Письма в ЭЧАЯ. 2006. Т. 3, № 7(136). С. 27–32

УДК 621.384.6.01(075.8)

ОСОБЕННОСТИ РЕЖИМОВ ЛСЭ С КОРОТКИМ СГУСТКОМ

А. Н. Лебедев

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

Обсуждаются физические особенности лазера на свободных электронах коротковолнового диапазона, когда длина сгустка в собственной системе отсчета меньше длины ондулятора в той же системе. Токовая составляющая сигнала оказывается при этом запертой в сгустке как в резонаторе, в то время как радиационная свободно уходит из него. В отличие от аналогичной ситуации в гиротронах длина волны остается гораздо меньше длины сгустка, что позволяет считать профиль последнего произвольным. Рассмотрены режимы усиления гармонического входного сигнала и индуцированного усиления собственных шумов с формированием квазикогерентного излучения (режим SASE).

The report is devoted to physics of free electron lasers operating in the short-wave domain where the bunch length could be less than the undulator length in the proper frame. Then the current component of the signal is locked within the bunch as in a cavity, while the electromagnetic component propagates freely. In contrast with gyrotrons where this regime can be of interest only for wavelengths comparable with the bunch length, we consider short waves in a bunch of arbitrary profile. Both amplification of an external harmonic signal and SASE regime, i.e. selective amplification of proper noises, are investigated.

Из-за отсутствия адекватной оптики лазеры на свободных электронах (ЛСЭ) коротковолнового (УФ и короче) диапазона могут работать только в режиме прямого усиления электронными сгустками небольшой длины, определяемой особенностями ускорителя-драйвера. Обычно из-за сильного релятивизма ($\gamma \gg 1$) основная часть усиливаемого входного импульса или собственные шумы в режиме индуцированного усиления спонтанных шумов (SASE) так и не успевают достигнуть головной части сгустка на ограниченной длине ондулятора L. В этом смысле сгусток можно считать длинным, имея в виду превышение его длины l'_b над длиной ондулятора в собственной системе отсчета L', или в лабораторной системе:

$$l_b \gg L/\gamma^2.$$

Вместе с тем общая тенденция падения коэффициента усиления с уменьшением длины волны заставляет увеличивать пиковый ток пучка за счет уменьшения длины сгустка. Короткие сгустки необходимы также для уменьшения энергетического разброса пучка при росте его энергии. В результате всех этих обстоятельств обратное условие короткого сгустка:

$$l_b \ll L/\gamma^2,$$

может оказаться вполне реальным уже для существующих проектов.

Режим коротких сгустков рассматривался при получении мощных импульсов излучения в гиротронах [1], но там основной интерес представляли длины волн, сравнимые с

L. Однако в ЛСЭ даже с экстремальными параметрами сгустки пикосекундной длительности остаются все же гораздо больше длины волны. Излучение в них должно иметь характер квазикогерентного пакета небольшой длительности: порядка $L/\gamma^2 c$ с несущей частотой $k_u c\beta/(1-\beta)$, где k_u — волновое число ондулятора, а β — продольная скорость. Поэтому некоторые представления об усилении квазигармонического сигнала в такой системе должны быть пересмотрены.

Будем считать, что равновесная плотность одномерного сгуска ϱ_0 зависит только от комбинации времени и расстояния вида $\zeta = (\beta ct - z)$, имеющей смысл координаты внутри сгустка, отсчитываемой от его головы. Тем не менее в отличие от длинного сгустка задача остается нестационарной и должна решаться с граничными и начальными условиями. Для этого удобнее перейти от переменных (z,t) к переменным (z,ζ) и искать решение для вектор-потенциала резонансной волны A_w и продольного электрического поля $E_\|$ в виде

$$A_w = A(z,\zeta)\exp\left[i\omega\left(z/c - t\right) + i\delta z\right]; \quad E_\| = E(z,\zeta)\exp\left[i\omega\left(z/\beta c - t\right)\right], \tag{1}$$

