Письма в ЭЧАЯ. 2005. Т. 2, № 6(129). С. 7–11

УДК 530.16, 530.145

ПРИЧИННОСТЬ И МНОГОМАСШТАБНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

М. В. Алтайский[1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Предложено обобщение понятия «событие» на случай пространств с неархимедовой геометрией. Построено соответствующее упорядочение операторнозначных функций, зависящих от масштаба, рассмотрены коммутационные соотношения.

The term «event» is generalized for the spaces with non-Archimedean geometry. Ordering and the commutation relations are constructed for the operator-valued functions that depend on the scale.

Современная квантовая теория поля, основанная на формализме функционального интеграла, существенно апеллирует к условию причинности. Само условие причинности формулируется как независимость S-матрицы от событий будущего [1]. В соответствии с этим принципом изменение поля g в бесконечно малой окрестности точки y может повлиять на процессы изменения полей лишь в точках x, отделенных от y времениподобным интервалом, но никак не в точках, отделенных от y пространственноподобным интервалом. При этом амплитуда поля получает приращение $\delta\Phi(g) = \delta S(g)\Phi = [\delta S(g) \cdot S^\dagger(g)]\Phi(g)$. Сам оператор $S(g)$ — матрица рассеяния — при этом определяется разложением в функциональный ряд

$$S(g) = 1 + T\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1, \ldots, x_n) g(x_1) \cdots g(x_n) dx_1 \cdots dx_n, \tag{1}$$

к которому применяется T-упорядочение операторов в псевдоевклидовом пространстве, т. е. все операторы в (1) располагаются в порядке возрастания временных аргументов справа налево. Функциональный аргумент g, функция $0 \leqslant g(x) \leqslant 1$, введенная Штюкельбергом, представляет собой интенсивность взаимодействия и принимает значение 0 в тех областях, где взаимодействие отсутствует, и 1 там, где оно включено полностью [1].

Такой подход справедлив для описания процессов в квантовой электродинамике, квантовой хромодинамике и других областях физики высоких энергий — до тех пор, пока псевдоевклидово пространство остается адекватной моделью для физики исследуемых явлений, а *интервалы* между *событиями* корректно определены; это позволяет, хотя бы в принципе, произвести упорядочение событий. Ситуация существенно меняется при приближении к планковским масштабам энергии, когда становятся неоднозначными

[1] E-mail: altaisky@mx.iki.rssi.ru

сами понятия «событие» и «интервал». Последнее понятие требует наличия аксиомы Архимеда — т. е. возможности экспериментального сравнения длин (интервалов).

Под событием X принято понимать совокупность координат (x_0, x_1, x_2, x_3), позволяющих локализовать некоторое явление в пространстве Минковского (или совокупность координат на многообразии, локально изоморфном (псевдо-) евклидову пространству). Событиями являются, например, вспышка света или распад элементарной частицы в точке (x_0, x_1, x_2, x_3). Такое определение, однако, не связано непосредственно с возможностью экспериментальной локализации самого явления, т. е. с возможностью проведения соответствующего квантового измерения. Так, если мы говорим, что вспышка света имела место в точке X пространства-времени, мы неявно используем гипотезу о том, что свет, который был зарегистрирован в некой другой точке $Y \neq X$, распространяется в пространстве Минковского с постоянной скоростью c, причем $y_0 > x_0$ в подходящей системе координат. На малых расстояниях — больших энергиях, когда характерные размеры (длина волны) измерительного прибора соизмеримы с размерами регистрируемого объекта, возможность такого измерения (а следовательно, и такого определения события) не очевидна.

По этой причине представляется необходимым введение более общего определения события, которое не апеллирует явно к евклидовой геометрии и может быть использовано в тех случаях, когда при повышении энергии экспериментальное сравнение длин становится невозможным, а как следствие этого становится невозможным и введение евклидовых координат.

В качестве такого определения можно предложить *локализовать событие с помощью семейства его вложенных окрестностей*, понимаемых в обычном смысле окрестностей в топологическом пространстве. Примером такой локализации является почтовый адрес, в котором для локализации адресата мы пишем сначала город, затем улицу, дом и т. д. Очевидно, что такое определение тесно связано с уже известным определением события — но не в квантовой теории поля, а в теории вероятностей. Если обратиться от теории вероятностей назад к квантовой теории поля, данное определение события приобретает качественно новый смысл: два события теперь могут не только совпадать ($A = B$) или не совпадать ($A \neq B$), но одно из них может содержать другое ($A \subset B$). В этом смысле событие $A =$«нахождение кварка внутри нуклона» содержится в событии $B =$«существование нуклона». Заметим, что определенные таким образом события не могут иметь частичного пересечения. Так, при помощи одного измерения мы можем локализовать положение некоторого атома, а при помощи следующего измерения определить наличие электрона у этого атома путем его ионизации. В данном случае мы не можем говорить о *частичном* нахождении электрона внутри атома.

