n, при которых выполняется неравенство $2n + 2\lambda + 1 - \beta < 0$. По определению число ν зависит не только от величины показателя β, но и от того, является ли этот показатель четным или же нечетным числом:

$$\begin{cases} \nu = \{(2\lambda + 3 - \beta)/2\}, & \beta \neq 2, 4, 6, \ldots, \\ \nu = \{(2\lambda + 1 - \beta)/2\}, & \beta = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \tag{22}$$

Здесь фигурными скобками j обозначена целая часть заключенного в них числа j.

Продолжим анализ уравнения (8). Предположим, что все компоненты $L_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots, \nu$, ограниченные в точке $x = \infty$, найдены. Решение $L(x, q)$ этого уравнения будем искать в виде суммы известного ряда S и пока неизвестной функции ψ:

$$L(x, q) = S(x, q) + \psi(x, q), \quad S(x, q) = q^{2\lambda+1} \tau_\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\nu} q^{2n} L_n(x). \tag{23}$$

Здесь и всюду ниже любая сумма с верхним пределом ν в случае $\nu < 0$ полагается равной нулю.

Выведем уравнение, определяющее искомую функцию $\psi(x, q)$. Для этого в уравнении (8) заменим L суммой (23). В итоге для функции $\psi(x, q)$ получится нелинейное уравнение

$$\partial_x \psi(x, q) = \frac{1}{q} V(x) \left\{ j_\lambda(qx) + n_\lambda(x, q) \left[S(x, q) + \psi(x, q) \right] \right\}^2 - \partial_x S(x, q). \tag{24}$$

Заметим, что в этом уравнении согласно определению (23) производная $\partial_x S$ представляется через сумму производных $\partial_x L_n$. Заменив каждую из них правой частью $\xi L_n + R_n$ соответствующего уравнения (11), получим

$$\begin{aligned} \partial_x \psi(x, q) = g(x, q) + \frac{1}{q} V(x)\, 2 j_\lambda(qx) n_\lambda(x, q) \big[S(x, q) + \psi(x, q) \big] + \\ + \frac{1}{q} V(x)\, n_\lambda^2(x, q) \big[S(x, q) + \psi(x, q) \big]^2 - \tau_\lambda^{-1} V(x)\, q^{2\lambda+1} \sum_{n=0}^{\nu} q^{2n} \big[\xi(x)\, L_n(x) + r_n(x) \big]. \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь по определению

$$g(x,q) \equiv \frac{1}{q}\, V(x) \left[j_\lambda^2(qx) - \frac{a_\lambda}{\tau_\lambda}\, \rho^{2\lambda+2} \sum_{n=0}^{\nu} A_n \rho^{2n} \right]. \tag{26}$$

Заметим, что наше уравнение (25) принадлежит тому же классу уравнений, и уравнение, исследованное Леви и Келлером в их работе [8]. Поэтому представляется логичным использовать ниже утверждения, доказанные этими авторами. Главное из них означает, что в пределе $q \to 0$ верно приближение $\psi(\infty, q) \approx \varepsilon(q)$, где $\varepsilon(q)$ — интеграл от функции $g(x,q)$ по полуоси $x \geqslant 0$:

$$\varepsilon(q) = \int_0^\infty g(x,q)\, dx = \frac{1}{q} \int_0^\infty V(x) \left[j_\lambda^2(qx) - \frac{a_\lambda}{\tau_\lambda}\, \rho^{2\lambda+2} \sum_{n=0}^{\nu} A_n \rho^{2n} \right] dx. \tag{27}$$

Вычисление такого интеграла Леви и Келлер провели в два этапа: сначала они выполнили замену $x \to \rho = qx$ переменной интегрирования, а затем к полученному интегралу применили известную в курсе математического анализа теорему о среднем. Используя две теоремы, доказанные этими авторами, найдем представления функции $\varepsilon(q)$ во всех возможных случаях.

Случай 1. Пусть $\beta > 2\lambda+3$, но $\beta \neq 4, 6, 8, \ldots$ Тогда число ν согласно формулам (22) равно целой части числа $(2\lambda + 3 - \beta)/2$, а равенство (27) порождает представление

$$\varepsilon(q) = \alpha\, q^{\beta-2} \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho^\beta} \left[j_\lambda^2(\rho) - \frac{a_\lambda}{\tau_\lambda} \rho^{2\lambda+2} \sum_{n=0}^{\nu} A_n \rho^{2n} \right]. \tag{28}$$

Случай 2. Пусть $\beta > 2\lambda + 3$ и $\beta = 4, 6, 8, \ldots$ Тогда по определению (22) число ν равно целой части числа $(2\lambda + 1 - \beta)/2$, а из равенства (27) следует формула

$$\varepsilon(q) = -\alpha\, q^{\beta-2} \ln q\, A_n, \quad n = \nu + 1 = (2\lambda + 3 - \beta)/2. \tag{29}$$