где $A(z,\zeta)$ и $E(z,\zeta)$ — медленные функции своих аргументов, $\delta = \omega(1-\beta)/\beta c - k_u$ — параметр расстройки, т. е. мера отклонения частоты ω от резонансного значения $k_u\beta/(1-\beta)$, определяемого волновым числом ондулятора k_u. В результате имеем систему, следующую из уравнений Максвелла и Эйлера:

$$\begin{gathered}\left[c^2\beta^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + {\omega_p}^2\right]E\left(z,\zeta\right) = \frac{iqk_u{\omega_p}^2}{mc^2\gamma}A\left(z,\zeta\right);\\ \left[\frac{\partial}{\partial z} - \left(1-\beta\right)\frac{\partial}{\partial\zeta} + i\delta\right]A(z,\zeta) = \frac{qA_u}{2mc^2\gamma\beta}E(z,\zeta),\end{gathered} \tag{2}$$

где $\omega_p^2 = 4\pi q\varrho_0(\zeta)/mc\gamma^3$ — квадрат локальной ленгмюровской частоты продольных колебаний в пучке (с учетом релятивизма), а A_u — амплитуда резонансной гармоники вектор-потенциала ондулятора.

Система уравнений (2) указывает на существование двух колебательных парциальных подсистем, связанных через поле ондулятора. Одна из них включает в себя плазменные продольные колебания внутри сгустка, переносимые им со средней скоростью βc и являющиеся, по существу, волнами пространственного заряда, «запертыми» в сгустке, как в резонаторе. В отсутствие связи их амплитуда может быть произвольной функцией координаты ζ. Вторая, как легко проверить, представляет собой свободные поперечные электромагнитные волны произвольной частоты ω, распространяющиеся с фазовой скоростью c. Как и в однородном пучке, связь между ними приводит к радиационной неустойчивости, которую, однако, теперь нельзя отнести ни к абсолютному, ни к конвекционному типу, поскольку упомянутый «резонатор» сам перемещается с релятивистской скоростью. Кстати, в случае длинного сгустка $(\partial/\partial\zeta = 0)$ связь дает известное асимптотическое экспоненциальное нарастание амплитуд вдоль z с комплексным инкрементом $\Gamma(\delta)$, являющимся корнем дисперсионного уравнения

$$\left(\Gamma + i\delta\right)\left(\Gamma^2 + \omega_p^2/\beta^2 c^2\right) = i\Gamma_0^3; \quad \Gamma_0 = \left(\frac{q^2 k_u A_u \omega_p^2}{2\beta^3\left(mc^3\gamma\right)^2}\right)^{1/3}, \tag{3}$$

имеющим наибольшую отрицательную мнимую часть. Отметим, что величина $\left(\sqrt{3} + i\right)\Gamma_0/2$ играет эту роль в комптоновском режиме при нулевой расстройке.

В неоднородном пучке внутри сгустка волна не имеет определенного волнового числа. Кроме того, как уже упоминалось, задача должна решаться с определенными начальными и граничными условиями, за которые для упрощения мы выберем амплитуду волны, продольное поле и его производную на входе в систему, хотя физически более осмысленно было бы задание модуляции плотности и скорости, которые просто, но громоздко связаны с двумя последними величинами.

В общем случае уравнения (2) с начальными условиями $A(0,\zeta)$; $E(0,\zeta)$; $\dot{E}(0,\zeta)$, где точка означает дифференцирование по z при постоянном ζ, нетрудно свести к дифференциальному неоднородному уравнению первого порядка для трансформанты Лапласа $\mathcal{A}(p,\zeta)$:

$$\left[\left(p^2+\frac{\omega_p^2}{\beta^2c^2}\right)\left(p+i\delta-i(1-\beta)\frac{d}{d\zeta}\right)-i\Gamma_0^3\right]\mathcal{A}\,(p,\zeta)=F\,(p,\zeta), \qquad (4)$$

где

$$F\,(p,\zeta)=A(0,\zeta)\left(p^2+\frac{\omega_p^2}{\beta^2c^2}\right)+\frac{qA_u}{2mc^2\gamma\beta}\left(\dot{E}(0,\zeta)+pE(0,\zeta)\right). \qquad (5)$$

Для конкретизации начальных условий (5), вообще говоря, надо учитывать некоторые особенности ондулятора, включая специфику распределения его поля на входе. Эти вопросы относятся, скорее, к расчету конкретной установки. Мы же будем считать ондулятор «мгновенно включенным» в точке $z=0$, игнорируя тем самым детали фронтов импульса выходного излучения на отрезках времени, меньших времени пролета переходного участка.