Определив события посредством системы окрестностей и погрузив[1] используемое для этого топологическое пространство в (псевдо-) евклидово пространство, нетрудно определить операцию упорядочения, при которой упорядочиваются не только непересекающиеся события, но и те, одно из которых содержится внутри другого. (Необходимость в таком упорядочении была отмечена в работе [2] при попытке использования дис-

[1]Мы не видим необходимости требовать здесь взаимооднозначности отображения, поэтому используем погружение, а не вложение (см., например, [6]). Кроме того, если объект погружается в евклидово пространство, то он вкладывается в многообразие той же размерности, — обратное не верно (Щепин Е. В. Частное сообщение).

кретного вейвлет-преобразования в квантовой хромодинамике.) Погрузив используемое топологическое пространство в евклидово пространство нужной размерности, нетрудно определить обобщение операции T-упорядочения операторнозначных функций поля:

$$T(A(x,\Delta x)B(y,\Delta y)) = \begin{cases} A(x,\Delta x)B(y,\Delta y), & y_0 < x_0, \\ \pm B(y,\Delta y)A(x,\Delta x), & x_0 < y_0, \\ A(x,\Delta x)B(y,\Delta y), & \Delta y > \Delta x, y_0 = x_0, \\ \pm B(y,\Delta y)A(x,\Delta x), & \Delta y < \Delta x, x_0 = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь аргументами упорядочиваемых операторов являются центр события x (набор евклидовых координат[1]) и диаметр окрестности этого события Δx.

Второй аргумент (Δx) в операторнозначных функциях в (2) фактически означает диаметр окрестности точки x в (псевдо-) евклидовом пространстве. Такое упорядочение может быть реализовано, например, для амплитуд вероятности найти частицу поля ϕ в точке x при разрешении эксперимента Δx. Обычная волновая функция, описывающая амплитуду вероятности найти частицу в точке x, при этом представляет собой сумму по всем возможным разрешениям:

$$\phi(x) = C_\psi^{-1} \int \frac{1}{(\Delta x)^d} \psi\left(\frac{x-b}{\Delta x}\right) \phi(x,\Delta x) \frac{d^d b d\Delta x}{\Delta x}. \tag{3}$$

При этом базисная функция ψ, базисный вейвлет, определяется прибором, с помощью которого локализуют частицу. Знак плюс в правой части определения (2) соответствует бозонам, минус — фермионам. При стремлении диаметров окрестностей к нулю, $\Delta x, \Delta y \to 0$, введенное упорядочение (2) переходит в обычное T-упорядочение операторов. В случае же, когда событие B лежит внутри события A, первым действует оператор, соответствующий «бóльшему» из событий — событию A. Полный же объект характеризуется иерархической волновой функцией $|\Phi\rangle = \{|A\rangle, |AB\rangle, \ldots\}$ [3].

Имея в виду упорядочение (2), можно переопределить матрицу рассеяния с использованием функции интенсивности взаимодействия $g(x,\Delta x)$, зависящей как от точки, так и от масштаба, в виде

$$S(g) = 1 + T\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int S_n(x_1,\Delta x_1,\ldots,x_n,\Delta x_n) g(x_1,\Delta x_1)\cdots \\ \cdots g(x_n,\Delta x_n) dx_1 d\ln\Delta x_1 \cdots dx_n d\ln\Delta x_n. \tag{4}$$

Здесь второй аргумент в интенсивностях взаимодействия $g(x_i,\Delta x_i)$ означает масштаб в точке, отмеченной координатой x_i; интегрирование по каждому из аргументов производится по той же мере, что и в (3); T-упорядочение определено соотношением (2). Используя только что данное определение упорядочения (4), в пределе бесконечно малых окрестностей мы получаем обычное T-упорядочение операторов по нулевой координате в (псевдо-) евклидовом пространстве — для событий, имеющих непересекающиеся

[1] Здесь и далее мы используем обозначения d-мерного евклидова пространства $I\!R^d$, имея в виду, что в силу теоремы о единственности аналитического продолжения все построенные конструкции однозначно продолжаются в псевдоевклидово пространство, в частности, при $d = 4$ в пространство Минковского.

окрестности, определено понятие интервала (расстояния) между событиями. Если же два события не имеют непересекающихся окрестностей, т. е. одно из них является частью другого, то оператор, соответствующий части, действует не на вакуумное состояние $|0\rangle$, а на результат действия оператора рождения целого на вакуум. Это, в известной степени, аналогично описанию эмбриогенеза в биологии, когда состояние целого эмбриона (морфогенное поле) определяет процессы дифференциации тканей в отдельных его частях [4]. С другой стороны, это соответствует процедуре квантового измерения, когда сначала определяется состояние целого, а потом состояние его частей.

