

ВЫЧИСЛЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ЦВЕТОВЫХ ФАКТОРОВ В НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

А. П. Исаев^{а, б, в, 1}, А. А. Проворов^{а, в, 2}

^а Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

^б Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

^в Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия

Метод характеристических тождеств применен к нахождению в неабелевых калибровочных теориях цветовых факторов диаграмм Фейнмана, полученных последовательной склейкой одинаковых кусков. В работе для $SU(N)$ и $SO(N)$ калибровочных теорий вычислены цветовые факторы для лестничных диаграмм с произвольным числом петель, которые описывают рассеяние (посредством обмена глюонами) двух кварков или кварка и антикварка в фундаментальных представлениях $SU(N)$ и $SO(N)$. Для цветовых факторов лестничных диаграмм в глюодинамике получены универсальные выражения (основанные на параметризации Вожеля), справедливые для всех калибровочных простых групп Ли. На основе полученных универсальных формул сформулирована идея универсального аналога $1/N$ -разложения 'т Хофта в случае всех калибровочных простых групп Ли.

In this paper, the method of characteristic identities is applied to calculation of colour factors of Feynman diagrams which are obtained by glueing identical pieces, in non-Abelian gauge theories. For $SU(N)$ and $SO(N)$ gauge theories the colour factors of several ladder diagrams with an arbitrary number of loops have been obtained. These diagrams describe the scatterings (via an exchange of gluons) of a pair of quarks as well as a quark and antiquark pair, in the fundamental representations of the gauge groups mentioned. For colour factors of ladder diagrams in gluodynamics universal expressions (based on the Vogel parametrization) have been acquired. These expressions are valid for all simple gauge Lie groups. Based on the universal formulas obtained, the idea of a universal analogue of the 't Hooft's $1/N$ expansion for all simple gauge Lie groups has been formulated.

PACS: 11.15.–q; 02.20.Tw

ВВЕДЕНИЕ

При вычислениях в неабелевых калибровочных теориях необходимо учитывать цветовые факторы диаграмм Фейнмана в этих теориях. Выражения для цветовых факторов, вообще говоря, зависят от выбора калибровочной группы. Так, для калиб-

¹E-mail: isaevap@theor.jinr.ru

²E-mail: aleksanderprovorov@gmail.com

ровочных групп $SU(N)$ цветовые факторы зависят от N . Как было замечено 'т Хофтом [1], структура $SU(N)$ калибровочной теории при $N \rightarrow \infty$ сильно упрощается. Действительно, в [1] было показано, что в пределе $N \rightarrow \infty$ при вычислении различных амплитуд выживают только планарные диаграммы Фейнмана. Это привело 'т Хофта к идее метода вычислений в квантовой хромодинамике, который называется разложением $1/N$ [1].

Напомним, что метод 'т Хофта, называемый разложением $1/N$, оказался весьма плодотворным. Например, диаграммное разложение в полевых калибровочных теориях показывает, что теории с большими N ведут себя как свободные теории струн со струнной константой связи порядка $1/N$ (см. обзор [2]). Кроме того, в [3] с помощью разложения $1/N$ 'т Хофтом было получено обоснование конфайнмента кварков в двумерной $(1+1)$ теории с калибровочной группой $SU(N)$. Данное разложение также было использовано Э. Виттенем для изучения масс и амплитуд рассеяния барионов [4]. Наконец, этот подход получил применение в исследовании матричных моделей, описывающих двумерную квантовую гравитацию [5]. Обзор достижений в изучении калибровочных теорий $SU(N)$ при больших N содержится в работе [6].

Цветовые факторы в неабелевых калибровочных теориях играют ключевую роль в исследовании так называемой дуальности цветовых и кинематических факторов: выражения для амплитуд рассеяния в этих теориях могут быть записаны таким образом, что кинематические факторы соответствующих диаграмм Фейнмана удовлетворяют тем же алгебраическим соотношениям, что и цветовые (см. обзор [7]). Замена цветовых факторов кинематическими в таком случае переводит амплитуды рассеяния в калибровочных теориях в аналогичные амплитуды в теориях гравитации. Это явление упрощает вычисления в теориях гравитации, а также позволяет сделать предположение о существовании единого математического формализма для описания как калибровочных теорий, так и теорий гравитации.

Отметим также возможный аналог разложения $1/N$ в теории гравитации. Действительно, существуют аргументы [8, 9], указывающие на то, что (квантовая) гравитация упрощается при больших размерностях D пространства-времени.

Данная работа посвящена применению расщепленного оператора Казимира простых алгебр Ли к нахождению цветовых факторов бесконечных наборов диаграмм Фейнмана, строящихся путем последовательной склейки одинаковых кусков, в неабелевых калибровочных теориях. Используемый здесь метод был разработан для изучения подпредставлений тензорных степеней присоединенного представления простых алгебр и супералгебр Ли [10–14] в контексте так называемой универсальной алгебры Ли, введенной П. Вожелем в [15]. Соответственно мы исследуем возможность унифицированного описания неабелевых калибровочных теорий сразу для всех простых калибровочных групп G , что давало бы универсальные выражения для цветовых факторов для всех теорий с калибровочной группой G . Отметим, что имеется довольно обширная литература, посвященная различным методам вычисления цветовых факторов (см., например, [16, 17] и ссылки, приведенные там). Наш метод дополняет известные методы, упомянутые в [16, 17]. Отметим также, что универсальное описание цветовых факторов может оказаться полезным для формулировки аналога разложения $1/N$ в случае калибровочных исключительных групп Ли.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

1.1. Расщепленный оператор Казимира для простых алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли с базисом $\{X_A\}$ и метрикой Картана–Киллинга g_{AB} , где A, B — индексы присоединенного представления алгебры $\mathfrak{g}$, а $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}$. Расщепленный оператор Казимира является элементом алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ и определяется как

$$\hat{C} = \bar{g}^{AB} X_A \otimes X_B, \quad (1)$$

где $\bar{g}^{AB}$ — обратная метрика Картана–Киллинга: $\bar{g}^{AB} g_{BC} = \delta_C^A$. Оператор $\hat{C}$ обладает свойством ад-инвариантности: для произвольных представлений T и T' и произвольного базисного вектора X_A алгебры $\mathfrak{g}$ верно соотношение

$$[T(X_A) \otimes I_{T'} + I_T \otimes T'(X_A), \hat{C}_{T \cdot T'}] = 0, \quad (2)$$

где I_T — единичный оператор в представлении T , а $\hat{C}_{T \cdot T'} := T \otimes T'(\hat{C})$. Для элемента g (в окрестности единичного элемента) группы Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ соотношение (2) эквивалентно инвариантности

$$[T(g) \otimes T'(g), \hat{C}_{T \cdot T'}] = 0.$$

Положим $T = T'$. Оператор $\hat{C}_T := T^{\otimes 2}(\hat{C})$ является диагонализуемым и удовлетворяет тождеству вида

$$(\hat{C}_T - a_{T,1})(\hat{C}_T - a_{T,2}) \cdots (\hat{C}_T - a_{T,k}) = 0, \quad (3)$$

где полином от $\hat{C}_T$ в левой части (3) является минимальным, а числа $a_{T,i}$ исчерпывают все различные собственные значения оператора $\hat{C}_T$. Тождество (3) называется характеристическим тождеством оператора $\hat{C}_T$.