Учитывая, что при $\zeta\to-\infty$ поле отсутствует, решение (4) можно найти в общем виде. Для определения зависимости поля от времени и координаты следует подставить в полученное решение профиль плотности заряда в сгустке ${\omega_p}^2(\zeta)$ и произвести обратное преобразование Лапласа.

К сожалению, эта программа приводит в общем виде к довольно громоздким выражениям, все равно требующим для своей интерпретации того или иного модельного распределения плотности по сгустку. Поэтому мы сразу положим $\omega_p=\mathrm{const}$ при $0<\zeta<l_b$, где l_b — длина сгустка.

Усиление внешнего гармонического сигнала. При расчете усиления внешнего сигнала естественно считать, что начальные значения продольного поля и его производной равны нулю (начальная модуляция плотности заряда и тока в сгустке отсутствует), а в точке $z=0$ поддерживается гармонический сигнал постоянной (единичной) амплитуды и заданной частоты $\omega=\beta c\,(k_u+\delta)\,/\,(1-\beta)$. Другими словами,

$$A(0,\zeta)=1;\quad \dot{E}(0,\zeta)=E(0,\zeta)=0.$$

Тогда для поля внутри сгустка имеем

$$\mathcal{A}=-\frac{i}{P}\left(\exp\,P\,\frac{(l_b-\zeta)}{1-\beta}-1\right);\quad P=-ip+\delta-\frac{\Gamma_0^3}{p^2+\omega_p^2/\beta^2c^2}. \qquad (6)$$

При оговоренных предположениях обратное преобразование (6) непосредственно дает распределение коэффициента усиления по сгустку, определяя форму импульса выходного излучения.

На комплексной плоскости $\mathcal{A}(p)$ имеет две существенно особых точки при $p = \pm\omega_p$. Однако при $z \to \infty$ возможна асимптотическая оценка, если провести контур интегрирования через седловую точку p_0, являющуюся тем решением уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial p} = -Z; \quad Z = z\frac{1-\beta}{l_b - \zeta}, \tag{7}$$

которое имеет наибольшую положительную часть. Для упрощения будем далее рассматривать типичный комптоновский режим, когда за время пролета системы плазмон еще не успевает образоваться. Тогда можно пренебречь слагаемым ω^2/β^2c^2 и

$$p_0 = \frac{2^{1/3}\Gamma_0}{\left(1+Z^2\right)^{1/6}} \exp\left[-\frac{i}{3}\left(\pi - \operatorname{arctg} Z^{-1}\right)\right]. \tag{8}$$

Стандартная процедура метода перевала через эту точку дает при $\delta = 0$:

$$|A| \simeq \frac{\exp\left[2^{-2/3}3Z_b\left(1+Z^2\right)^{1/3}\cos\left(\left(\pi + 2\operatorname{arctg} Z^{-1}\right)/3\right)\right]}{Z_b^{1/2}\left(1+Z^2\right)^{2/3}}; \quad Z_b = \frac{l_b-\zeta}{1-\beta}\Gamma_0. \tag{9}$$

Здесь и далее для экономии места мы опускаем численные коэффициенты и фазовые множители, интересуясь только функциональной зависимостью амплитуды сигнала от параметров z, ζ и l_b.

Полученное выражение показывает, во-первых, что с расстоянием, пройденным сгустком, амплитуда поля растет медленнее, чем экспоненциально (медленнее, чем $\exp\left(\mathrm{const}\, z^{2/3}\right)$), особенно в начале системы. Во-вторых, поле резко неоднородно внутри сгустка, поскольку усиление мало на его хвосте. И то, и другое связано с эффектом «летаргии», обусловленным проскальзыванием волнового пакета вперед относительно сгустка. Кстати, небольшое контролируемое проскальзывание могло бы оказаться полезным для получения ультракоротких импульсов, интересных для ряда приложений.

