Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4, № 6(142). С. 749–756

АРЕАЛЬНЫЕ ОБЪЕКТЫ И ПРОБЛЕМА: λ-ЧЛЕН В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

Н. А. Черников, *Н. С. Шавохина*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Рассмотрены следующие ареальные объекты: эфирная нить, стягивающая две материальные точки, и многомерная сферическая эфирная пленка в псевдоевклидовом мире событий. Построена эфирная модель пространства-времени с произвольно заданной римановой метрикой, и обсужден в связи с этим вопрос о λ-члене в уравнениях Эйнштейна.

Consideration is given to the following areal objects: an aether fibre drawing up two material points and a many-dimensional spherical aether membrane in the pseudo-Euclidean world of events. The space-time aether model with an arbitrarily given Riemannian metric is constructed and the λ-term problem in the Einstein equations is considered in this connection.

PACS: 11.25.-w

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с работой [1] материальные объекты, в основе описания которых лежит ареальная метрика Вагнера, задаваемая в мире событий, называются ареальными.

Если метрика Вагнера определяется через метрику Римана, то в соответствии с работами [2, 3] ареальные объекты называются эфирными.

Действие сложного эфирного объекта равняется сумме действий элементарных объектов, входящих в состав сложного. В соответствии с работами [2, 3] элементарные объекты называются m-пленками, где число m означает размерность пленки. Составные эфирные объекты рассмотрены в работах [4–14].

Здесь рассматриваются эфирные объекты в мире с метрикой Минковского

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^1 dx^1 + \ldots + dx^n dx^n - c^2 dt dt = d\mathbf{r} d\mathbf{r} - c^2 dt dt, \tag{1}$$

где c — скорость света; $t = x^0$ — время; $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты.

В каждый момент времени m-пленка занимает свое место — зависящую от этого момента времени m-мерную область в $(n+1)$-мерном мире Минковского. За время своего существования m-пленка заметает в этом мире $(m+1)$-мерную поверхность.

Действие m-пленки

$$S_m = G_m V_{m+1} = G_m \int dV_{m+1} \tag{2}$$

равняется площади заметаемой ею мировой поверхности, умноженной на константу взаимодействия G_m.

Если заметаемая поверхность задается уравнениями

$$x^\alpha = x^\alpha(u^0, u^1, \ldots, u^m), \tag{3}$$

то метрика (1) на ней принимает вид

$$ds^2 = f_{kl} du^k du^l, \quad f_{kl} = \eta_{\mu\nu} \xi_k^\mu \xi_l^\nu, \quad \xi_k^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^k}, \tag{4}$$

а элемент ее площади равняется

$$dV_{m+1} = \frac{1}{c}\sqrt{-f_m}\, du^0 du^1 \ldots du^m, \quad f_m = \det(f_{kl}). \tag{5}$$

Здесь и дальше все тензорные латинские индексы принимают значения от 0 до m, а все тензорные греческие индексы — от 0 до n, причем $n > m$.

Как доказано в работе [2], если $G_m \neq 0$, то на мировой поверхности, заметаемой эфирной m-пленкой в мире с тензором Римана $g_{\alpha\beta}$ и связностью Кристоффеля $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, условие $\delta S_m = 0$ эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{\sqrt{-f_m}} \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\sqrt{-f_m} f^{kl} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^l}\right) + f^{kl}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial u^k}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^l} = 0, \tag{6}$$

где в общем случае, наряду с (2), (3) и (5),

$$f_{kl} = g_{\alpha\beta}(x^0, x^1, \ldots, x^n) \xi_k^\alpha \xi_l^\beta, \quad f^{ks} f_{sl} = \delta_l^k.$$

Поверхность, задаваемую уравнениями (8), мы называем геодезической.

В частном случае, когда $g_{\alpha\beta}(x^0, x^1, \ldots, x^n) = \eta_{\alpha\beta}$, система уравнений (6) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{\sqrt{-f_m}} \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\sqrt{-f_m} f^{kl} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^l}\right) = 0, \tag{7}$$

так что на геодезической поверхности аффинные координаты x^α являются гармоническими функциями параметров u^k.

Перейдем теперь к рассмотрению ареальных объектов и обсуждению вопроса о λ-члене в эйнштейновых уравнениях тяготения.

1. ЭФИРНАЯ НИТЬ, СТЯГИВАЮЩАЯ ДВЕ МАТЕРИАЛЬНЫЕ ТОЧКИ

Пример эфирной нити, стягивающей с силой F две материальные точки с массами M_1 и M_2, в случае $n = 1$ рассмотрен в работе [5]. Здесь мы приведем новый вывод лагранжиана L такой системы.

Прежде всего заметим, что эфирная нить — это эфирная 1-пленка. Константа взаимодействия G_1 равна $G_1 = -F$.