Нетрудно построить простейшую реализацию коммутационных соотношений, которые могут быть использованы в многомасштабной теории с упорядочением (2). Возьмем обычную теорию скалярного поля $\phi(x)$ в евклидовом пространстве. Операторнозначная функция $\phi(x), x \in I\!R^d$, может быть обычным образом разложена на положительно- и отрицательно-частотную части:

$$\phi(x) = \int_{k_0>0} \mathrm{e}^{ikx} u^+(k) \frac{d^d k}{(2\pi)^d} + (-1)^d \int_{k_0>0} \mathrm{e}^{-ikx} u^-(k) \frac{d^d k}{(2\pi)^d}. \tag{5}$$

При этом фурье-компоненты $u^\pm(k) = u(\pm k)|_{k_0>0}$ понимаются как операторы рождения и уничтожения квантов поля ϕ, несущих импульс k.

Для массивного скалярного поля с массой m и энергией кванта $\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ при установлении перестановочных соотношений необходимо интегрировать лишь по массовой поверхности, используя δ-функцию:

$$\theta(k_0) \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \to \theta(k_0) \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \delta(k^2 - m^2) = \frac{d^{d-1}\mathbf{k}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{2\omega_k}.$$

Разложение этого поля на положительно- и отрицательно-частотную части (5), после подстановки δ-функции от массовой поверхности, будет иметь вид

$$\phi(x) = \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{2\omega_k} \left[\mathrm{e}^{ikx} u^+(k) + (-1)^d \mathrm{e}^{-ikx} u^-(k)\right], \tag{6}$$

при этом на операторы рождения и уничтожения квантов поля $u^\pm(k)$ накладываются следующие коммутационные соотношения:

$$[u^+(k_1), u^-(k_2)] = (2\pi)^{d-1} 2\omega_k \delta^{d-1}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2). \tag{7}$$

Очевидно, что положительно- и отрицательно-частотные части поля ϕ могут быть разложены по масштабным компонентам с помощью непрерывного вейвлет-преобразования

$$\phi(x) = \frac{1}{C_\psi} \int \frac{da}{a^{d+1}} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} a^{d/2} \tilde{\psi}(ak) \left[\mathrm{e}^{ikx} u_a(k) + (-1)^d \mathrm{e}^{-ikx} u_a(-k)\right], \tag{8}$$

$$u_a^+(k) \equiv u_a(k)|_{k_0>0}, \quad u_a^-(k) \equiv u_a(-k)|_{k_0>0}; \tag{9}$$

$C_\psi = \int \frac{|\tilde{\psi}(k)|^2}{|k|} dk < \infty$ — константа нормировки базисного вейвлета ψ. Коммутационные соотношения для масштабных компонент $u_a^\pm(k)$ должны быть введены исходя из принципа соответствия, так чтобы после интегрирования по всем масштабам воспроизводились обычные коммутационные соотношения (7) для обычных операторов $u^{\pm}(k)$, отвечающих плоским волнам. Таким образом, после интегрирования по масштабной переменной a

$$u^{\pm}(k) = C_{\psi}^{-1} \int \frac{da}{a^{d+1}} a^{d/2} \tilde{\psi}(ak) u_a^{\pm}(k) \tag{10}$$

должны сохраняться обычные коммутационные соотношения для операторов $u^{\pm}(k)$. Операторы $u_a^{\pm}(k)$ можно назвать операторами рождения и уничтожения квантов достаточно условно — в них присутствует параметр масштаба a, связанный с процедурой измерения. Канонические коммутационные соотношения для обычных операторов рождения и уничтожения квантов (7) можно обеспечить, подчинив масштабные компоненты $u_a^{\pm}(k)$ следующим соотношениям:

$$[u_{a_1}^{+}(k_1), u_{a_2}^{-}(k_2)] = (2\pi)^{d-1} 2\omega_k \delta^{d-1}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) C_{\psi} a_1^{d+1} \delta(a_1 - a_2). \tag{11}$$

Заметим, что коммутационные соотношения (11), построенные на основании принципа соответствия, по-видимому, не являются единственно возможным типом коммутационных соотношений для многомасштабных полей.

Благодарности. Автор признателен проф. Е. В. Щепину за ряд полезных замечаний и стимулирующее обсуждение, а также анонимному рецензенту, косвенно указавшему на проблемы, возникающие при квантовании безмассового поля, и ряд других неточностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н. Н.* Условие причинности в квантовой теории поля // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1955. Т. 19, вып. 2. С. 237–246.

2. *Federbush P.* A new formulation and regularization of gauge theories using a non-linear wavelet expansion // Progr. Theor. Phys. 1995. V. 94. P. 1135–1146.

3. *Altaisky M. V.* Quantum states of hierarchic systems // Intern. J. Quant. Inform. 2003. V. 1, No. 2. P. 269–278.

4. *Белинцев Б. Н.* Физические основы биологического формообразования. М.: Наука, 1991. 256 с.

5. *Altaisky M. V.* Wavelets: Theory, Applications, Implementation. Hyderabad: Universities Press, 2005. 155 p.

6. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.

Получено 21 февраля 2005 г.