Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3, № 4(133). С. 43–47

УДК 539.12.01+539.124+539.126.33+539.126.34

ВАТСОНОВСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ ОБРАЗОВАНИЯ ЛЕПТОННЫХ ПАР В ЯДРО-ЯДЕРНЫХ СОУДАРЕНИЯХ

О. О. Воскресенская, А. Н. Сисакян, А. В. Тарасов, Г. Т. Торосян[1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Получено выражение для амплитуды образования лептонных пар в ядро-ядерных соударениях в терминах амплитуд лептон-ядерного рассеяния. Из него выведено приближенное компактное выражение для этой амплитуды, справедливое с точностью до слагаемых порядка $(Z\alpha)^5$.

An expression for the amplitude of lepton pair production in the nucleus–nucleus collisions in terms of the amplitudes of lepton–nuclear scattering is obtained. From it the approximate compact expression for this amplitude valid with accuracy up to terms of order $(Z\alpha)^5$ is derived.

ВВЕДЕНИЕ

Процесс

$$Z_1 + Z_2 \to Z_1 + Z_2 + e^+ + e^- \tag{1}$$

вносит доминирующий вклад в полное сечение взаимодействия тяжелых ядер при высоких энергиях, чем, в частности, и определяется важность его анализа вне рамок борновского приближения. На решение этой задачи в последнее время были направлены усилия нескольких групп авторов [1–14].

Представлявшаяся поначалу наиболее перспективной идея полностью непертурбативного решения проблемы путем вывода выражения для амплитуды процесса (1) из решения уравнения Дирака в суммарном электромагнитном поле сталкивающихся ионов [1–4], к сожалению, оказалась технически нереализуемой [10]. Это побудило авторов [12–14] к систематическому исследованию структуры поправок к результату борновского приближения в рамках КЭД-теории возмущений.

В работах [12–14] получено немало интересных и важных результатов, однако они достаточно разрозненны, а многие из них нуждаются в существенной доработке и систематизации.

Предлагаемый ниже подход к решению обсуждаемой проблемы является в известной степени промежуточным между двумя упомянутыми выше, то есть *полупертурбативным*. Он опирается на обобщение известной теоремы Ватсона [15] на случай анализа процесса (1) и позволяет выразить его амплитуду в терминах амплитуд $eZ_{1(2)}$-рассеяний.

---

[1]Ереванский физический институт, Армения.

ВАТСОНОВСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ ПРОЦЕССА $Z_1 Z_2 \to Z_1 Z_2 e^+ e^-$

Действительно, нетрудно убедиться, что амплитуда образования e^+e^--пары в произвольном внешнем электромагнитном поле $A_\mu(x)$ представима в виде

$$M = \bar{u}(p_2) \int d^4x_1 d^4x_2 \exp\left(ip_1x_1 + ip_2x_2\right) T(x_2, x_1) v(p_1)\,, \tag{2}$$

где оператор рассеяния T удовлетворяет уравнению

$$T(x_2, x_1) = V(x_2, x_1) - \int d^4x_1' d^4x_2' V(x_2, x_2') G(x_2' - x_1') T(x_1', x_1)\,, \tag{3}$$

или, в сокращенной форме,

$$T = V - V \otimes G \otimes T. \tag{4}$$

Выше

$$V(x_2, x_1) = e\gamma_\mu A_\mu(x_1) \delta(x_2 - x_1); \tag{5}$$

$u(p_2)$, $u(p_2)$ — биспиноры, описывающие состояния свободных электрона и позитрона с 4-импульсами p_2 и p_1 соответственно; $G(x - x')$ — свободная причинная функция распространения фермиона.