На малом уровне сигнала эти асимптотические формулы, конечно, не применимы.

Режим SASE. Режим усиления собственных шумов (SASE) требует отдельного обсуждения. В линейном режиме ондуляторная часть ЛСЭ-усилителя играет роль активного полосового фильтра с неравномерным по полосе коэффициентом усиления. Это означает, что спектральная плотность сигнала будет меняться с увеличением z, причем полоса некогерентного входного шума будет постепенно сужаться. Другими словами, радиационное поле будет стремиться к когерентному с пространственно-временными характеристиками, приближающимися к характеристикам основной моды. Ясно, однако, что такое установление когерентности может происходить лишь на длине, существенно превышающей характерную длину радиационной неустойчивости.

Как и в устройствах традиционной электроники с распределенным взаимодействием типа «лампы бегущей волны», основным источником стохастического сигнала является дробовой шум, связанный с дискретностью электронов в пучке. Разница состоит лишь в том, что его следствием будет не собственный шум усилителя, а в некотором смысле полезный эффект — выходное квазикогерентное излучение, получаемое в условиях очень большого селективного усиления в узкой полосе частот.

Есть и еще одна особенность режима SASE коротковолнового ЛСЭ, связанная с малой плотностью пучка как «рабочего тела». Для того чтобы начальная флуктуация поля могла усилиться до уровня насыщения, она сама должна быть по абсолютной величине достаточно велика, т. е. в ее создании должно участвовать достаточно большое количество электронов. Это «кооперативное число» n_c может быть оценено как число излучателей в λ^3-объеме (в собственной системе отсчета). В «лампе бегущей волны» даже миллиметрового диапазона это число велико, но режим SASE вряд ли осуществим из-за относительно малой длины взаимодействия и, соответственно, недостаточного коэффициента усиления. Что же касается ЛСЭ, то простая оценка по порядку величины дает в собственной системе отсчета, обозначенной штрихом, $n_c \approx \varrho_0' {\lambda'}^3/q$. В лабораторной системе $n_c \approx \varrho_0 \lambda^2 l_u/q$, где учтено, что $\varrho_0' = \varrho_0/\gamma$; $\lambda' = \lambda\gamma$; период ондулятора $l_u \approx \lambda\gamma^2$, а n_c является релятивистским инвариантом. Нетрудно видеть, что с практическим ограничением $l_u > 1$ см в рентгеновском диапазоне условие $n_c \gg 1$ можно выполнить далеко не всегда.

Формально малая плотность пучка могла бы быть скомпенсирована увеличением длины взаимодействия, но помимо технической приемлемости такого решения возникает вопрос о применимости использованных представлений уже при $n_c \approx 1$. Действительно, для частиц, подчиняющихся статистике Пуассона, относительная флуктуация числа частиц в кооперативном объеме λ^3 есть $n_c^{-1/2}$. Другими словами, использованная выше теория усиления малого сигнала может быть неприменимой при малых n_c из-за очень большой относительной модуляции плотности рабочего тела. Поэтому лишь при $n_c \gg 1$ флуктуации плотности входного тока наверняка можно считать возмущениями.

Постановка задачи об усилении собственных шумов отличается от рассмотренной выше начальными условиями, а также статистической интерпретацией результата. При $z = 0$ в сгустке существует случайная модуляция плотности и скорости, т. е. продольное электрическое поле $E(0,\zeta)$ и его производная $\dot{E}(0,\zeta)$. Кроме того, существует и начальное поперечное поле $A(0,\zeta)$, связанное со спонтанным излучением при входе в ондулятор. Спектр шумовых возмущений обычно можно считать равномерным в пределах полосы усиления. Реальная статистика начальных шумов в сгустке, т. е. корреляционные соотношения между $A(0,\zeta)$, $E(0,\zeta)$ и $\dot{E}(0,\zeta)$, требует специального рассмотрения, так как сильно зависит от параметров драйвера, канала транспортировки и условий входа в ондулятор.