Случай 3. Предположим, что $\beta = 2\lambda + 3$. Тогда $\nu = -1$, и в равенстве (27) сумма с верхним пределом ν полагается равной нулю. Поэтому

$$\varepsilon(q) = -\alpha\, \frac{a_\lambda}{\tau_\lambda}\, q^{\beta-2} \ln q\, A_0 = -\alpha\, q^{2\lambda+1} \ln q\, \frac{\pi}{2}\, \frac{1}{[(2\lambda+1)!!]^2}. \tag{30}$$

Случай 4. Рассмотрим оставшийся случай. Пусть теперь $\beta < 2\lambda+3$. Отметим, что по определению $\beta > 2$. Поэтому при $\lambda = -1/2$ неравенство $\beta < 2\lambda+3$ не выполняется. Так как теперь $\nu < 0$, то в интеграле (27) сумму с верхним пределом ν следует положить равной нулю. Тогда получится табличный интеграл, который выражается через гамма-функцию Γ:

$$\varepsilon(q) = \alpha\, q^{\beta-2} \int_0^\infty j_\lambda^2\, \frac{d\rho}{\rho^\beta} = \alpha\, q^{\beta-2}\, \frac{\pi}{2^\beta}\, \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma^2(\beta/2)}\, \frac{\Gamma(\lambda + 3/2 - \beta/2)}{\Gamma(\lambda + 1/2 + \beta/2)}. \tag{31}$$

Согласно полученным представлениям (28)–(31) при $q \to 0$ функция $\varepsilon(q)$ убывает быстрее функции $q^{2\nu}$, но медленнее функции $q^{2\nu+2}$.

В силу этого факта и равенств (5), (7) и (23) имеет место явное низкоэнергетическое приближение

$$\operatorname{tg}\delta_\lambda(q) = -\frac{S(\infty,q)}{1-h(q)S(\infty,q)} - \frac{\varepsilon(q)}{\left[\,1-h(q)S(\infty,q)\,\right]^2} + \eta_\lambda(q). \tag{32}$$

Для остаточного слагаемого $\eta_\lambda(q)$ этого приближения верны следующие оценки: если $2\lambda=-1$ и $S(\infty,q)\neq 0$, то

$$\eta_\lambda(q) = O\left(\varepsilon^2(q)h^{-2}(q)\right), \quad q\to 0;$$

а в случае $2\lambda \geqslant 1$ и $S(\infty,q)\neq 0$, как и в случае $2\lambda\geqslant -1$, но $S(\infty,q)\equiv 0$,

$$\eta_\lambda(q) = O\left(\varepsilon^2(q)h(q)\right), \quad q\to 0.$$

Следует отметить, что представления (28)–(31) функции $\varepsilon(q)$, а значит, и соответствующее приближение (32) функций $\operatorname{tg}\delta_\lambda(q)$ зависят от четности показателя β и от того, превышает он сумму $2\lambda+3$ или нет.

Теперь в качестве примеров выведем низкоэнергетические приближения фаз рассеяния в двух физически интересных случаях. Для этого используем формулы (28)–(32).

Пример 1. Пусть $\beta=3$. Как известно, диполь-дипольное взаимодействие двух полярных молекул в пределе больших расстояний x между ними является функцией α/x^β с показателем $\beta=3$ и множителем α, зависящим от угла θ между осями молекул. Исчерпывающий численный анализ амплитуды двумерного рассеяния в системе двух таких молекул при произвольном угле θ впервые выполнен в работе [12]. Дополним этот анализ явными низкоэнергетическими асимптотиками фаз рассеяния в случае фиксированного угла θ. Для этого в формулах (28) и (31) положим $\beta=3$.

Пусть $2\lambda=-1$. Тогда $a_\lambda=1$, $\tau_\lambda=2/\pi$, а неравенство $2\nu+2\lambda+3-\beta<0$ выполняется только при $\nu=0$. Поэтому сумма $S(\infty,q)$ содержит одно слагаемое, $S(\infty,q)=\tau_\lambda^{-1}L_0(\infty)=a$, интеграл (28) вычисляется по формулам

$$\varepsilon(q)=\alpha q\, z, \quad z\equiv\int\limits_0^\infty \frac{d\rho}{\rho^3}\left[j_\lambda^2(\rho)-\frac{\pi}{2}\,\rho\right],$$

а из равенства (32) следует явное низкоэнергетическое приближение

$$\operatorname{tg}\delta_\lambda(q) = -\frac{a}{1-ah(q)} - \alpha q\,\frac{z}{[1-ah(q)]^2} + O(q^2\,h^{-2}(q)).$$

Теперь пусть $2\lambda\geqslant 1$. Тогда $\beta<2\lambda+3$, $S(\infty,q)\equiv 0$ и имеет место формула (31). Из нее и следует искомое низкоэнергетическое приближение

$$\operatorname{tg}\delta_\lambda(q) = -\alpha q\,\frac{1}{2\lambda(2\lambda+1)} + O(q^2\,h(q)).$$

Пример 2. Пусть $\beta=4$. Тогда потенциал $V(x)$ при больших x имеет асимптотику поляризационного потенциала. Чтобы найти приближения фаз рассеяния таким потенциалом, используем формулы (29)–(32), в которых положим $\beta=4$.