В приложениях удобнее пользоваться симметричной $\hat{C}_{T+}$ и антисимметричной $\hat{C}_{T-}$ частями расщепленного оператора Казимира: $\hat{C}_{T\pm} := (1/2)(I_{T^{\otimes 2}} \pm P_{T^{\otimes 2}})\hat{C}_T$, где $I_{T^{\otimes 2}}$ и $P_{T^{\otimes 2}}$ — единичный оператор и оператор перестановки, действующие в пространстве $V_T^{\otimes 2}$. Операторы $\hat{C}_{T\pm}$ обладают следующими важными свойствами:

$$\hat{C}_{T-} + \hat{C}_{T+} = \hat{C}_T, \quad \hat{C}_{T-}\hat{C}_{T+} = \hat{C}_{T+}\hat{C}_{T-} = 0, \quad P_{T^{\otimes 2}}\hat{C}_{T\pm} = \hat{C}_{T\pm}P_{T^{\otimes 2}} = \pm\hat{C}_{T\pm}. \quad (4)$$

Расщепленный оператор Казимира имеет графическую интерпретацию в терминах диаграмм Фейнмана калибровочной теории поля с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$: компоненты $(C_f)^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$ и $(C_{ad})^{A_1 A_2}_{B_1 B_2}$ расщепленного оператора Казимира в определяющем (минимальном для исключительных алгебр Ли) и присоединенном представлениях этой алгебры совпадают с цветовыми факторами диаграмм, которые изображены на рис. 1.

Введем также следующее обозначение. Пусть оператор A действует в пространстве $V^{\otimes 2}$, где V произвольно, и имеет компоненты $A^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$ (здесь индексы i_1, i_2, j_1, j_2 относятся к пространству V , которое не обязательно совпадает с пространствами определяющего и минимального представлений для классических и исключительных алгебр Ли соответственно). Определим оператор $A_{\alpha\beta} \in \text{End}(V^{\otimes s})$ с компонентами

$$(A_{\alpha\beta})^{i_1 \dots i_s}_{j_1 \dots j_s} = \delta_{j_1}^{i_1} \dots \hat{\delta}_{j_\alpha}^{i_\alpha} \dots \hat{\delta}_{j_\beta}^{i_\beta} \dots \delta_{j_s}^{i_s} A^{i_\alpha i_\beta}_{j_\alpha j_\beta}, \quad (5)$$

Рис. 1. Графическая интерпретация операторов $\hat{C}_f$ и $\hat{C}_{ad}$ простых алгебр Ли

где $\hat{\delta}_j^i$ означает, что из выражения данный множитель исключается. Таким образом, $A_{\alpha\beta}$ действует нетривиально только в тензорных сомножителях пространства $V_N^{\otimes s}$ с номерами α и β .

Далее индексы векторов, лежащих в пространстве V_{ad} присоединенного представления ad , будут обозначаться заглавными буквами $A, B, C, \dots$ из начала латинского алфавита, индексы векторов, лежащих в пространстве V_N , определяющем представлении T_f для классических алгебр Ли $sl_N(\mathbb{C})$ и $so_N(\mathbb{C})$, — строчными буквами $i, j, k, \dots$ из середины латинского алфавита, а индексы векторов пространства $\bar{V}_N$ представления $\bar{T}_f = (T_f^{-1})^T$, контрагredientного к определяющему, обозначаются подчеркнутыми строчными буквами $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}, \dots$ из середины латинского алфавита.

Примем также следующее соглашение: входящие индексы произвольного оператора являются верхними, а исходящие — нижними. Тогда имеется возможность инвариантной свертки по парам из подчеркнутого и неподчеркнутого верхних (или нижних) индексов: $A^{i\underline{i}} := \sum_{i, \underline{j}} \delta_{i\underline{j}} A^{i\underline{j}}$ и $A_{i\underline{i}} := \sum_{i, \underline{j}} \delta^{i\underline{j}} A_{i\underline{j}}$.

1.2. Расщепленный оператор Казимира в представлении $ad^{\otimes 2}$ и параметризация Вожеля. Параметрами Вожеля называются три числа α, β и γ , определенные с точностью до умножения на число и любой перестановки и принимающие определенные значения для каждой простой алгебры Ли, см. таблицу, где $\hat{\alpha} := \alpha/(2t)$, $\hat{\beta} := \beta/(2t)$, $\hat{\gamma} := \gamma/(2t)$ и $t := \alpha + \beta + \gamma$. Эти параметры были введены П. Вожелем в [15] и позволяют выразить многие величины, характеризующие простые алгебры Ли, с помощью универсальных формул, справедливых сразу для всех простых алгебр Ли. Например, универсальная формула для размерности простой алгебры Ли имеет вид [15, 18]

$$\dim \mathfrak{g} = \frac{(\alpha - 2t)(\beta - 2t)(\gamma - 2t)}{\alpha\beta\gamma} = \frac{(\hat{\alpha} - 1)(\hat{\beta} - 1)(\hat{\gamma} - 1)}{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}}. \quad (6)$$

Еще одним проявлением универсальных свойств алгебр Ли является возможность записать в присоединенном представлении характеристические тождества для рас-

Значения параметров Вожеля для простых алгебр Ли

Параметр Вожеля	sl_N	so_N	sp_{2r}	$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_8$
$\hat{\alpha}$	$-1/N$	$-1/(N-2)$	$1/2(r+1)$	$-1/4$	$-1/9$	$-1/12$	$-1/18$	$-1/30$
$\hat{\beta}$	$1/N$	$2/(N-2)$	$-1/(r+1)$	$5/12$	$5/18$	$1/4$	$2/9$	$1/5$
$\hat{\gamma}$	$1/2$	$(N-4)/2(N-2)$	$(r+2)/2(r+1)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

щепленного оператора Казимира (1.1) и его симметризаций в виде [10]

$$\hat{C}_{\text{ad}} \left(\hat{C}_{\text{ad}} + \frac{1}{2} \right) (\hat{C}_{\text{ad}} + 1)(\hat{C}_{\text{ad}} + \hat{\alpha})(\hat{C}_{\text{ad}} + \hat{\beta})(\hat{C}_{\text{ad}} + \hat{\gamma}) = 0, \quad (7)$$

$$\hat{C}_- \left(\hat{C}_- + \frac{1}{2} \right) = 0, \quad (8)$$

$$\left(\hat{C}_+ + \frac{1}{2} \right) (\hat{C}_+ + 1)(\hat{C}_+ + \hat{\alpha})(\hat{C}_+ + \hat{\beta})(\hat{C}_+ + \hat{\gamma}) = 0, \quad (9)$$

где $\hat{C}_{\pm} := \hat{C}_{\text{ad} \pm}$.

В силу диаграммной интерпретации оператора $\hat{C}_{\text{ad}}$ (см. рис. 1) тождества (8), (9) и (7) играют важную роль при описании универсальных цветовых факторов диаграмм Фейнмана, см. далее п. 3.3.

1.3. Алгебры Ли $sl_N(\mathbb{C})$ и su_N . Алгебра Ли $sl_N(\mathbb{C})$ — линейное пространство операторов A , действующих в N -мерном комплексном векторном пространстве V_N , матрицы которых $\|A^k_m\|_{k,m=1,\dots,N}$ удовлетворяют условию

$$\text{tr } A = A^k_k = 0. \quad (10)$$

Базис алгебры $sl_N(\mathbb{C})$ можно выбрать так, что его элементы $T_{i\bar{j}} = e_{ij} - (1/N) \delta_{ij} e_{kk}$ (e_{ij} — матричные единицы) подчиняются соотношениям $[T_{i\bar{j}}, T_{k\bar{m}}] = T_{im} \delta_{kj} - T_{kj} \delta_{im}$ и имеют матричное представление (см., например, [19])

$$(T_{i\bar{j}})^k_m = \delta_i^k \delta_{m\bar{j}} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_m^k. \quad (11)$$

Тот факт, что базисные векторы $T_{i\bar{j}}$ алгебры $sl_N(\mathbb{C})$ задаются парой индексов $(i, \bar{j})$, позволяет отождествить эту пару с индексом присоединенного представления A . Заметим также, что для базисных векторов рассматриваемой алгебры выполняется условие $T_{i\bar{i}} = 0$.