Затем заметим, что материальные точки — это эфирные 0-пленки. Константа взаимодействия G_0 равна $G_0 = -Mc^2$, где M — масса материальной точки.

Полагая $x^0 = t = u^0$ и $m = 0$, при любом n находим

$$f_0 = -c^2 + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \tag{8}$$

$$dV_1 = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}\, dt, \qquad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \tag{9}$$

$$S_0 = -Mc^2 \int \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}\, dt. \tag{10}$$

Полагая $x^0 = t = u^0$, $x^1 = x = u^1 = u$, при $m = n = 1$ находим

$$f_1 = -c^2 \frac{dx}{du}\frac{dx}{du}, \quad dV_2 = \frac{dx}{du} du^0 du^1 = dtdx, \tag{11}$$

$$S_1 = -F \iint dtdx = F \int x_1(t)dt - F \int x_2(t)dt, \tag{12}$$

где $x_1(t), x_2(t)$ — координаты материальных точек в момент времени t, а неравенства $x_1(t) < x < x_2(t)$ задают отрезок, занимаемый нитью в тот же момент времени t.

Из (10) и (12) следует, что лагранжиан L равняется

$$L = -M_1 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_1^2}{c^2}} + Fx_1 - M_2 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_2^2}{c^2}} - Fx_2. \tag{13}$$

Этот пример при $n > 1$ подробно рассмотрен в работах [5–12].

2. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, ЗАМЕТАЕМАЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ЭФИРНОЙ m-ПЛЕНКОЙ В $(m+2)$-МЕРНОМ МИРЕ СОБЫТИЙ

Многомерная сферическая эфирная пленка впервые рассмотрена в работе [15]. Здесь мы рассмотрим ее подробней.

Центр m-пленки считаем покоящимся в начале координат $x^1, \ldots, x^{m+1}$.

Сначала рассмотрим геодезическую поверхность, заметаемую круговой эфирной нитью. В этом случае $m = 1,\ n = 2$.

Уравнения (3) принимают следующий вид:

$$x^0 = t, \quad x^1 = x = r(t)\cos\varphi, \quad x^2 = y = r(t)\sin\varphi, \quad t = u^0, \varphi = u^1. \tag{14}$$

На такой поверхности метрика (1) равняется

$$ds^2 = (\dot{r}^2 - c^2)dt^2 + r^2 d\varphi^2, \tag{15}$$

а элемент ее площади равняется

$$dV_2 = r\sqrt{1 - \dot{r}^2/c^2}\, dtd\varphi, \tag{16}$$

так что $\dot{r}^2 < c^2$. Уравнения (7) принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{r}{\sqrt{1 - \dot{r}/c^2}} = 0, \quad \alpha = 0, \tag{17}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{c^2 r\sqrt{1 - \dot{r}^2/c^2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{r}{\sqrt{1 - \dot{r}^2/c^2}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\right) = 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{18}$$

Подставляя сюда (14), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{r\dot{r}}{\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}}+c^2\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}=0 \tag{19}$$

для радиальной функции $r = r(t)$, удовлетворяющееся, если удовлетворяется дифференциальное уравнение (17), так как

$$\frac{d}{dt}\frac{r\dot{r}}{\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}}+c^2\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}=\frac{c^2}{\dot{r}}\frac{d}{dt}\frac{r}{\sqrt{1-\dot{r}/c^2}}. \tag{20}$$

Остается решить уравнение (17), из которого следует, что

$$\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}=\Omega r, \tag{21}$$

где Ω — константа интегрирования. Отсюда находим

$$\frac{dr}{dt}=c\sqrt{1-(\Omega r)^2}. \tag{22}$$

Следовательно,

$$\Omega c(t-t_0)=\int\limits_0^{\Omega r}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \tag{23}$$

где t_0 — вторая константа интегрирования, а отсюда находим

$$\Omega r=\sin\Omega c(t-t_0). \tag{24}$$

Теперь рассмотрим геодезическую поверхность, заметаемую сферической эфирной m-пленкой. В этом, общем, случае $n = m + 1$.

Уравнения (3) такой поверхности принимают следующий вид:

$$x^0=t,\quad x^\alpha=r(u^0)n^\alpha(u^1,\dots,u^m),\quad \alpha=1,\dots,m+1, \tag{25}$$

$$u^0=t, u^1=\theta^1,\dots,u^m=\theta^m,$$

где t — время; $\theta^1,\dots,\theta^m$ — координаты на единичной сфере

$$\sum_{\alpha=1}^{m+1}n^\alpha n^\alpha=1, \tag{26}$$

так что

$$\sum_{\alpha=1}^{m+1}n^\alpha dn^\alpha=0,\quad \sum_{\alpha=1}^{m+1}dn^\alpha dn^\alpha=\sum_{k,l=1}^{m}\omega_{kl}(\theta^1,\dots,\theta^m)d\theta^k d\theta^l, \tag{27}$$