В случае процесса (1)

$$A_\mu(x) = A_{\mu_1}(x) + A_{\mu_2}(x)\,, \tag{6}$$

где $A_{\mu_k}(x)$ — электромагнитный потенциал иона Z_k ($k = 1, 2$),

$$V = V_1 + V_2 \tag{7}$$

и для оператора T, согласно [15], справедливо представление

$$\begin{aligned} T = T_1 + T_2 - T_1 \otimes G \otimes T_2 - T_2 \otimes G \otimes T_1 + \\ + T_1 \otimes G \otimes T_2 \otimes G \otimes T_1 + T_2 \otimes G \otimes T_1 \otimes G \otimes T_2 \ldots, \end{aligned} \tag{8}$$

в котором операторы eZ_k-рассеяний T_k являются решениями уравнений

$$T_k = V_k - V_k \otimes G \otimes T_k\,, \quad k = 1, 2. \tag{9}$$

Каждая из величин T_k содержит вклад бесконечной совокупности диаграмм Фейнмана лестничного типа и, таким образом, представление (8) автоматически решает проблему ресуммирования ряда теории возмущений, обсуждавшуюся в работах [12–14].

Величины, получаемые подстановкой в правую часть соотношения (2) одного из членов его ватсоновского разложения (8) вместо оператора T, будем для простоты именовать *парциальными* амплитудами.

Их вычисление, как и следовало ожидать, заметно упрощается в ультрарелятивистском пределе $\gamma_{1,2} \to \infty$ ($\gamma_{1,2}$ — лоренц-факторы сталкивающихся ядер в их системе центра масс, с. ц. м.), так как в этом пределе особенно простой вид приобретают решения уравнений (9):

$$T_1(p,p') = \int d^4x d^4x' \exp\left(ipx - ip'x'\right) T_1(x,x') =$$
$$= (2\pi)^2 \delta(p_+ - p'_+)\gamma_+ \left[\theta(p_+) f_1^{(+)}(\mathbf{p}_T - \mathbf{p}'_T) - \theta(-p_+) f_1^{(-)}(\mathbf{p}_T - \mathbf{p}'_T)\right], \quad (10)$$

$$T_2(p,p') = \int d^4x d^4x' \exp\left(ipx - ip'x'\right) T_2(x,x') =$$
$$= (2\pi)^2 \delta(p_- - p'_-)\gamma_- \left[\theta(p_-) f_2^{(+)}(\mathbf{p}_T - \mathbf{p}'_T) - \theta(-p_-) f_2^{(-)}(\mathbf{p}_T - \mathbf{p}'_T)\right], \quad (11)$$

$$f^{(\pm)}(\mathbf{q}) = \frac{i}{2\pi} \int d^2x \exp\left[(i\mathbf{q}\mathbf{x})\left(1 - S_k^{(\pm)}(\mathbf{x})\right)\right], \quad k = 1, 2, \quad (12)$$

$$S_k^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \exp\left[\pm i\chi_k(\mathbf{x} - \mathbf{b}_k)\right], \quad (13)$$

$$\chi_k(\mathbf{b}) = e \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_k\left(\sqrt{b^2 + z^2}\right) dz\,,\ e = \sqrt{\alpha}\,. \quad (14)$$

Выше $\mathbf{b}_k$ — прицельные параметры сталкивающихся ионов в их с. ц. м.; $\Phi_k(r)$ — их кулоновские потенциалы в их системе покоя. Световые компоненты $a_\pm$ 4-вектора $a_\mu = (a_0, a_z, \mathbf{a}_T)$ $(a = \gamma, p, p')$ определены обычным образом ($a_\pm = a_0 \pm a_z$), ось z выбрана в направлении движения ядра Z_2.

ПРОБЛЕМА ИНФРАКРАСНОЙ СТАБИЛЬНОСТИ

Подобно тому, как при пертурбативных расчетах приходится производить инфракрасную регуляризацию фотонных пропагаторов (путем введения фиктивной бесконечно малой массы фотона λ) с целью обеспечения конечности вкладов петлевых диаграмм, в рамках рассматриваемого подхода необходимо ввести «инфракрасную регуляризацию» кулоновских потенциалов $\Phi_k(r)$

$$\Phi_k(r) = \lim_{\lambda_k \to 0} Z_k e \exp\left(\lambda_k \cdot r\right)/r \quad (15)$$

для обеспечения конечности значений фазовых сдвигов

$$\chi_k(\mathbf{b}) = 2Z_k\alpha K_0(\lambda_k \cdot b) \xrightarrow{\lambda_k \to 0} -2Z_k\alpha\left[\ln\left(\lambda_k b\right) + C\right] \quad (16)$$

и придания смысла величинам (10)–(13) на промежуточном этапе рассмотрения.