Структурные константы алгебры $sl_N(\mathbb{C})$, компоненты ее метрики Картана–Киллинга и обратной метрики Картана–Киллинга вычисляются по стандартным формулам (см., например, [19]):

$$X^{k_1 \bar{k}_2}_{i_1 \bar{i}_2, j_1 \bar{j}_2} = \delta_{j_1 \bar{i}_2} \delta_{i_1}^{k_1} \delta_{\bar{j}_2}^{k_2} - \delta_{i_1 \bar{j}_2} \delta_{j_1}^{k_1} \delta_{\bar{i}_2}^{k_2}, \quad (12)$$

$$g_{i_1 \bar{i}_2, j_1 \bar{j}_2} = 2N \left(\delta_{j_1 \bar{i}_2} \delta_{i_1 \bar{j}_2} - \frac{1}{N} \delta_{i_1 \bar{i}_2} \delta_{j_1 \bar{j}_2} \right), \quad (13)$$

$$\bar{g}^{i_1 \bar{i}_2, j_1 \bar{j}_2} = \frac{1}{2N} \left(\delta^{j_1 \bar{i}_2} \delta^{i_1 \bar{j}_2} - \frac{1}{N} \delta^{i_1 \bar{i}_2} \delta^{j_1 \bar{j}_2} \right).$$

Далее нам также понадобятся структурные константы алгебры $sl_N(\mathbb{C})$ с опущенными индексами:

$$\begin{aligned} X_{i_1 \bar{i}_2, j_1 \bar{j}_2, k_1 \bar{k}_2} &= g_{i_1 \bar{i}_2, m_1 \bar{m}_2} X^{m_1 \bar{m}_2}_{j_1 \bar{j}_2, k_1 \bar{k}_2} = \\ &= 2N \left(\delta_{j_1 \bar{i}_2} \delta_{i_1 \bar{k}_2} \delta_{k_1 \bar{j}_2} - \delta_{i_1 \bar{j}_2} \delta_{k_1 \bar{i}_2} \delta_{j_1 \bar{k}_2} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Алгебра Ли su_N определяется как вещественное подпространство антиэрмитовых операторов в $sl_N(\mathbb{C})$. Базисные элементы $\{S_{ij}\}$ алгебры su_N можно представить в виде линейных комбинаций базисных элементов $\{T_{km}\}$ алгебры $sl_N(\mathbb{C})$ (см., например, [19]):

$$\begin{cases} S_{i\bar{j}} = \frac{1}{2}(T_{i\bar{j}} - T_{j\bar{i}}), & \text{если } i < j, \\ S_{i\bar{j}} = \frac{i}{2}(T_{i\bar{j}} + T_{j\bar{i}}), & \text{если } i > j, \\ S_{i\bar{i}} = iT_{i\bar{i}}. \end{cases} \quad (15)$$

1.4. Алгебра Ли so_N . Алгебра Ли $so_N(\mathbb{C})$ определяется как пространство операторов A , действующих в N -мерном комплексном векторном пространстве V_N , оставляющих инвариантной метрику $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}$:

$$A^T \varepsilon + \varepsilon A = 0. \quad (16)$$

Базисные элементы $M_{ij} = e_{ij} - e_{ji}$ этой алгебры, где e_{ij} — матричные единицы, имеют компоненты

$$(M_{ij})^a{}_b = \delta_i^a \delta_{jb} - \delta_j^a \delta_{ib}. \quad (17)$$

Структурные константы алгебры $so_N(\mathbb{C})$ в базисе (17) и компоненты ее метрики Картана–Киллинга имеют вид [11]

$$X^{k_1 k_2}{}_{i_1 i_2, j_1 j_2} = \delta_{i_2 j_1} \delta_{i_1}^{(k_1} \delta_{j_2}^{k_2)} - \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_1}^{(k_1} \delta_{j_1}^{k_2)} - \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2}^{(k_1} \delta_{j_2}^{k_2)} + \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2}^{(k_1} \delta_{j_1}^{k_2)}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{i_1 i_2, j_1 j_2} &= 2(N-2)(\delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1} - \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2}), \\ \mathfrak{g}^{i_1 i_2, j_1 j_2} &= \frac{1}{2(N-2)}(\delta^{i_1 j_2} \delta^{i_2 j_1} - \delta^{i_1 j_1} \delta^{i_2 j_2}), \end{aligned} \quad (19)$$

где $A^{(k_1 k_2)} := A^{k_1 k_2} - A^{k_2 k_1}$. Структурные константы этой алгебры с индексами, опущенными с помощью метрики Картана–Киллинга (19), равны

$$\begin{aligned} X_{k_1 k_2, i_1 i_2, j_1 j_2} &= 2(N-2) (\delta_{i_2 j_1} \delta_{i_1 (k_1} \delta_{k_2) j_2} - \delta_{i_2 j_2} \delta_{i_1 (k_1} \delta_{k_2) j_1} - \\ &\quad - \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 (k_1} \delta_{k_2) j_2} + \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 (k_1} \delta_{k_2) j_1}). \end{aligned} \quad (20)$$

Алгеброй Ли so_N группы $SO(N)$ является вещественная форма алгебры $so_N(\mathbb{C})$ со структурными константами (18).

2. МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ЦВЕТОВЫХ ФАКТОРОВ ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА, ПОЛУЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ СКЛЕЙКОЙ ОДИНАКОВЫХ КУСКОВ, В ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

2.1. Лагранжиан теории и фиксация калибровки. В данной работе нахождение цветковых факторов диаграмм Фейнмана проводится для теории Янга–Миллса с калибровочной группой G и фермионными полями ψ^a и $\bar{\psi}_a$. Эти поля преобразуются

под действием определяющего и коопределяющего представлений компактной калибровочной группы $G = SU(N)$, $SO(N)$ или $Sp(N)$ для четного $N = 2r$. Лагранжиан данной теории записывается в виде (см., например, [20])

$$L = -\frac{1}{4g^2} g_{AB} F^{\mu\nu A} F_{\mu\nu}^B + N \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (21)$$

где ковариантная производная D_μ и тензор напряженности калибровочного поля $F_{\mu\nu}$ равны

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu^A S_A, \quad (22)$$

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + X^A_{BC} A_\mu^B A_\nu^C, \quad (23)$$

а S_A — базисные элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ калибровочной группы G в представлении фермионов ψ .

Далее мы будем пользоваться калибровкой Фейнмана, правила Фейнмана для которой (кроме четырехглюонной вершины) изображены на рис. 2.

$$\begin{aligned} i \xrightarrow{p} j &= \frac{1}{N} \delta_j^i \frac{i}{\not{p} - m + i\varepsilon} \\ A, \mu \xrightarrow{p} B, \nu &= \bar{g}^{AB} \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \\ \begin{array}{c} A, \mu \\ | \\ k \xrightarrow{\quad} j \end{array} &= i \frac{N}{g^2} (T_A)^k_j \gamma^\mu \\ \begin{array}{c} B, \nu \\ | \\ q \\ | \\ \begin{array}{c} p \quad r \\ \diagup \quad \diagdown \\ A, \mu \quad C, \rho \end{array} \end{array} &= -\frac{1}{g^2} X_{ABC} [\eta^{\mu\nu} (p - q)^\rho + \eta^{\nu\rho} (q - r)^\mu + \eta^{\rho\mu} (r - p)^\nu] \end{aligned}$$

Рис. 2. Правила Фейнмана для теории с лагранжианом (21)

Замечание 1. В более общем случае при написании лагранжиана (21) используется не метрика Картана–Киллинга g_{AB} , а метрика $g'_{AB} := T_F g_{AB}$, где T_F — некоторая константа. При замене $g_{AB} \mapsto g'_{AB}$ в правилах Фейнмана цветовой фактор глюонного пропагатора делится на T_F , а цветковые факторы трех- и четырехглюонных вершин умножаются на T_F . Соответственно, правильную степень k коэффициента T_F^k перед произвольной диаграммой Фейнмана в случае метрики g'_{AB} можно восстановить из аналогичной диаграммы в случае метрики g_{AB} путем подсчета количества $n_{\text{пр}}$ глюонных пропагаторов и количества $n_{3,4}$ трех- и четырехглюонных вершин: $k = n_{3,4} - n_{\text{пр}}$.

