

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ СОСТАВНОГО СТЕРЖНЯ

*Е. Е. Перепёлкин^{а,б}, А. Е. Верхоглядов^б,
И. В. Кушнир^б, М. В. Клименко^а*

^а Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

^б Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассматривается задача о нахождении собственных частот и собственных функций тепловыделяющего элемента (твэла) ядерного реактора. В качестве модели твэла используется стержень с кусочно-постоянной плотностью материала в продольном направлении. В явном виде найдено частотное уравнение, численно-аналитическим методом определены собственные частоты первых 12 гармоник. Получены аналитические выражения для собственных функций, дающие хорошее совпадение с расчетами по методу Галёркина и численными расчетами в среде ANSYS. Полученные результаты будут использованы для моделирования динамики импульсного реактора НЕПТУН с целью исследования стабильности его работы.

The problem of finding the natural frequencies and eigenfunctions of the fuel element (fuel rod) of a nuclear reactor is considered. A rod with a piecewise constant material density in the longitudinal direction is used as a model. The frequency equation is explicitly obtained, the natural frequencies of the first 12 harmonics are determined numerically and analytically. Analytical expressions for eigenfunctions are obtained, which give a good match with calculations using the Galerkin method and numerical calculations in the ANSYS program. The results will be used to simulate the dynamics of the NEPTUNE pulsed reactor for the purpose of research of the stability of its operation.

PACS: 28.41.Qb; 28.50.Dg

ВВЕДЕНИЕ

В Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ проектируется будущий реактор НЕПТУН с ядерным топливом на основе нептуния [1–3]. В процессе работы над концептуальным проектом реактора был обнаружен феномен *динамического изгиба твэла* — особенность динамики пульсирующих реакторов, не проявляющая себя в реакторах другого типа, но играющая значительную роль в оценке устойчивой работы реактора. Движения тепловыделяющих элементов (твэлов) под действием периодически изменяющейся температуры могут приводить к сильным изменениям реактивности и колебаниям мощности реактора.

Твэл имеет вид стержня длиной около 1 м с тонкостенной стальной оболочкой. Внутри находится ядерное топливо, а также прочие элементы конструкции. В момент импульса мощности реактора топливо разогревается и передает тепло оболочке (стенка трубки). Температура оболочки повышается на несколько градусов в течение 20 мс.

Поскольку внутри активной зоны существует градиент энерговыделения [4], оболочка нагревается по-разному с разных сторон твэла, что и приводит к деформациям.

Для точного моделирования работы реактора необходимо знать форму твэла в момент очередного импульса мощности [5, 6]. Попытки решения данной динамической задачи термоупругости численными методами (методом конечных элементов, численным интегрированием уравнения движения) показали, что для получения приемлемых результатов требуется слишком большое время вычисления. В связи с этим появилась идея найти аналитическое решение уравнения движения твэла и вычислять его форму только в моменты импульсов. Одним из этапов решения задачи эволюции твэла является нахождение его собственных частот и форм колебаний. Твэл имеет неоднородное распределение массы по длине, поэтому вычисление собственных форм и частот является нестандартной задачей.

В последние десятилетия поперечным колебаниям неоднородных стержней (балок) было посвящено большое количество публикаций [7–11]. Отличительная черта уравнений движения таких систем состоит в том, что они представляют собой линейные дифференциальные уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами. Поперечные колебания неоднородных балок представляют интерес для многочисленных исследователей вследствие их значимости для строительства и машиностроения. Как правило, в этих работах приводятся либо аналитические, либо приближенные решения для специфического типа (класса) конструкции стержня. Это, например, конические балки, балки с экспоненциально сужающимся сечением, ступенчатые балки или балки с переменной жесткостью — в каждом случае разрабатываются особые методы решения.

В данной работе рассматривается упругий стержень с постоянной жесткостью и неравномерно распределенной массой. Собственные частоты и формы стержня находятся аналитическим методом, а также методом Галёркина. Для проверки точности результаты сравниваются с численным расчетом в программном комплексе ANSYS. Обсуждаются перспективы использования полученных результатов в исследовании динамики реактора НЕПТУН.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Твэл (рис. 1) представляет собой стальную трубку диаметром 17 мм и длиной 1 м. Толщина стенки — 0,45 мм. Внутри трубки находится столб таблеток ядерного топлива высотой 440 мм (заштрихованная область на рис. 1), никелевые отражатели высотой 150 мм каждый и газовая полость. Твэл жестко закреплен с конца, ближнего к топливным таблеткам (левый конец на рис. 1), и имеет ограниченную свободу перемещения на противоположном конце.