Во избежание недоразумений следует отметить, что параметр δ не является теперь внешним, а характеризует гармонику Фурье шумового возмущения. Поэтому квадрирование поля и последующее статистическое усреднение связывает спектральную плотность среднего потока мощности излучения со спектральной плотностью шумов.

По-прежнему опуская для экономии места очевидные коэффициенты, запишем решение (4) в виде

$$\mathcal{A} = \int\limits_{l_b}^{\zeta} \exp\left[P\left(\zeta - x\right)\right] F(p,x)dx. \tag{10}$$

Точка перевала определяется все той же формулой (7), только с заменой Z на $Z = z(1-\beta)/(\zeta - x)$. При $z \to \infty$

$$A \simeq \int\limits_{l_b}^{\zeta} \frac{F\left(p_0, x\right)}{\sqrt{\left(\partial^2 P/\partial p^2\right)_0}} \exp\left[p_0 z - P_0\left(\zeta - x\right)\right] dx. \tag{11}$$

Будем для простоты считать, что в интересующей нас полосе частот $F(p_0, x)$ является белым шумом со спектральной плотностью W_0:

$$\langle F(p_0, x)F(p_0, x')\rangle = W_0(x)\delta(x - x'). \tag{12}$$

Возводя (11) в квадрат и проводя интегрирование с δ-функцией, находим непосредственно спектральную плотность выходного процесса:

$$\langle A(z,\zeta)A^*(z,\zeta')\rangle \simeq \int\limits_{l_b}^{\zeta} \frac{W_0(x)}{|\partial^2 P/\partial p^2|_0} \exp\left[2\mathrm{Re}\left(p_0 z - P_0\left(\zeta - x\right)\right)\right] dx. \tag{13}$$

Поскольку распределение частиц пучка подчиняется статистике Пуассона, то начальная мощность шума должна быть пропорциональна равновесной плотности, т. е. $W_0(x) \propto \varrho(x)$ с коэффициентом пропорциональности, зависящим от геометрии камера и пучка.

Асимптотическое поведение огибающей выходного сигнала отличается от рассмотренного выше гармонического сигнала лишь малосущественными деталями. Основной интерес в данном контексте представляет эволюция его спектральной плотности, описываемая зависимостью от параметра δ. К сожалению, детальный анализ выражения (13) довольно сложен и громоздок. Впрочем, можно утверждать, что на вершине импульса, приходящего в удаленную фиксированную точку наблюдения, спектральная полоса узка и сигнал почти гармоничен, в то время как пьедестал остается стохастическим.

В качестве специфической особенности усиления коротким сгустком собственных шумов надо отметить еще один не учтенный выше эффект. Вообще говоря, в выходной мощности есть еще слагаемое, генерируемое $A(0,\zeta)$ и связанное со спонтанным излучением коллектива частиц, не являющихся статистически независимыми даже в начальной точке, так как они составляют геометрически ограниченный сгусток. Это дает основание назвать такое излучение частично когерентным спонтанным излучением [3].

Повторим еще раз, что корреляционные свойства входного шума требуют отдельного анализа. Так, например, в рамках «пичковой» модели собственных шумов [2] при малом проскальзывании волнового пакета относительно сгустка можно ожидать сохранения в выходном сигнале коротких «пичков», что принципиально важно для некоторых экспериментов с высоким временны́м разрешением. Впрочем, по нашему мнению, обоснованность этой модели, как и всей концепции SASE, еще требует экспериментальной проверки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гинзбург Н. С.* // Письма ЖЭТФ. 1988. Т. 14. С. 440;
Гинзбург Н., Новожилова Ю. // Письма ЖЭТФ. 1989. Т. 15. С. 60.

2. *Saldin E. L., Schneidmiller E. A., Yurkov M. V.* The Physics of Free Electron Lasers. Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.

3. *Zhirong Huang, Kwan-Je Kim* // Nucl. Instr. Meth. A. 2000. V. 445. P. 105.