Отметим здесь, что данный лагранжиан отличается от принятого в литературе переопределением полей (они домножаются на различные факторы вида N^k , где k — полуцелое число): это делается для получения осмысленного предела теории при $N \rightarrow \infty$.

Также подчеркнем, что лагранжиан (21) без фермионных полей имеет смысл также и для исключительных калибровочных групп G_2 , F_4 , E_6 , E_7 и E_8 .

2.2. Формулировка алгоритма нахождения цветовых факторов. Используемый нами алгоритм нахождения цветовых факторов диаграмм Фейнмана, построенных путем последовательной склейки повторяющихся кусков, состоит в следующем:

Утверждение 1. Пусть имеется диаграмма, схематично изображенная на рис. 3, у которой слева (и справа) имеется g глюонных линий, f фермионных линий, направленных вправо, и $\bar{f}$ фермионных линий, направленных влево. Пусть цветовой фактор $F^{A_1 \dots A_p k_1 \dots k_{\bar{f}} i_1 \dots i_f}_{B_1 \dots B_p \bar{m}_1 \dots \bar{m}_{\bar{f}} j_1 \dots j_f}$ для этой диаграммы, воспринимаемый как оператор, действующий в пространстве $V_{\text{ad}}^{\otimes p} \otimes \bar{V}_N^{\otimes \bar{f}} \otimes V_N^{\otimes f}$ (этот оператор называется оператором построения графа), удовлетворяет тождеству

$$(F - a_1)(F - a_2) \cdots (F - a_k) = 0 \quad (24)$$

для некоторых попарно различных $a_1, \dots, a_k$. Тогда для произвольной диаграммы вида изображенной на рис. 4 существует набор взаимно ортогональных проекторов

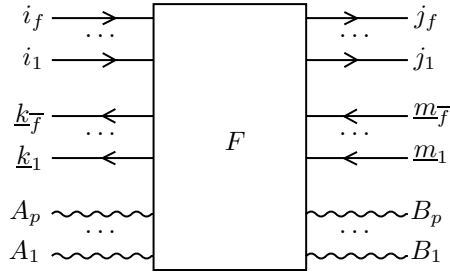


Рис. 3. Оператор построения графа диаграммы Фейнмана

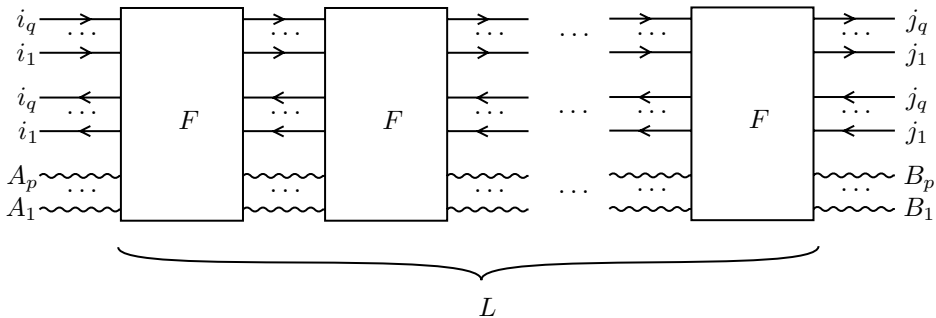


Рис. 4. Диаграмма Фейнмана, полученная последовательной склейкой диаграмм на рис. 3

$$P_i = \prod_{j=1}^k \frac{F - a_j}{a_i - a_j}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (25)$$

действующих в $V_{\text{ad}}^{\otimes p} \otimes \bar{V}_N^{\otimes \bar{f}} \otimes V_N^{\otimes f}$, такой что

$$F = a_1 P_1 + \dots + a_k P_k, \quad (26)$$

и для диаграммы, изображенной на рис. 4, цветовой фактор равен

$$F^L = a_1^L P_1 + \dots + a_p^L P_k. \quad (27)$$

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [21].

Важность расщепленного оператора Казимира при вычислении цветовых факторов диаграмм Фейнмана в неабелевых калибровочных теориях состоит в том, что он является строительным блоком для многих таких диаграмм. В частности, расщепленный оператор Казимира в различных представлениях является оператором построения графа для диаграмм Фейнмана лестничного типа (см. рис. 1).

3. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЦВЕТОВЫХ ФАКТОРОВ ДИАГРАММ ФЕЙНМАНА В КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ

3.1. Вычисление цветовых факторов диаграмм Фейнмана теории Янга–Миллса, содержащих фермионы, в случае калибровочной группы $SU(N)$. Конкретные вычисления, приведенные ниже, выполнены для алгебры Ли su_N .

В качестве первого примера применения расщепленного оператора Казимира к нахождению цветовых факторов диаграмм Фейнмана вычислим компоненты $(\hat{C}_f)^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$ оператора $\hat{C}_f := (T_f \otimes T_f) \hat{C}$ в тензорном произведении двух определяющих представлений. Эти компоненты совпадают с цветовым фактором диаграммы на рис. 5. Соответственно, компоненты оператора $(\hat{C}_f^L)^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$ равны цветовому фактору диаграммы на рис. 6, дающей вклад в амплитуду рассеяния двух кварков.

Характеристическое тождество оператора $\hat{C}_f$ алгебры su_N было найдено в работе [10]:

$$\left(\hat{C}_f - \frac{N-1}{2N^2} \right) \left(\hat{C}_f + \frac{N+1}{2N^2} \right) \mathbf{1} = 0. \quad (28)$$

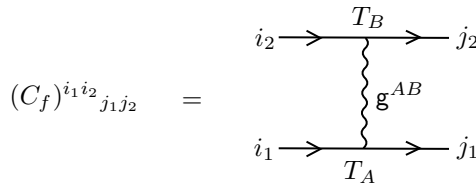


Рис. 5. Графическая интерпретация оператора $\hat{C}_f$ алгебр Ли su_N и so_N . Для алгебры so_N линии следует понимать неориентированными

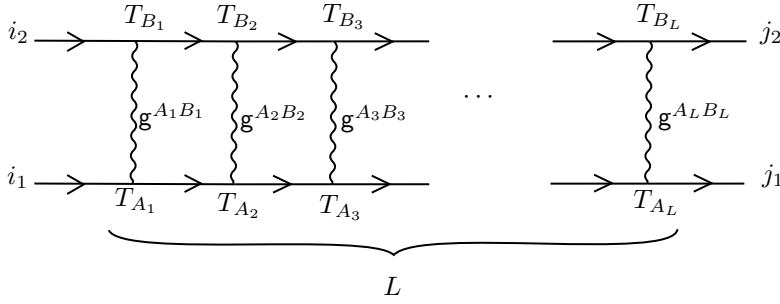


Рис. 6. Графическая интерпретация оператора $\hat{C}_f^L$ алгебр Ли su_N и so_N . Для алгебры so_N линии следует понимать неориентированными

Взаимно ортогональные проекторы на собственные подпространства оператора $\hat{C}_f$ вычисляются с помощью (25) и (28) и равны

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \mathcal{P}), \quad P_+ := P_{\frac{N-1}{N^2}}, \quad P_- := P_{-\frac{N+1}{N^2}}, \quad (29)$$

где $(\mathbf{1})^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2}$ и $(\mathcal{P})^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2}$ — единичный оператор и оператор перестановки в пространстве $V_f^{\otimes 2}$ представления $T_f^{\otimes 2}$. Используя (26) и (28), оператор $\hat{C}_f$ можно переписать в виде

$$\hat{C}_f = \frac{N-1}{2N^2} \cdot P_+ - \frac{N+1}{2N^2} \cdot P_-. \quad (30)$$

Соответственно,

$$(\hat{C}_f^L)^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} = \left(\frac{N-1}{2N^2} \right)^L \cdot P_+^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} + \left(-\frac{N+1}{2N^2} \right)^L \cdot P_-^{j_1 j_2}_{i_1 i_2}. \quad (31)$$

Из (31) видно, что с ростом N цветовой фактор диаграммы на рис. 6 подавляется как $(1/N)^L$, т. е. в пределе больших N диаграммы на рис. 6 не дают лидирующего вклада в рассеяние двух фермионов.