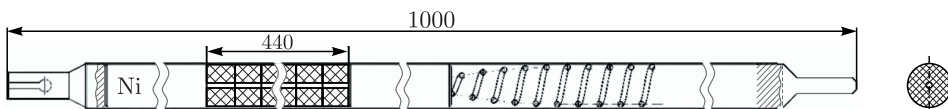


Рис. 1. Твэл реактора НЕПТУН (проект)

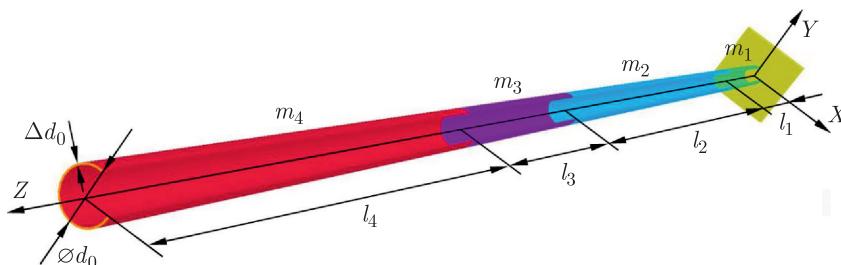


Рис. 2. Геометрическая модель четырехсоставного твэла

Параметры модели твэла

Часть	l_j , см	m_j , г	ρ_j , г/см ³	E_j , ГПа	S_j , см ²
1	15	286	81,492	200	0,234
2	44	1188	115,399		
3	15	286	81,492		
4	26	49	8,055		

Поскольку температурные и упругие поперечные деформации определяются, в основном, стальной оболочкой твэла, для расчетов была принята следующая модель. Рассмотрим четырехсоставной стержень (рис. 2) длины L . Значения величин m_j , l_j , $j = 1, \dots, 4$, указанных на рис. 2, приведены в таблице. Стержень имеет форму трубки постоянного диаметра 17 мм и постоянной толщины 0,45 мм, жестко закрепленной у основания. В таблице также приведены значения модуля Юнга E_j , площадей сечения S_j и плотностей $\rho_j = m_j / (S_j l_j)$. Геометрический момент инерции сечения трубки $J_j = (\pi/4)(R_2^4 - R_1^4)$, где R_1 , R_2 — внутренний и внешний радиусы трубки соответственно.

Ставится задача о нахождении собственных частот поперечных колебаний стержня без учета внешних сил, таких как трение и тепловое расширение. Координатная область Ω , в которой рассматривается задача, состоит из четырех подобластей $\Omega = \bigcup_{j=1}^4 \Omega_j$, где

$$\Omega_1 = \{0 \leq z < z_1\}, \quad \Omega_2 = \{z_1 \leq z < z_2\}, \quad \Omega_3 = \{z_2 \leq z < z_3\}, \quad \Omega_4 = \{z_3 \leq z < L\},$$

$$z_1 = l_1, \quad z_2 = z_1 + l_2, \quad z_3 = z_2 + l_3, \quad z_4 = L.$$

Уравнение поперечных колебаний для функции $u(z, t) = u_j(z, t)$, $z \in \Omega_j$ представимо в виде системы [12]:

$$a_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u_j}{\partial z^4} = 0, \quad a_j = \frac{\rho_j S_j}{E_j J_j}, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$u_1(0, t) = 0, \quad u_1(z_1, t) = u_2(z_1, t), \quad u_2(z_2, t) = u_3(z_2, t), \quad u_3(z_3, t) = u_4(z_3, t),$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u_1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{z=z_1} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{z=z_1},$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{z=z_2} = \frac{\partial u_3}{\partial t} \Big|_{z=z_2}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial t} \Big|_{z=z_3} = \frac{\partial u_4}{\partial t} \Big|_{z=z_3}, \\
& \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=z_1}, \quad E_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \Big|_{z=z_1} = E_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \Big|_{z=z_1}, \quad E_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial z^3} \Big|_{z=z_1} = E_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial z^3} \Big|_{z=z_1}, \\
& \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = \frac{\partial u_3}{\partial z} \Big|_{z=z_2}, \quad E_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \Big|_{z=z_2} = E_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \Big|_{z=z_2}, \quad E_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial z^3} \Big|_{z=z_2} = E_3 \frac{\partial^3 u_3}{\partial z^3} \Big|_{z=z_2}, \\
& \frac{\partial u_3}{\partial z} \Big|_{z=z_3} = \frac{\partial u_4}{\partial z} \Big|_{z=z_3}, \quad E_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} \Big|_{z=z_3} = E_4 \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} \Big|_{z=z_3}, \quad E_3 \frac{\partial^3 u_3}{\partial z^3} \Big|_{z=z_3} = E_4 \frac{\partial^3 u_4}{\partial z^3} \Big|_{z=z_3}, \\
& \frac{\partial^2 u_4}{\partial z^2} \Big|_{z=L} = \frac{\partial^3 u_4}{\partial z^3} \Big|_{z=L} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Группа краевых условий (2) определяет непрерывность функции смещения u и скорости $\partial u/\partial t$, равенство углов поворота, изгибающих моментов и перерезывающих сил в точках z_1 , z_2 и z_3 . Задано условие жесткого закрепления одного конца стержня при $z = 0$ и условие незакрепленного другого конца при $z = L$. Таким образом, выражения (1), (2) определяют постановку задачи.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Решение задачи (1), (2) будем искать в факторизованном виде $u_j(z, t) = Z_j(z)T(t)$. В результате уравнение (1) примет вид

$$\frac{T''}{T} = -\frac{Z_j^{(4)}}{a_j Z_j} = -\omega^2 = \text{const} \iff \begin{cases} T'' + \omega^2 T = 0, \\ Z_j^{(4)} - \omega^2 a_j Z_j = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Временная функция $T(t)$ не связана с пространственными координатами, соответственно величина ω , определяющая собственные частоты системы, должна быть единая для всего стержня (во всей координатной области Ω).

Первое уравнение (3) для функции $T(t)$ имеет решение

$$T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t),$$

где A, B — постоянные величины. Для нахождения собственных частот ω необходимо решение второго уравнения системы (3) с граничными условиями (2):

$$\begin{aligned}
& Z_1(0) = Z_1'(0) = 0, \quad Z_1(z_1) = Z_2(z_1), \quad Z_2(z_2) = Z_3(z_2), \quad Z_3(z_3) = Z_4(z_3), \\
& Z_1'(z_1) = Z_2'(z_1), \quad Z_2'(z_2) = Z_3'(z_2), \quad Z_3'(z_3) = Z_4'(z_3), \\
& E_1 Z_1''(z_1) = E_2 Z_2''(z_1), \quad E_2 Z_2''(z_2) = E_3 Z_3''(z_2), \quad E_3 Z_3''(z_3) = E_4 Z_4''(z_3), \\
& E_1 Z_1'''(z_1) = E_2 Z_2'''(z_1), \quad E_2 Z_2'''(z_2) = E_3 Z_3'''(z_2), \quad E_3 Z_3'''(z_3) = E_4 Z_4'''(z_3), \\
& Z_4''(L) = Z_4'''(L) = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Решение второго уравнения системы (3) представимо в виде суперпозиции функций А. Н. Крылова K_s , $s = 1, \dots, 4$ [12]:

$$\begin{aligned} K_1(\bar{z}) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \bar{z} + \cos \bar{z}), & K_2(\bar{z}) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \bar{z} + \sin \bar{z}), \\ K_3(\bar{z}) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \bar{z} - \cos \bar{z}), & K_4(\bar{z}) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \bar{z} - \sin \bar{z}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} K_1(\bar{z}) &= K_2'(\bar{z}) = K_3''(\bar{z}) = K_4'''(\bar{z}) = K_1^{(4)}(\bar{z}), & K_1'(\bar{z}) &= K_1(\bar{z}), \\ K_1(0) &= 1, & K_2(0) &= K_3(0) = K_4(0) = 0, & \bar{z} &= z/L. \end{aligned}$$