где

$$\omega_{kl}=\sum_{\alpha=1}^{m+1}\frac{\partial n^\alpha}{\partial\theta^k}\frac{\partial n^\alpha}{\partial\theta^l}. \tag{28}$$

На такой поверхности метрика (1) равняется

$$ds^2 = (\dot{r}^2 - c^2)dt^2 + r^2\omega_{kl}d\theta^k d\theta^l. \tag{29}$$

Элемент площади такой поверхности равняется

$$dV_n = r^m\sqrt{1 - \dot{r}^2/c^2}\,\sqrt{\omega}dtd\theta^1, \ldots, d\theta^m, \tag{30}$$

где ω — определитель матрицы (ω_{kl}). Согласно (30) $\dot{r}^2 < c^2$.

Уравнения (7) принимают следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{r^m}{\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}} = 0, \quad \alpha = 0, \tag{31}$$

$$\frac{1}{r^2}\Delta x^\alpha - \frac{1}{c^2 r^m\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{r^m}{\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}}\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\right) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{32}$$

где через Δ обозначен угловой оператор

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial}{\partial\theta^k}\sqrt{\omega}\omega^{kl}\frac{\partial}{\partial\theta^l}, \tag{33}$$

(ω^{kl}) — матрица, обратная к матрице (ω_{kl}).

Подставляя в (32) функции (25), поначалу получаем

$$\frac{1}{r}\left(\Delta - \frac{1}{c^2 r^m\sqrt{1-\dot{r}^2/c^2}}\frac{d}{dt}\frac{r^m\dot{r}}{\sqrt{1-\dot{r}/c^2}}\right)n^\alpha(\theta^1, \ldots, \theta^m) = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m. \tag{34}$$

Теперь докажем, что

$$(\Delta + m)n^\alpha(\theta^1, \ldots, \theta^m) = 0. \tag{35}$$

Для этого рассмотрим $m+1$ функций $x^\alpha = rn^\alpha(\theta^1, \ldots, \theta^m)$ от $m+1$ независимых переменных $r, \theta^1, \ldots, \theta^m$, для которых имеем

$$dx^\mu dx^\mu = dr^2 + r^2\omega_{kl}d\theta^k d\theta^l, \tag{36}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{1}{r^m}\frac{\partial}{\partial r}r^m\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta. \tag{37}$$

Применяя последний оператор к функциям $x^\alpha = rn^\alpha$, получаем равенство

$$\frac{1}{r}(m+\Delta)n^{\alpha}(\theta^1,\ldots,\theta^m)=0, \tag{38}$$

а следовательно, и равенство (35).

Подставляя в (34) равенство (35), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{r^m\dot r}{\sqrt{1-\dot r^2/c^2}}+mc^2r^{m-1}\sqrt{1-\dot r^2/c^2}=0 \tag{39}$$

для радиальной функции $r=r(t)$. Уравнение (39) удовлетворяется, если удовлетворяется уравнение (31), так как

$$\frac{d}{dt}\frac{r^m\dot r}{\sqrt{1-\dot r^2/c^2}}+mc^2r^{m-1}\sqrt{1-\dot r^2/c^2}=\frac{c^2}{\dot r}\frac{d}{dt}\frac{r^m}{\sqrt{1-\dot r^2/c^2}}. \tag{40}$$

Остается решить уравнение (31), из которого следует, что

$$\sqrt{1-\dot r^2/c^2}=(\Omega r)^m, \tag{41}$$

где Ω — константа интегрирования. Отсюда находим

$$\frac{dr}{dt}=c\sqrt{1-(\Omega r)^{2m}}. \tag{42}$$

Следовательно,

$$\Omega c(t-t_0)=\int\limits_0^{\Omega r}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2m}}}, \tag{43}$$

где t_0 — вторая константа интегрирования.

Замена

$$\Omega r=\rho,\quad \Omega c(t-t_0)=u \tag{44}$$

приводит нас к случаю $\Omega=1,\ t_0=0$ и к интегралу

$$u=\int\limits_0^{\rho}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2m}}}. \tag{45}$$

Отсюда при $m=1$ получается тригонометрическая функция $\rho=\sin u$, а при $m=2$ — лемнискатная функция $\rho=\sin\ \mathrm{lemn}\ u$ (см. [16]). При любом значении m интеграл (45) задает периодическую зависимость ρ от u.