Один из способов достроить диаграмму на рис. 6 до вакуумной изображен на рис. 7. Цветовой фактор этой диаграммы вычисляется как след $(\hat{C}_f^L)^{i_1 i_2}_{i_1 i_2}$, что дает:

$$\text{tr}_{12}(\hat{C}_f^L) = \left(\frac{N-1}{2N^2} \right)^L \frac{N(N+1)}{2} + \left(-\frac{N+1}{2N^2} \right)^L \frac{N(N-1)}{2}. \quad (32)$$

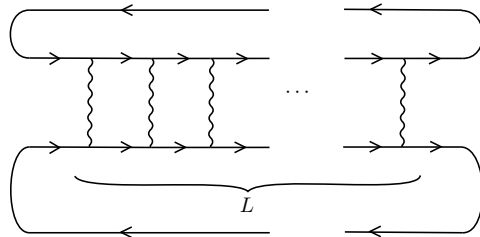


Рис. 7. Вакуумная диаграмма Фейнмана, полученная замыканием диаграммы на рис. 6

В пределе $N \rightarrow \infty$ получаем

$$\mathrm{tr}_{12}(\hat{C}_f)^L \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \begin{cases} 2^{-(1+L)} N^{-L} (2N^2 + L(L-3)) + \dots & \text{для четного } L, \\ -2^{-L} N^{1-L} (L-1) + \dots & \text{для нечетного } L. \end{cases} \quad (33)$$

На первый взгляд, данный результат не вполне согласуется с утверждением 'т Хофта [1]: порядок цветового фактора планарной вакуумной диаграммы с двумя кварковыми петлями не может превышать N^0 , тогда как для диаграммы на рис. 7 для четного L он подавляется гораздо сильнее: как N^{2-L} . Объяснение этого несоответствия состоит в том, что диаграмма на рис. 7 не является планарной. Действительно, в терминах двойных линий 'т Хофта цветовой фактор диаграммы на рис. 5 принимает вид изображенного на рис. 8, откуда следует, что цветовой фактор диаграммы на рис. 7 выражается в виде суммы графов, первое слагаемое в которой изображено на рис. 9. Этот граф содержит только две петли, дающие в цветовой фактор вклад, пропорциональный N^2 . Учет коэффициентов N и $1/N$ при вершинах и пропагаторах дает итоговый вклад, пропорциональный N^{2-L} . Аналогичным образом можно показать, что все графы в этой сумме дают вклады, пропорциональные N^2 или N^1 , что, с учетом общего коэффициента $(1/(2N))^L$ перед ними, дает вклады, пропорциональные N^{2-L} или N^{1-L} , что согласуется с (33).

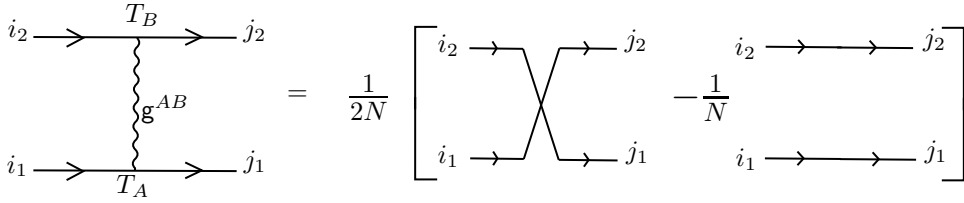


Рис. 8. Цветовой фактор диаграммы Фейнмана на рис. 5 для алгебры su_N в терминах двойных линий

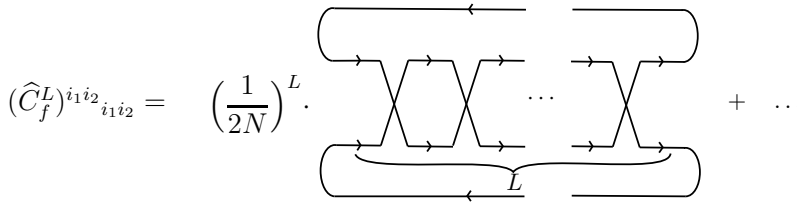


Рис. 9. Первое слагаемое суммы графов, выражающей цветовой фактор диаграмм на рис. 7 в терминах двойных линий

Рассмотрим теперь расщепленный оператор Казимира $\hat{C}'_f := (\bar{T}_f \otimes T_f) \hat{C}$, действующий в пространстве $\bar{V}_N \otimes V_N$ тензорного произведения коопределяющего $\bar{T}_f$ и определяющего T_f представлений алгебры su_N и имеющий компоненты $(\hat{C}'_f)^{j_1 j_2}_{i_1 i_2} = -(\hat{C}_f)^{i_1 j_2}_{j_1 i_2}$. Несложно получить матричное выражение для $\hat{C}'_f$:

$$\hat{C}'_f = -\frac{1}{2N} \left(\kappa - \frac{1}{N} \mathbf{1} \right), \quad (34)$$

где $\mathbf{1}$ — единичный оператор в пространстве $\bar{V}_f \otimes V_f$, а матрица оператора $\mathcal{K} : \bar{V}_f \otimes V_f \rightarrow \bar{V}_f \otimes V_f$ имеет компоненты $\mathcal{K}_{\underline{j}_1 \underline{j}_2}^{\underline{i}_1 \underline{i}_2} = \delta_{\underline{i}_1 \underline{i}_2} \delta_{\underline{j}_1 \underline{j}_2}$.

Компоненты $(\hat{C}'_f)^{\underline{i}_1 \underline{j}_2}_{\underline{i}_1 \underline{i}_2}$ оператора $\hat{C}'_f$ совпадают с цветовым фактором диаграммы на рис. 10, которая, в свою очередь, представляет собой оператор построения графа, изображенного на рис. 11.

$$j_2 \rightarrow \begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array} \rightarrow i_2 = (\hat{C}'_f)^{\underline{j}_1 \underline{j}_2}_{\underline{i}_1 \underline{i}_2} = -\frac{1}{2N} \left[\begin{array}{c} j_2 \rightarrow \quad \quad \quad i_2 \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ j_1 \leftarrow \quad \quad \quad i_1 \end{array} - \frac{1}{N} \begin{array}{c} j_2 \rightarrow \quad \quad \quad i_2 \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ j_1 \leftarrow \quad \quad \quad i_1 \end{array} \right]$$

Рис. 10. Графическая интерпретация оператора $\hat{C}'_f$ алгебры Ли su_N в терминах двойных линий

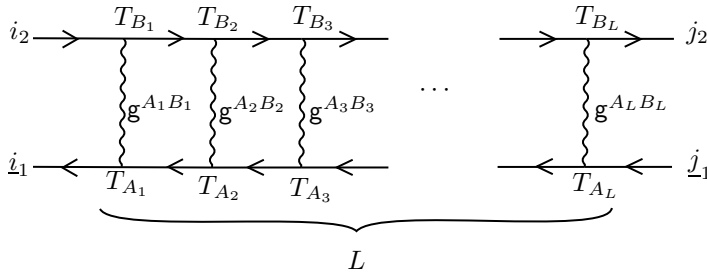


Рис. 11. Графическая интерпретация оператора $\hat{C}'^L_f$ алгебры Ли su_N

Для нахождения ее цветового фактора, равного $(\hat{C}'^L_f)^{\underline{j}_1 \underline{j}_2}_{\underline{i}_1 \underline{i}_2}$, вычислим характеристическое тождество оператора $\hat{C}'_f$:

$$\left(\hat{C}'_f - \frac{1}{2N^2} \right) \left(\hat{C}'_f + \frac{N^2 - 1}{2N^2} \right) \mathbf{1} = 0. \quad (35)$$