Линейная комбинация функций (5) удовлетворяет второму уравнению из системы (3) с $\alpha_j^4 = \omega^2 L^4 a_j$:

$$W_j(\bar{z}) = \sum_{s=1}^4 C_{s,j} K_s(\alpha_j \bar{z}), \quad (6)$$

где $C_{s,j}$ — постоянные коэффициенты. Подстановка функции (6) в граничные условия (4) с учетом свойств (5) дает спектры положительных собственных значений $\alpha_{j,l}^4$, $l \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, 4$, и набор собственных функций $W_{j,l}(\bar{z}) = W_j(\alpha_{j,l} \bar{z})$. В результате справедлива следующая система из 14 уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 K_3(\alpha_1 \bar{z}_1) + c_2 K_4(\alpha_1 \bar{z}_1) - c_3 K_1(\alpha_2 \bar{z}_1) - c_4 K_2(\alpha_2 \bar{z}_1) - c_5 K_3(\alpha_2 \bar{z}_1) - \\ - c_6 K_4(\alpha_2 \bar{z}_1) &= 0, \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} [c_1 K_2(\alpha_1 \bar{z}_1) + c_2 K_3(\alpha_1 \bar{z}_1)] - c_3 K_4(\alpha_2 \bar{z}_1) - c_4 K_1(\alpha_2 \bar{z}_1) - c_5 K_2(\alpha_2 \bar{z}_1) - \\ - c_6 K_3(\alpha_2 \bar{z}_1) &= 0, \\ \frac{E_1 \alpha_1^2}{E_2 \alpha_2^2} [c_1 K_1(\alpha_1 \bar{z}_1) + c_2 K_2(\alpha_1 \bar{z}_1)] - c_3 K_3(\alpha_2 \bar{z}_1) - c_4 K_4(\alpha_2 \bar{z}_1) - c_5 K_1(\alpha_2 \bar{z}_1) - \\ - c_6 K_2(\alpha_2 \bar{z}_1) &= 0, \\ \frac{E_1 \alpha_1^3}{E_2 \alpha_2^3} [c_1 K_4(\alpha_1 \bar{z}_1) + c_2 K_1(\alpha_1 \bar{z}_1)] - c_3 K_2(\alpha_2 \bar{z}_1) - c_4 K_3(\alpha_2 \bar{z}_1) - c_5 K_4(\alpha_2 \bar{z}_1) - \\ - c_6 K_1(\alpha_2 \bar{z}_1) &= 0, \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_3} [c_3 K_4(\alpha_2 \bar{z}_2) + c_4 K_1(\alpha_2 \bar{z}_2) + c_5 K_2(\alpha_2 \bar{z}_2) + c_6 K_3(\alpha_2 \bar{z}_2)] - c_7 K_4(\alpha_3 \bar{z}_2) - \\ - c_8 K_1(\alpha_3 \bar{z}_2) - c_9 K_2(\alpha_3 \bar{z}_2) - c_{10} K_3(\alpha_3 \bar{z}_2) &= 0, \\ \frac{E_2 \alpha_2^2}{E_3 \alpha_3^2} [c_3 K_3(\alpha_2 \bar{z}_2) + c_4 K_4(\alpha_2 \bar{z}_2) + c_5 K_1(\alpha_2 \bar{z}_2) + c_6 K_2(\alpha_2 \bar{z}_2)] - c_7 K_3(\alpha_3 \bar{z}_2) - \\ - c_8 K_4(\alpha_3 \bar{z}_2) - c_9 K_1(\alpha_3 \bar{z}_2) - c_{10} K_2(\alpha_3 \bar{z}_2) &= 0, \\ \frac{E_2 \alpha_2^3}{E_3 \alpha_3^3} [c_3 K_2(\alpha_2 \bar{z}_2) + c_4 K_3(\alpha_2 \bar{z}_2) + c_5 K_4(\alpha_2 \bar{z}_2) + c_6 K_1(\alpha_2 \bar{z}_2)] - c_7 K_2(\alpha_3 \bar{z}_2) - \\ - c_8 K_3(\alpha_3 \bar{z}_2) - c_9 K_4(\alpha_3 \bar{z}_2) - c_{10} K_1(\alpha_3 \bar{z}_2) &= 0, \\ c_3 K_1(\alpha_2 \bar{z}_2) + c_4 K_2(\alpha_2 \bar{z}_2) + c_5 K_3(\alpha_2 \bar{z}_2) + c_6 K_4(\alpha_2 \bar{z}_2) - c_7 K_1(\alpha_3 \bar{z}_2) - \\ - c_8 K_2(\alpha_3 \bar{z}_2) - c_9 K_3(\alpha_3 \bar{z}_2) - c_{10} K_4(\alpha_3 \bar{z}_2) &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_4} [c_7 K_4(\alpha_3 \bar{z}_3) + c_8 K_1(\alpha_3 \bar{z}_3) + c_9 K_2(\alpha_3 \bar{z}_3) + c_{10} K_3(\alpha_3 \bar{z}_3)] - c_{11} K_4(\alpha_4 \bar{z}_3) - \\ - c_{12} K_1(\alpha_4 \bar{z}_3) - c_{13} K_2(\alpha_4 \bar{z}_3) - c_{14} K_3(\alpha_4 \bar{z}_3) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{E_3 \alpha_3^2}{E_4 \alpha_4^2} [c_7 K_3(\alpha_3 \bar{z}_3) + c_8 K_4(\alpha_3 \bar{z}_3) + c_9 K_1(\alpha_3 \bar{z}_3) + c_{10} K_2(\alpha_3 \bar{z}_3)] - c_{11} K_3(\alpha_4 \bar{z}_3) - \\ - c_{12} K_4(\alpha_4 \bar{z}_3) - c_{13} K_1(\alpha_4 \bar{z}_3) - c_{14} K_2(\alpha_4 \bar{z}_3) = 0,$$