При $\lambda \to 0$ вклады отдельных петлевых диаграмм в амплитуду (1) становятся логарифмически расходящимися, однако в сумме всех таких вкладов эти инфракрасные расходимости полностью взаимно сокращаются, приводя к конечному и однозначному — инфракрасно-стабильному (ИКС) результату для амплитуды (1) [14].

В обсуждаемом нами подходе аналогом петлевых диаграмм являются *парциальные* амплитуды. При $\lambda_k \to 0$ их значения хотя и остаются конечными по величине, но не стремятся к определенным предельным значениям, а становятся бесконечноосциллирующими функциями своих аргументов.

Величины такого рода будем называть инфракрасно-нестабильными (ИКНС). Простейшие из них — это S-операторы $e^{\pm}Z_k$-рассеяний $S_k^{(\pm)}(\mathbf{x})$, являющиеся, наряду с функциями распространения $G(x-x')$, основными структурными элементами парциальных амплитуд. Очевидно, что любая парциальная амплитуда представима в виде суперпозиции произведений ИКНС величин $S_k^{(\pm)}(\mathbf{x})$.

Произведения этих величин вида

$$\prod_i S_1^{(+)}(\mathbf{x}_i) S_1^{(-)}(\mathbf{x}'_i) \prod_j S_2^{(+)}(\mathbf{x}_j) S_2^{(-)}(\mathbf{x}'_j) \tag{17}$$

являются ИКС-величинами в силу соотношений

$$\lim_{\lambda_k \to 0} S_k^{(+)}(\mathbf{x}) S_k^{(-)}(\mathbf{x}') = \exp\left[2iZ_k\alpha \, \ln\left(\frac{|\,\mathbf{x}' - \mathbf{b}_k\,|}{|\,\mathbf{x} - \mathbf{b}_k\,|}\right)\right] = \mathrm{const}\,(\lambda_k). \tag{18}$$

Отличающиеся же от них произведения величин $S_k^{(\pm)}(\mathbf{x})$ есть ИКНС.

Свойство ИКС-амплитуды (1) в целом означает, что при суммировании всех парциальных амплитуд их ИКНС-компоненты должны взаимно сокращаться. Чтобы проследить это сокращение, необходимо предварительно явно выполнить интегрирование по световым компонентам всех промежуточных 4-импульсов в выражениях для парциальных амплитуд.

Последующий анализ приводит к следующему окончательному результату: амплитуда (2) является функционалом следующей симметричной ИКС-комбинации величин $S_k^{(\pm)}(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} &\Omega_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2) = \Omega_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1)\Omega_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2), \\ &\Omega_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 1 - S_k^{(+)}(\mathbf{x}) S_k^{(-)}(\mathbf{x}'), \quad k = 1, 2 \end{aligned} \tag{19}$$

и представима в виде бесконечной суммы

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n \left\{\Omega_{12}\right\}, \tag{20}$$

последовательные слагаемые которой при $Z_1\alpha \to 0$, $Z_2\alpha \to 0$ — величины порядка $\left(Z_1 Z_2 \alpha^2\right)^{2n-1}$.

При этом $M_1\left\{\Omega_{12}\right\}$ является линейным функционалом Ω_{12}, $M_2\left\{\Omega_{12}\right\}$ — суперпозицией линейного и билинейного по Ω_{12} функционалов, и так далее (то есть $M_n\left\{\Omega_{12}\right\}$ — «полином» n-й степени от Ω_{12}).