Наконец заметим, что, согласно (41) и (42), метрика (29), умноженная на константу Ω^2, равняется

$$\Omega^2ds^2=\rho^2\omega_{kl}(\theta^1,\ldots,\theta^m)d\theta^kd\theta^l-\frac{\rho^{2m}d\rho^2}{1-\rho^{2m}}. \tag{46}$$

3. ЭФИРНАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И НОВЫЙ ПОДХОД К ВОПРОСУ О λ-ЧЛЕНЕ В ГРАВИТАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ ЭЙНШТЕЙНА

В работе [2] мы доказали, что при $m = n$ равенство (6) эквивалентно известному тождеству

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}g^{\mu\alpha}) + g^{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0, \tag{47}$$

так что всякое риманово пространство-время является геодезическим.

В порядке проверки этой эквивалентности заметим, что в случае $m = n$ можно положить $x^\alpha = u^\alpha$ и тогда $f_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\xi^\mu_\alpha\xi^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}$, а тождество (6) непосредственно переходит в тождество (47).

Полагая $G_n \neq 0$, мы приходим к модели риманова пространства-времени, заметаемого эфирной массой.

Этот результат дает положительный ответ на актуальный вопрос о необходимости введения λ-члена в уравнения тяготения

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4}T_{\mu\nu}. \tag{48}$$

Считая, что все четырехмерное пространство-время заметается эфирной массой, и добавляя к тензору $T_{\mu\nu}$ тензор энергии-импульса эфирной массы (равный $Pg_{\mu\nu}$, см. [3, с. 9]), заметающей все пространство-время, получаем уравнения

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi\gamma}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{49}$$

где

$$\lambda = \frac{8\pi\gamma}{c^4}P. \tag{50}$$

Наряду с постоянной Ньютона, равной (см. [17, с. 230], [18, с. 219])

$$\gamma = \frac{1}{150\,000\,000}\ \frac{\text{см}^3}{\text{г}\cdot\text{с}^2}\ , \tag{51}$$

в правую часть равенства (50) входит давление эфирной массы, равное константе $P = G_3$.

О ранней истории введения λ-члена в гравитационные уравнения см. [18, с. 239].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шавохина Н. С.* Ареальные модели релятивистских пространственно ограниченных объектов // Гравитация и электромагнетизм. Минск: Университетское, 1988. С. 268–272.

2. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Дифференциальные уравнения времениподобных геодезических поверхностей в римановом пространстве-времени // Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3, № 6(135). С. 113–122.

3. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Тензор энергии-импульса ареальных объектов в римановом пространстве-времени // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4, № 1(37). С. 7–14.

4. *Шавохина Н. С.* Примеры ареальных объектов: система двух тел, сферическая мембрана, мир де Ситтера. Сообщ. ОИЯИ Р2-89-183. Дубна, 1989.

5. *Шавохина Н. С.* Одномерное релятивистское движение двух тел с постоянной по модулю силой взаимодействия // Изв. вузов. Физика. 1982. № 7. С. 66–69.

6. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Пример релятивистской задачи двух тел. I. Краевая задача для минимальной поверхности // ТМФ. 1980. Т. 42, № 1. С. 59–69.

7. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Пример релятивистской задачи двух тел. II. Уравнения движения // ТМФ. 1980. Т. 43, № 3. С. 356–366.

8. *Шавохина Н. С.* Краевая задача для минимальной поверхности в трехмерном мире Минковского // Изв. вузов. Физика. 1981. № 7. С. 91–93.

9. *Шавохина Н. С.* Релятивистская задача двух одинаковых тел с постоянной по величине силой притяжения // Докл. АН СССР. 1983. Т. 265, № 4. С. 852–855.

10. *Шавохина Н. С.* Круговое релятивистское движение двух одинаковых тел // Изв. вузов. Физика. 1983. № 12. С. 46–51.

11. *Черников Н. А., Шавохина Н. С.* Специальная формулировка релятивистской задачи двух тел // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц: Сб. М.: Энергоатомиздат, 1984. Вып. 14. С. 113–119.

12. *Шавохина Н. С.* О круговом релятивистском движении двух одинаковых тел // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц: Сб. М.: Энергоатомиздат, 1985. Вып. 15. С. 141–149.

13. *Шавохина Н. С.* Релятивистская система двух одинаковых тел с собственной осью времени на поверхности взаимодействия // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц: Сб. М.: Энергоатомиздат, 1986. Вып. 17. С. 187–194.

14. *Шавохина Н. С.* Ареальные объекты в физике взаимодействия релятивистских частиц // Проблемы квантовой теории поля: Тр. VIII Междунар. совещ. по проблемам квантовой теории поля, Алушта, 1987. Дубна, 1987. С. 246–255.

15. *Шавохина Н. С.* Тензор энергии-импульса ареального объекта // Тр. Междунар. семинара «Гравитационная энергия и гравитационные волны», Дубна, 11–13 мая 1988 г. Дубна, 1989. С. 31–38.

16. *Уиттекер Е. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Ч. II. Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963. С. 420–421.

17. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. М., 1955.

18. *Паули В.* Теория относительности. М.: Наука, 1991.

Получено 6 декабря 2006 г.