$$\frac{E_3 \alpha_3^3}{E_4 \alpha_4^3} [c_7 K_2(\alpha_3 \bar{z}_3) + c_8 K_3(\alpha_3 \bar{z}_3) + c_9 K_4(\alpha_3 \bar{z}_3) + c_{10} K_1(\alpha_3 \bar{z}_3)] - c_{11} K_2(\alpha_4 \bar{z}_3) - \\ - c_{12} K_3(\alpha_4 \bar{z}_3) - c_{13} K_4(\alpha_4 \bar{z}_3) - c_{14} K_1(\alpha_4 \bar{z}_3) = 0,$$

$$c_7 K_1(\alpha_3 \bar{z}_3) + c_8 K_2(\alpha_3 \bar{z}_3) + c_9 K_3(\alpha_3 \bar{z}_3) + c_{10} K_4(\alpha_3 \bar{z}_3) - c_{11} K_1(\alpha_4 \bar{z}_3) - \\ - c_{12} K_2(\alpha_4 \bar{z}_3) - c_{13} K_3(\alpha_4 \bar{z}_3) - c_{14} K_4(\alpha_4 \bar{z}_3) = 0,$$

$$c_{11} K_3(\alpha_4) + c_{12} K_4(\alpha_4) + c_{13} K_1(\alpha_4) + c_{14} K_2(\alpha_4) = 0,$$

$$c_{11} K_2(\alpha_4) + c_{12} K_3(\alpha_4) + c_{13} K_4(\alpha_4) + c_{14} K_1(\alpha_4) = 0.$$

В системе из 14 уравнений присутствуют 14 коэффициентов c_n , $n = 1, \dots, 14$, связанных с коэффициентами $C_{s,j}$ из представления (6) соотношениями

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & C_{3,1} & C_{4,1} \\ C_{1,2} & C_{2,2} & C_{3,2} & C_{4,2} \\ C_{1,3} & C_{2,3} & C_{3,3} & C_{4,3} \\ C_{1,4} & C_{2,4} & C_{3,4} & C_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (7) является однородной и допускает запись $\Lambda \mathbf{c} = 0$, где $\mathbf{c} = \{c_1, \dots, c_{14}\}^T$. Поскольку все элементы матрицы Λ зависят лишь от одной переменной ω , то, исключая тривиальное решение $\mathbf{c} = 0$, приходим к частотному уравнению:

$$\det \Lambda(\omega) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) является трансцендентным и имеет бесконечное множество корней ω_l , $l \in N$, соответствующих собственным частотам составного стержня. Зная собственные частоты, можно построить собственные функции $W_{j,l}(\bar{z})$. Для соблюдения нормировки собственные функции следует переопределить как

$$W_{j,l}(\bar{z}) = \frac{W_{j,l}(\bar{z})}{\|W_{j,l}\|_{L_2[0,1]}},$$

где $\| \cdot \|_{L_2[0,1]}$ — норма в пространстве L_2 . В силу граничных условий (4) на границе областей Ω_j функции $W_{j,l}$ будут непрерывно-дифференцируемыми.