Находя с помощью (35) взаимно ортогональные проекторы

$$P_{a_1} = \mathbf{1} - \frac{1}{N} \mathcal{K}, \quad P_{a_2} = \frac{1}{N} \mathcal{K}, \quad \text{где} \quad a_1 = \frac{1}{2N^2}, \quad a_2 = -\frac{N^2 - 1}{2N^2}, \quad (36)$$

и используя (26) и (35), перепишем оператор $\hat{C}'_f$ в виде

$$\hat{C}'_f = \frac{1}{2N^2} \cdot P_{a_1} + \left(\frac{1 - N^2}{2N^2} \right) \cdot P_{a_2}. \quad (37)$$

Тогда для цветового фактора диаграммы на рис. 11 получаем

$$\hat{C}'^L_f = \left(\frac{1}{2N^2} \right)^L \cdot P_{a_1} + \left(\frac{1 - N^2}{2N^2} \right)^L \cdot P_{a_2}. \quad (38)$$

Из соотношения (38) видно, что при стремлении N к бесконечности цветовой фактор диаграммы Фейнмана на рис. 11 имеет асимптотику N^0 , т.е. диаграмма на рис. 11 дает ненулевой вклад в пределе $N \rightarrow \infty$.

Два варианта замыкания диаграммы на рис. 11 до вакуумной представлены на рис. 12 и 13.

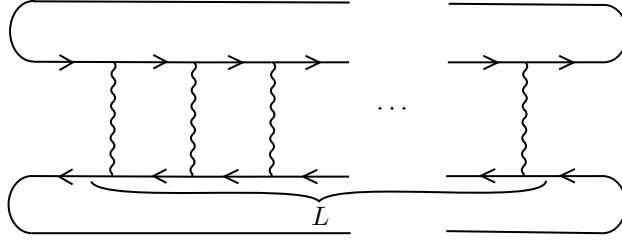


Рис. 12. Первый вариант замыкания диаграммы Фейнмана на рис. 11 до вакуумной

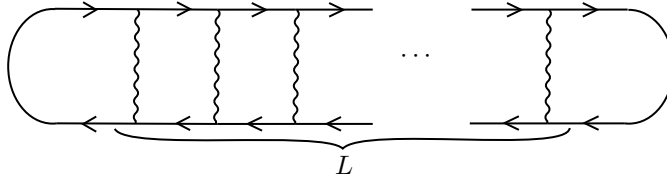


Рис. 13. Второй вариант замыкания диаграммы Фейнмана на рис. 11 до вакуумной

Цветовой фактор для диаграммы на рис. 12 выражается как свертка $(\hat{C}'_f)^{i_1 i_2}_{i_1 i_2}$, или как след оператора $\hat{C}'_f{}^L$, что дает

$$\text{tr}_{12} \hat{C}'_f{}^L = \left(\frac{1}{2N^2} \right)^L (N^2 - 1) + \left(\frac{1 - N^2}{2N^2} \right)^L. \quad (39)$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ получаем:

$$\text{tr}_{12} \hat{C}'_f{}^L \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (-2)^{-L} \left(1 - \frac{L}{N^2} + \dots \right) \quad \text{для } L \geq 3, \quad (40)$$

что согласуется с планарностью диаграммы на рис. 12, содержащей две кварковые петли.

Другой вариант замыкания $\text{tr}_{12}(\mathcal{K} \hat{C}'_f{}^L)$, представленный на рис. 13, дает

$$\text{tr}_{12}(\mathcal{K} \hat{C}'_f{}^L) = N \left(\frac{1 - N^2}{2N^2} \right)^L,$$

что, опять же, согласуется с планарностью этой диаграммы.

3.2. Вычисление цветовых факторов диаграмм Фейнмана теории Янга–Миллса, содержащих фермионы, в случае калибровочной группы $SO(N)$. Компоненты $(\hat{C}_f)^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$ оператора $\hat{C}_f := (T_f \otimes T_f) \hat{C}$ в тензорном произведении двух определяющих представлений алгебры so_N совпадают с цветовым фактором диаграммы на рис. 5, в котором линии теперь следует понимать как неориентированные. Отсутствие ориентации фермионных линий алгебры so_N предполагается для всех диаграмм

Фейнмана, используемых в данном разделе, и связано с тем, что определяющее и ко-определяющее представления этой алгебры являются эквивалентными: это стирает различие между подчеркнутыми и неподчеркнутыми индексами. Аналогично случаю алгебры su_N , компоненты оператора $(\hat{C}_f^L)^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}$ равны цветовому фактору диаграммы на рис. 6, дающей вклад в пропагатор частицы, состоящей из двух кварков.

Характеристическое тождество оператора $\hat{C}_f$ алгебры so_N было получено в [10] и записывается следующим образом:

$$\left(\hat{C}_f - \frac{1}{2(N-2)}\right) \left(\hat{C}_f + \frac{1}{2(N-2)}\right) \left(\hat{C}_f + \frac{N-1}{2(N-2)}\right) \mathbf{1} = 0. \quad (41)$$

Взаимно ортогональные проекторы на собственные подпространства оператора $\hat{C}_f$ вычисляются с помощью (25) и (41) и равны

$$P_{a_1} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathcal{P}) - \frac{1}{N} \mathcal{K}, \quad P_{a_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathcal{P}), \quad P_{a_3} = \frac{1}{N} \mathcal{K}, \quad (42)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{2(N-2)}, \quad a_2 = -\frac{1}{2(N-2)}, \quad a_3 = -\frac{N-1}{2(N-2)},$$

и операторы $\mathbf{1}$, $\mathcal{P}$ и $\mathcal{K}$ имеют компоненты $\mathbf{1}^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2}$, $\mathcal{P}^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2}$ и $\mathcal{K}^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \delta^{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2}$. Используя (26) и (41), оператор $\hat{C}_f$ можно переписать в виде

$$\hat{C}_f = \frac{1}{2(N-2)} \cdot P_{\frac{1}{2(N-2)}} - \frac{1}{2(N-2)} \cdot P_{-\frac{1}{2(N-2)}} - \frac{N-1}{2(N-2)} \cdot P_{-\frac{N-1}{2(N-2)}}. \quad (43)$$

Соответственно, для $\hat{C}_f^L$ получаем

$$\begin{aligned} (\hat{C}_f^L)^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} &= \left(\frac{1}{2(N-2)}\right)^L \left(P_{\frac{1}{2(N-2)}}\right)^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} + \\ &+ \left(-\frac{1}{2(N-2)}\right)^L \left(P_{-\frac{1}{2(N-2)}}\right)^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} + \\ &+ \left(-\frac{N-1}{2(N-2)}\right)^L \left(P_{-\frac{N-1}{2(N-2)}}\right)^{i_1 i_2}_{j_1 j_2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Из (44) видно, что цветовой фактор диаграммы на рис. 6 имеет асимптотику N^0 при $N \rightarrow \infty$, т. е. эта диаграмма дает ненулевой вклад в амплитуду рассеяния фермионов в пределе $N \rightarrow \infty$.

Два варианта замыкания диаграммы на рис. 6 до вакуумной представлены на рис. 12 и 13. Цветовой фактор диаграммы на рис. 12 выражается как свертка $(\hat{C}_f^L)^{i_1 i_2}_{i_1 i_2} = \text{tr}_{12} \hat{C}_f^L$, что дает

$$\begin{aligned} \text{tr}_{12} \hat{C}_f^L &= \left(\frac{1}{2(N-2)}\right)^L \left(\frac{1}{2}N(N+1) - 1\right) + \\ &+ \left(-\frac{1}{2(N-2)}\right)^L \frac{1}{2}N(N-1) + \left(-\frac{N-1}{2(N-2)}\right)^L. \end{aligned} \quad (45)$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ получаем

$$\mathrm{tr}_{12} \hat{C}_f^L \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (-2)^{-L} \left(1 + \frac{1}{N} + \dots \right) \quad \text{для } L \geq 4, \quad (46)$$

что согласуется с планарностью этой диаграммы и наличием в ней двух кварковых петель.