Ниже приводится явное выражение для $M_1\left\{\Omega_{12}\right\}$:

$$M_1 = \frac{i}{(4\pi)^3}\bar{u}(p_2)\left[\int d^2k_1 d^2k_2 d^2k_3 \, R\right] v(p_1), \tag{21}$$

$$R = \gamma_+\nu_1\gamma_-\nu_2\gamma_+\nu_3\gamma_-\Omega_1(q_1,q_3)\Omega_2(q_2,q_4)\left[\ln\left(\frac{a}{b}+i\pi\right)\right](a+b)^{-1}+ \\ +\gamma_-\nu_1\gamma_+\nu_2\gamma_-\nu_3\gamma_+\Omega_2(q_1,q_3)\Omega_1(q_2,q_4)\left[\ln\left(\frac{a}{c}+i\pi\right)\right](a+c)^{-1}, \quad (22)$$

$$a=\mu_1\mu_3, \quad b=\mu_2 p_{2+}p_{1-}, \quad c=\mu_2 p_{2-}p_{1+}, \\ \nu_i = m-\gamma_T\mathbf{k}_i, \quad \mu_i = m^2+\mathbf{k}_i^2, \quad i=1,2,3, \quad (23)$$

$$\Omega_j(\mathbf{q},\mathbf{q}') = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2x d^2x' \exp\left(i\mathbf{qx}+i\mathbf{q}'\mathbf{x}'\right)\Omega_j(\mathbf{x},\mathbf{x}'),\ j=1,2, \quad (24)$$

$$\mathbf{q}_1=\mathbf{p}_{2T}-\mathbf{k}_1, \quad \mathbf{q}_2=\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2, \quad \mathbf{q}_3=\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3, \quad \mathbf{q}_4=\mathbf{k}_3+\mathbf{p}_{1T}, \quad (25)$$

где m — масса электрона.

Это выражение содержит в себе, наряду с результатом борновского приближения, также все поправки к нему, полученные в работах [12–14].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ясно, что вследствие приведенных выше оценок порядка величины слагаемых M_n в выражении (20) практический интерес может представлять лишь явное выражение для величины M_2. Явный вид для нее, совместно с деталями вывода, будет дан отдельно.

Таким образом, хотя нам и не удалось получить замкнутое выражение для амплитуды (2) (если таковое существует), мы смогли представить в достаточно компактной форме результат борновского приближения вместе с наиболее существенными поправками к нему.

Благодарности. Авторы благодарят за обсуждение вопросов, затронутых в работе, Э. А. Кураева и С. Р. Геворкяна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Segev B., Wells J. C.* // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 1849.
2. *Baltz A. J., McLerran L.* // Phys. Rev. C. 1998. V. 58. P. 1679.
3. *Segev B., Wells J. C.* // Phys. Rev. C. 1999. V. 59. P. 2753.
4. *Eichmann U. et al.* // Ibid. P. 1223.
5. *Ivanov D. Yu., Schiller A., Serbo V. G.* // Phys. Lett. B. 1999. V. 454. P. 155.
6. *Eichmann U., Reinhardt G., Greiner W.* // Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 062710.
7. *Lee R. N., Miltsein A. I.* // Ibid. P. 032103.
8. *Lee R. N., Miltsein A. I., Serbo V. G.* hep-ph/0108014.
9. *Lee R. N., Miltsein A. I.* // Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 032106.
10. *Baltz A. J. et al.* // Nucl. Phys. A. 2001. V. 695. P. 395.
11. *Baltz A. J.* nucl-th/0305083.
12. *Bartos E. et al.* // Phys. Rev. A. 2002. V. 66. P. 042720.
13. *Bartos E. et al.* // Phys. Lett. B. 2002. V. 538. P. 45.
14. *Bartos E., Gevorkyan S. R., Kuraev E. A.* hep-ph/0410263.
15. *Watson K. M.* // Phys. Rev. 1953. V. 89. P. 575.

Получено 16 августа 2005 г.