МЕТОД ГАЛЁРКИНА

Задача о нахождении собственных частот и собственных функций стержня без учета внешних сил может быть приближенно решена методом Галёркина [13]. Рассмотрим уравнение поперечных колебаний для функции $u(z, t)$:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = 0, \quad a = \frac{\rho S}{EJ} = a(z), \quad (9)$$

где функция $a(z)$ определена на отрезке $z \in [0, L]$. Краевые условия в таком случае задаются лишь на концах стержня:

$$\begin{aligned} u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{z=0} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Big|_{z=L} = \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \Big|_{z=L} = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Физический смысл краевых условий был описан в предыдущем разделе. Методом разделения переменных $u(z, t) = Z(z)T(t)$ уравнение (9) сводится к системе

$$\begin{cases} T'' + \omega^2 T = 0, \\ Z^{(4)} - \omega^2 a Z = 0, \end{cases} \tag{11}$$

где $\omega = \text{const}$. Рассмотрим второе уравнение системы (11), заменив функцию $a(z)$ на константу $a \rightarrow a_0 = (1/L) \int_0^L a(z) dz = \text{const}$,

$$F^{(4)} - \hat{\omega}^2 a_0 F = 0. \tag{12}$$

Такое уравнение, записанное для однородного по длине стержня с краевыми условиями (10), имеет точное аналитическое решение [14] в виде набора параметров α_k и функций $F_k(z)$ ($k \in N$):

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 1,875104 \dots, \quad F_1(z) &\approx \text{ch}(\alpha_1 z/L) - \cos(\alpha_1 z/L) - \\ &\quad - 0,7341(\text{sh}(\alpha_1 z/L) - \sin(\alpha_1 z/L)), \\ \alpha_2 = 4,694091 \dots, \quad F_2(z) &\approx \text{ch}(\alpha_2 z/L) - \cos(\alpha_2 z/L) - \\ &\quad - 1,01847(\text{sh}(\alpha_2 z/L) - \sin(\alpha_2 z/L)), \\ \alpha_3 = 7,854757 \dots, \quad F_3(z) &\approx \text{ch}(\alpha_3 z/L) - \cos(\alpha_3 z/L) - \\ &\quad - 0,99922(\text{sh}(\alpha_3 z/L) - \sin(\alpha_3 z/L)), \\ \alpha_4 = 10,99554 \dots, \quad F_4(z) &\approx \text{ch}(\alpha_4 z/L) - \cos(\alpha_4 z/L) - \\ &\quad - 1,00003(\text{sh}(\alpha_4 z/L) - \sin(\alpha_4 z/L)), \\ \alpha_{k \gg 1} &\approx \pi \left(k - \frac{1}{2} \right), \quad F_{k \gg 1}(z) \approx e^{-\alpha_k z} - \cos(\alpha_k z/L) + \sin(\alpha_k z/L) - \\ &\quad - e^{\alpha_k (z-L)} [e^{-\alpha_k} + (-1)^k]. \end{aligned}$$

Функции $F_k(z)$ обладают свойством ортогональности в пространстве $L_2[0, L]$ с нормой функций $F_k(z)$, равной единице, а также удовлетворяют уравнению (12) при $\hat{\omega}_k = \alpha_k^2 / \sqrt{a_0}$:

$$\begin{aligned} (F_k, F_k) = \|F_k\|_{L_2[0, L]}^2 &= \int_0^L F_k^2(z) dz = 1, \\ (F_k, F_n) = \int_0^L F_k(z) F_n(z) dx &= \|F_k\|_{L_2[0, L]}^2 \delta_{k, n} = \delta_{k, n}, \quad F_k^{(4)} = \alpha_k^4 F_k, \end{aligned} \tag{13}$$

где $\delta_{k, n}$ — дельта-символ Кронекера.