Пусть $2\lambda = -1$. Тогда число ν равно нулю. Следовательно, $S(\infty, q) = a$, а функция ε задана формулой (29), в которой $A_n = A_1 = -1/2$. Поэтому равенство (32) становится явным низкоэнергетическим приближением

$$\operatorname{tg}\delta_\lambda(q) = -\frac{a}{1 - ah(q)} - \frac{\alpha}{2}\,\frac{q^2}{[1 - ah(q)]^2}\,\ln q + O\left(q^4 \ln^2 q h^{-2}(q)\right).$$

Если $2\lambda = 1$, то выполняется равенство $\beta = 2\lambda{+}3$. В этом случае $S(\infty, q) \equiv 0$, $a_\lambda = 1/2$, $\tau = 4/\pi$, а функция $\varepsilon(q)$ определена равенством (30). Поэтому приближение (32) принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg}\delta_\lambda(q) = \alpha\,\frac{\pi}{8}\,q^2\,\ln q + O\left(q^4 \ln^2 q h(q)\right).$$

Пусть теперь $2\lambda \geqslant 3$. Тогда $\beta < 2\lambda + 3$, $S(\infty, q) \equiv 0$ и верно равенство (31). Оно и формула (32) порождают явное низкоэнергетическое приближение

$$\operatorname{tg}\delta_\lambda(q) = -\alpha q^2\,\frac{\pi}{(4\lambda^2 - 1)(2\lambda + 3)} + O(q^4\,h(q)).$$

Завершим настоящий раздел важными замечаниями.

Ранее низкоэнергетические представления фаз исследовались в работе [7]. В ней исходной была система двух уравнений (21), и поэтому вывод низкоэнергетических приближений фаз рассеяния оказался слишком громоздким и сложным по сравнению с подходом, предложенным в настоящем разделе.

Согласно формулам (28)–(32) все фазы рассеяния $\delta_\lambda(q)$ потенциалом со степенным «хвостом» $\alpha x^{-\beta}$ и показателем $\beta > 2$ стремятся к нулю в пределе $q \to 0$.

К сожалению, реализованный в настоящем разделе метод построения низкоэнергетических приближений фаз $\delta_\lambda(q)$ нельзя обобщить на случай степенного потенциала с показателем $\beta < 2$. В этом случае можно воспользоваться другим асимптотическим методом, предложенным в работах [9] и [10].

В этих работах исследовалось движение медленной квантовой частицы в поле степенного потенциала $\alpha x^{-\beta}$ с показателем $\beta \in (1, 2)$. В результате впервые были получены явные низкоэнергетические приближения всех фаз рассеяния и простое приближение для энергий слабосвязанных состояний.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты настоящей работы заключаются в выводе и анализе рекуррентной цепочки уравнений (10)–(17) для компонент L_n и построении явных низкоэнергетических приближений (20) и (32) для тангенсов фаз рассеяния коротко- и дальнодействующим потенциалами. Представления таких приближений через функции $L_n(x)$ и $\varepsilon(q)$ получены впервые. Вычисление этих функций по формулам (10)–(18) и (28)–(31) не вызывает принципиальных затруднений.

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабиков В. В.* Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
2. *Пупышев В. В.* Рассеяние медленной квантовой частицы аксиально-симметричным короткодействующим потенциалом // ЯФ. 2014. Т. 77, № 5. С. 699–710.
3. *Пупышев В. В.* Длина и эффективный радиус двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом // ТМФ. 2014. Т. 180, № 3. С. 342–367.
4. *Пупышев В. В.* Энергии слабосвязанных и околопороговых резонансных состояний квантовой частицы в двумерной плоскости // ТМФ. 2014. Т. 179, № 1. С. 102–122.
5. *Пупышев В. В.* Приближение эффективного радиуса в задаче двумерного рассеяния квантовой частицы центральным короткодействующим потенциалом // ТМФ. 2015. Т. 182, № 2. С. 315–337.
6. *Пупышев В. В.* Метод амплитудных функций в теории двумерного рассеяния // ТМФ. 2017. Т. 191, № 1. С. 34–62.
7. *Пупышев В. В.* Низкоэнергетические асимптотики фаз двумерного рассеяния квантовой частицы центральным дальнодействующим потенциалом // ТМФ. 2021. Т. 207, № 1. С. 72–98.
8. *Levy B. R., Keller J. B.* Low-Energy Expansion of Scattering Phase Shifts for Long-Range Potential // J. Math. Phys. 1963. V. 4, No. 1. P. 54–64.
9. *Пупышев В. В.* Двумерное движение медленной квантовой частицы в поле центрального дальнодейстующего потенциала // ТМФ. 2019. Т. 199, № 3. С. 405–428.
10. *Пупышев В. В.* Правило квантования Бора–Зоммерфельда в случае двумерного движения квантовой частицы в поле убывающего степенного потенциала // ЭЧАЯ. 2020. Т. 51, вып. 4. С. 494–500.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра: Пер. с англ. М.: Наука, 1973.
12. *Koval E. A., Koval O. A., Melezhik V. S.* Anisotropic Quantum Scattering in Two Dimensions // Phys. Rev. A. 2014. V. 89. P. 052710-1–052710-9.

Получено 19 мая 2023 г.