Другой вариант замыкания диаграммы на рис. 6 до вакуумной, представленный на рис. 13, имеет цветовой фактор, равный $\mathrm{tr}_{12} \mathcal{K} \hat{C}_f^L$:

$$\mathrm{tr}_{12} (\mathcal{K} \hat{C}_f^L) = N \left(-\frac{N-1}{2(N-2)} \right)^L, \quad (47)$$

что, опять же, согласуется с планарностью рассматриваемой диаграммы и наличием в ней одной кварковой петли.

Замечание. С точки зрения приложений (имея в виду теории великого объединения с калибровочной группой $SO(10)$) имеет смысл вычисление цветовых факторов, связанных с расщепленным оператором Казимира для алгебры so_N в спинорных представлениях.

3.3. Вычисление универсальных цветовых факторов диаграмм Фейнмана, содержащих только глюоны. Рассмотрим теперь расщепленный оператор Казимира $\hat{C}_{\mathrm{ad}}$ произвольной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в присоединенном представлении. Его компоненты $(\hat{C}_{\mathrm{ad}})^{B_1 B_2}_{A_1 A_2}$ совпадают с цветовым фактором диаграммы на рис. 1 справа. Соответственно, компоненты оператора $\hat{C}_{\mathrm{ad}}^L$ совпадают с цветовым фактором диаграммы, изображенной на рис. 14. Эта диаграмма дает вклад в полный пропагатор глюбола, состоящего из пары глюонов.

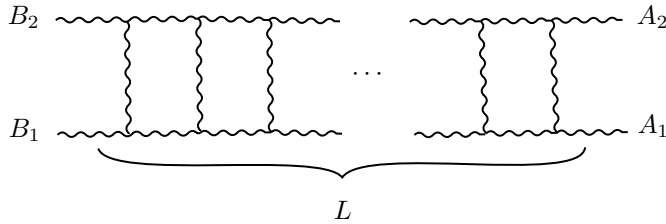


Рис. 14. Графическая интерпретация оператора $\hat{C}_{\mathrm{ad}}^L$ произвольной простой алгебры Ли

Согласно Утверждению 1, а также формулам (4), (8) и (9) оператор $\hat{C}_{\mathrm{ad}}^L$ для $L > 0$ выражается как

$$\hat{C}_{\mathrm{ad}}^L = \hat{C}_{-}^L + \hat{C}_{+}^L, \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{C}_{-}^L &= \left(-\frac{1}{2} \right)^L P_{-1/2} + (-1)^L P_{-1}, \\ \hat{C}_{+}^L &= (-\hat{\alpha})^L P_{-\hat{\alpha}} + (-\hat{\beta})^L P_{-\hat{\beta}} + (-\hat{\gamma})^L P_{-\hat{\gamma}}. \end{aligned} \quad (49)$$

Формулы (48) и (49) задают универсальное выражение для цветового фактора диаграммы, изображенной на рис. 14.

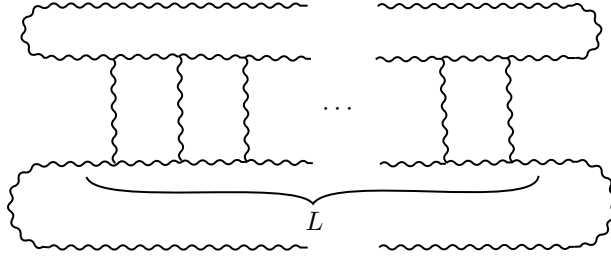


Рис. 15. Первый вариант замыкания диаграммы на рис. 14 до вакуумной

Диаграмму, изображенную на рис. 14, можно замкнуть до вакуумной, как показано на рис. 15. Ее цветовой фактор равен следу

$$\begin{aligned} \text{tr } \hat{C}_{\text{ad}}^L = \text{tr } \hat{C}_+^L + \text{tr } \hat{C}_-^L = \left(-\frac{1}{2}\right)^L \text{tr } P_{-1/2} + \\ + (-1)^L \text{tr } P_{-1} + (-\hat{\alpha})^L \text{tr } P_{-\hat{\alpha}} + (-\hat{\beta})^L \text{tr } P_{-\hat{\beta}} + (-\hat{\gamma})^L \text{tr } P_{-\hat{\gamma}} \end{aligned} \quad (50)$$

оператора $\hat{C}_{\text{ad}}^L$. Следы проекторов P_a , $a = 0, -1/2, -1, -\hat{\alpha}, -\hat{\beta}, -\hat{\gamma}$ были получены в [10] (см. также [15]) и равны

$$\begin{aligned} \text{tr } P_0 = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{g} (\dim \mathfrak{g} - 3), \quad \text{tr } P_{-1/2} = \dim \mathfrak{g}, \\ \text{tr } P_{-1} = 1, \quad \text{tr } P_{-\hat{\alpha}} = -\frac{(3\hat{\alpha} - 1)(\hat{\beta} - 1)(\hat{\gamma} - 1)(2\hat{\beta} + 1)(2\hat{\gamma} + 1)}{8\hat{\alpha}^2\hat{\beta}\hat{\gamma}(\hat{\alpha} - \hat{\beta})(\hat{\alpha} - \hat{\gamma})}, \end{aligned} \quad (51)$$

где $\dim \mathfrak{g}$ — размерность (6) алгебры $\mathfrak{g}$, а $\text{tr } P_{-\hat{\beta}}$ и $\text{tr } P_{-\hat{\gamma}}$ получаются из $\text{tr } P_{-\hat{\alpha}}$ заменами $\hat{\alpha} \leftrightarrow \hat{\beta}$ и $\hat{\alpha} \leftrightarrow \hat{\gamma}$ соответственно. Равенства (50) и (51), таким образом, дают универсальную формулу для цветового фактора диаграммы Фейнмана, изображенной на рис. 15, для произвольного натурального значения L :

$$\begin{aligned} \text{tr } \hat{C}_{\text{ad}}^L = \left(-\frac{1}{2}\right)^L \dim \mathfrak{g} + (-1)^L - \\ - (-1)^L \left[\hat{\alpha}^{L-2} \frac{(3\hat{\alpha} - 1)(\hat{\beta} - 1)(\hat{\gamma} - 1)(2\hat{\beta} + 1)(2\hat{\gamma} + 1)}{8(\hat{\alpha} - \hat{\beta})(\hat{\alpha} - \hat{\gamma})\hat{\beta}\hat{\gamma}} + \right. \\ \left. + (\hat{\alpha} \leftrightarrow \hat{\beta}) + (\hat{\alpha} \leftrightarrow \hat{\gamma}) \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Диаграмму на рис. 14 можно замкнуть до вакуумной еще одним способом, как показано на рис. 16.