Используем первые n функций $F_k(z)$ в качестве базисных функций в методе Галёркина. Представим искомую функцию $Z(z)$ в виде линейной комбинации функций $F_k(z)$:

$$Z(z) = \sum_{k=1}^n z_k F_k(z), \quad z_k = \int_0^L Z(z) F_k(z) dz.$$

Тогда второе уравнение из системы (11), с учетом свойств (13), можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^4 z_k F_k(z) = \omega^2 \sum_{k=1}^n z_k a(z) F_k(z). \quad (14)$$

Если умножить обе части уравнения (14) на $F_j(z)$ и проинтегрировать по всей координатной области, то благодаря ортогональности базисных функций получается набор из n линейных уравнений:

$$\alpha_j^4 z_j = \omega^2 \sum_{k=1}^n z_k a_{kj}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (15)$$

$$a_{kj} = a_{jk} = \int_0^L a(z) F_k(z) F_j(z) dz.$$

Поскольку уравнения (15) содержат n неизвестных z_k и еще не известное ω , то для их нахождения требуется добавить еще одно условие. Этим условием служит требование нормировки функции $Z(z)$:

$$\|Z\|_{L_2[0,L]}^2 = \int_0^L \left(\sum_{k=1}^n z_k F_k(z) \right)^2 dz = \sum_{k=1}^n z_k^2 = 1. \quad (16)$$

Уравнения (15) образуют однородную систему линейных уравнений, которая допускает запись $H\mathbf{z} = 0$, где $\mathbf{z} = \{z_1, \dots, z_n\}^T$. Поскольку все элементы матрицы H зависят лишь от одной переменной ω , то, исключая тривиальное решение $\mathbf{z} = 0$, приходим к частотному уравнению:

$$\det H(\omega) = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) имеет n корней ω_l , $l = 1, \dots, n$, соответствующих собственным частотам стержня. Зная собственные частоты, можно найти коэффициенты z_k и тем самым построить собственные функции $Z_j(z)$. Благодаря условию (16) коэффициенты z_k находятся однозначно, а собственные функции $Z_j(z)$ будут нормированы на единицу.

Данный метод является приближенным, и точность определения ω_l и $Z_j(z)$ зависит от количества базисных функций n . Исходя из опыта для достаточно точного нахождения первых N собственных функций количество базисных функций n должно быть больше N в несколько раз.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И СРАВНЕНИЕ С ANSYS

Изложенные выше методы позволяют найти первые 10–12 собственных частот и собственных функций (форм) неоднородного стержня. При нахождении более высоких гармоник появляются трудности, связанные с численными расчетами. Для практических целей (моделирование динамики ядерного реактора) вполне достаточно знать первые 5–7 гармоник. В расчетах по методу Галёркина использовалось 20 базисных функций.

Для оценки точности полученных результатов были проведены численные расчеты в программном комплексе ANSYS. На рис. 3 представлены значения первых 12 собственных частот.

Видно, что аналитический метод расчета дает результаты, более близкие к численному моделированию (ANSYS), чем метод Галёркина. Это можно объяснить конечным набором базисных функций в методе Галёркина, что сказывается при больших l .

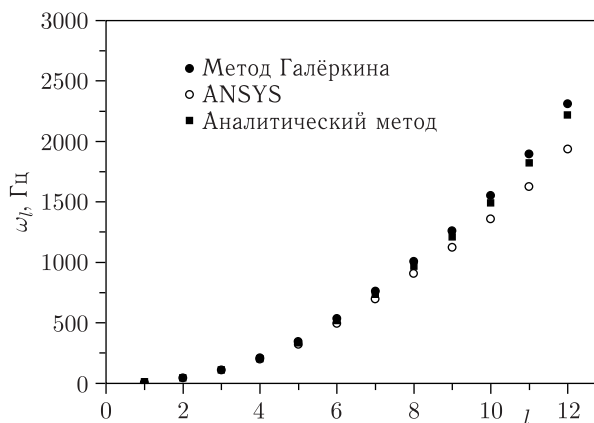


Рис. 3. Собственные частоты четырехсоставного твэла

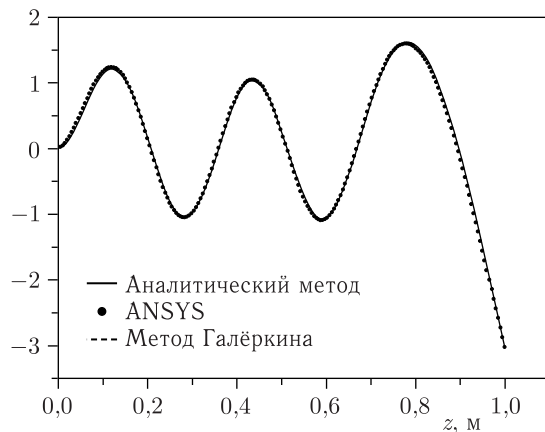


Рис. 4. Собственная функция четырехсоставного твэла при $l = 6$

Тем не менее первые пять собственных частот, найденные тремя разными методами, практически совпадают. Это дает основания для использования полученных значений в поставленных прикладных задачах.