Цветовой фактор полученной диаграммы равен свертке $(\hat{C}_{\text{ad}}^L)^{A_2 A_1}_{A_1 A_2}$, которая, как несложно увидеть, совпадает со следом $\text{tr } (\mathbf{P} \hat{C}_{\text{ad}}^L)$ оператора $\mathbf{P} \hat{C}_{\text{ad}}^L$. Здесь $\mathbf{P}$ — оператор перестановки, действующий в пространстве $V_{\text{ad}}^{\otimes 2}$. С использованием (4)

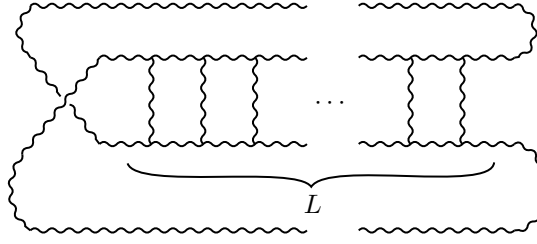


Рис. 16. Второй вариант замыкания диаграммы на рис. 14 до вакуумной

получаем для следа $\text{tr}(\mathbf{P}\hat{C}_{\text{ad}}^L)$:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{P}\hat{C}_{\text{ad}}^L) = & -\text{tr}\hat{C}_{-}^L + \text{tr}\hat{C}_{+}^L = -\left(-\frac{1}{2}\right)^L \dim \mathfrak{g} - (-1)^L - \\ & - (-1)^L \left[\hat{\alpha}^{L-2} \frac{(3\hat{\alpha} - 1)(\hat{\beta} - 1)(\hat{\gamma} - 1)(2\hat{\beta} + 1)(2\hat{\gamma} + 1)}{8(\hat{\alpha} - \hat{\beta})(\hat{\alpha} - \hat{\gamma})\hat{\beta}\hat{\gamma}} + \right. \\ & \left. + (\hat{\alpha} \leftrightarrow \hat{\beta}) + (\hat{\alpha} \leftrightarrow \hat{\gamma}) \right]. \end{aligned} \quad (53)$$

Выражение (53) является универсальной формулой для цветового фактора диаграммы Фейнмана, изображенной на рис. 16, для произвольного натурального L .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одним из потенциальных применений универсальности цветовых факторов диаграмм Фейнмана является построение аналога разложения $1/N$ 'т Хофта [1], справедливого сразу для всех простых алгебр Ли. Кратко обсудим здесь один из возможных вариантов такого построения.

Прежде всего необходимо выбрать универсальный аналог параметра разложения $1/N$, т.е. параметр x , построенный из параметров Вожеля и переходящий в $1/N$ в случае алгебры sl_N . Как следствие, предел $x \rightarrow 0$ является заменой предела $N \rightarrow \infty$.

Заметим, что, в силу условия $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 1/2$, произвольная простая комплексная алгебра Ли характеризуется двумя из трех параметров Вожеля, в качестве которых выберем $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ (см. таблицу). Соответственно, для однозначного задания алгебры Ли к малому параметру x нужно добавить еще один универсальный параметр s . Разложение по x универсальных цветовых факторов должно иметь вид ряда по степеням x с коэффициентами, зависящими только от s . Поэтому необходимо потребовать, чтобы s при $x \rightarrow 0$ не убывал (не возрастал), а был порядка единицы.

В качестве параметров x и s можно взять

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{-\hat{\alpha}\hat{\beta}}, \\ s &= \sqrt{-\frac{\hat{\beta}}{\hat{\alpha}}} \iff \begin{aligned} \hat{\alpha} &= -xs^{-1}, \\ \hat{\beta} &= xs. \end{aligned} \end{aligned} \quad (54)$$

Для алгебр Ли sl_N , so_N , $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, согласно таблице, $x^2 = \frac{1}{N^2}$, $\frac{2}{(N-1)^2}$, $\frac{5}{48}$, $\frac{5}{162}$, $\frac{1}{48}$, $\frac{2}{162}$, $\frac{1}{150}$ и $s^2 = 1, 2, 5/3, 5/2, 3, 4, 6$ соответственно, т. е. определенные формулой (54) параметры x и s удовлетворяют перечисленным выше требованиям.

Другой, более симметричный выбор может быть таким (см. формулу для размерности (6)):

$$x = \sqrt{-\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}}, \quad s = \sqrt{(1-\hat{\alpha})(1-\hat{\beta})(1-\hat{\gamma})} = \sqrt{\dim \mathfrak{g}} \cdot x.$$

Благодарности. Авторы благодарны А. В. Беднякову, И. Л. Бухбиндеру и С. О. Кривоносу за стимулирующие обсуждения.

Финансирование. Работа была поддержана грантом Российского научного фонда 23-11-00311.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. 't Hooft G. A Planar Diagram Theory for Strong Interactions // Nucl. Phys. B. 1993. V. 72, No. 3. P. 80–92.
2. Aharony O., Gubser S. S., Maldacena J., Ooguri H., Oz Y. Large N Field Theories, String Theory and Gravity // Phys. Rep. 2000. V. 323. P. 183.
3. 't Hooft G. A Two-Dimensional Model for Mesons // Nucl. Phys. B. 1994. V. 75, No. 3. P. 461–470.
4. Witten E. Baryons in the $1/N$ Expansion // Nucl. Phys. B. 1979. V. 160, No. 1. P. 57–115.
5. Di Francesco P., Ginsparg P., Zinn-Justin J. 2D Gravity and Random Matrices // Phys. Rep. 1995. V. 253, No. 1–2. P. 1–133.
6. Biagio L., Panero M. $SU(N)$ Gauge Theories at Large N // Phys. Rep. 2013. V. 526, No. 2. P. 93.
7. Bern Z. et al. The Duality between Color and Kinematics and Its Applications // J. Phys. A. 2024. V. 57, No. 33. P. 333002; arXiv:1909.01358v1[hep-th].
8. Strominger A. The Inverse Dimensional Expansion in Quantum Gravity // Phys. Rev. D. 1981. V. 24. P. 3082.
9. Emparan R., Suzuki R., Tanabe K. The Large D Limit of General Relativity // J. High Energy Phys. 2013. V. 06. P. 009; arXiv:1302.6382.
10. Isaev A. P., Krivonos S. O. Split Casimir Operator for Simple Lie Algebras, Solutions of Yang–Baxter Equations, and Vogel Parameters // J. Math. Phys. 2021. V. 62. P. 083503.
11. Isaev A. P., Provorov A. A. Projectors on Invariant Subspaces of Representations $\text{ad}^{\otimes 2}$ of Lie Algebras $so(N)$ and $sp(2r)$ and Vogel Parametrization // Theor. Math. Phys. 2021. V. 206, No. 1. P. 3–22; arXiv:2012.00746 [math-ph].
12. Isaev A. P., Provorov A. A. Split Casimir Operator and Solutions of the Yang–Baxter Equation for the $osp(M|N)$ and $sl(M|N)$ Lie Superalgebras, Higher Casimir Operators, and the Vogel Parameters // Theor. Math. Phys. 2022. V. 210, No. 2. P. 259–301; arXiv:2201.06148 [math-ph].

13. *Isaev A. P., Krivonos S. O., Provorov A. A.* Split Casimir Operator for Simple Lie Algebras in the Cube of ad-Representation and Vogel Parameters // Intern. J. Mod. Phys. A. 2023. V. 38. P. 2350037.
14. *Avetisyan M., Isaev A. P., Krivonos S. O., Mkrtchyan R.* The Uniform Structure of $g^{\otimes 4}$ // Russ. J. Math. Phys. 2024. V. 31. P. 379–388; arXiv:2311.05358 [math-ph].
15. *Vogel P.* The Universal Lie Algebra. Preprint. 1999; <https://webusers.imjprg.fr/?pierre.vogel/grenoble-99b.pdf>.
16. *Cvitanović P.* Birdtracks, Lie's, and Exceptional Groups. Princeton; Oxford: Princeton Univ. Press, 2008; <http://cns.physics.gatech.edu/grouptheory/chapters/draft.pdf>.
17. *Van Ritbergen T., Schellekens A. N., Vermaseren J. A. M.* Group Theory Factors for Feynman Diagrams // Intern. J. Mod. Phys. A. 1999. V. 14, No. 01. P. 41; arXiv:hep-ph/9802376.
18. *Deligne P.* La Série Exceptionnelle des Groupes de Lie // C. Roy. Acad. Sci. 1996. V. 322. P. 321326.
19. *Isaev A. P., Rubakov V. A.* Theory of Groups and Symmetries: I. Finite Groups, Lie Groups and Lie Algebras. World Sci., 2018.
20. *Peskin M., Schroeder D.* An Introduction to Quantum Field Theory. Westview Press, 1995.
21. *Isaev A. P., Rubakov V. A.* Theory of Groups and Symmetries: II. Representations of Groups and Lie Algebras, Applications. World Sci., 2020.

Получено 4 декабря 2024 г.