Первые 12 собственных функций найдены всеми тремя методами и показывают хорошее совпадение друг с другом. Для примера на рис. 4 приведены результаты расчета шестой собственной функции ($l = 6$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Собственные частоты и собственные функции неоднородного по длине упругого стержня были найдены численно-аналитическим методом путем решения частотного уравнения (8), методом Галёркина (17) и с использованием программного комплекса ANSYS. Результаты всех трех методов хорошо согласуются друг с другом для первых шести гармоник.

Сравнивая аналитический метод с методом Галёркина, следует отметить преимущество последнего в том, что функция $a(z)$ (распределение массы и жесткости) может быть не только кусочно-постоянной функцией, что позволяет рассчитывать стержни различной конструкции. Недостаток метода Галёркина в его ограниченной точности. Для приемлемых результатов количество базисных функций должно быть в несколько раз больше количества искомых гармоник. Сложность вычислений также повышается при увеличении количества базисных функций.

Полученные данные будут использованы для моделирования динамики импульсного реактора НЕПТУН с целью исследования стабильности его работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шабалин Е. П.* Импульсные реакторы на быстрых нейтронах. М.: Атомиздат, 1976.
2. *Шабалин Е. П., Аксенов В. Л., Комышев Г. Г., Рогов А. Д.* // АЭ. 2018. Т. 124, № 6. С. 309.
3. *Лопаткин А. В., Третьяков И. Т., Романова Н. В., Горячих А. В., Кокорин Н. Д., Попов В. Е., Мороко В. И., Кравцова О. А., Аксенов В. Л., Куликов С. А., Рзянин М. В., Швецов В. Н., Шабалин Е. П.* Концепция нового высокотемпературного импульсного источника нейтронов периодического действия на основе нептуния // АЭ. 2020. Т. 129, вып. 6. С. 226.
4. *Бать Г. А.* Основы теории и методы расчета ядерных энергетических реакторов. М.: Энергоиздат, 1982.
5. *Колесов В. Ф.* Аперриодические импульсные реакторы. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2007.
6. *Колесов В. Ф.* Решения динамических задач термоупругости для полусферической оболочки и стержня // ВАНТ. Физика ядерных реакторов. 2012. Вып. 3. С. 61–71.
7. *Гусев Б. В., Саурин В. В.* О колебаниях неоднородных балок // Инженерный вестн. Дона. 2017. № 3.
8. *Mehmet Cem Ece, Metin Aydogdu, Vedat Taskin.* Vibration of a Variable Cross-Section Beam // Mech. Res. Commun. 2007. V. 34. P. 78–84.
9. *Caruntu D. I.* Exact Solutions for Transverse Vibrations of Beams and Plates of Parabolic Thickness Variation // Proc. of IMECE 2004, Anaheim, California, USA, 2004.
10. *Mirzabeigy A.* Semi-Analytical Approach for Free Vibration Analysis of Variable Cross-Section Beams Resting on Elastic Foundation and under Axial Force // Intern. J. Engin. C. 2014. V. 27, No. 3. P. 385–394.

11. *Chekirou F., Brahim K., Bournine H., Hamouda K., Haddad M., Benkajouh T., Le Bot A.* Analysis of the Vibrational Behavior of a Bolted Beam in the Presence of Friction // *Russ. J. Nonlin. Dynamics.* 2022. V. 18, No. 1. P. 3–18.
12. *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* Сопротивление материалов. М., 1959.
13. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.
14. *Верхоглядов А. Е.* Уравнение плоских вынужденных поперечных колебаний стержня под действием температуры. Численно-аналитическое решение // *Письма в ЭЧАЯ.* 2023. Т. 20, № 4(249). С. 657.

Получено 30 июля 2023 г.