Р4-2018-61

В. В. Пупышев

ПРАВИЛО КВАНТОВАНИЯ БОРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА В СЛУЧАЕ УБЫВАЮЩЕГО СТЕПЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА

Направлено в «Журнал экспериментальной и теоретической физики»

* E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

Пупышев В. В. P4-2018-61

Правило квантования Бора–Зоммерфельда в случае убывающего степенного потенциала

Исследуется финитное трехмерное движение квантовой частицы в поле потенциала $V(r) = -V_0 r^{-\alpha}$ с параметрами $V_0 > 0$ и $\alpha \in (0, 2)$. Дан анализ асимптотического уравнения, эквивалентного правилу квантования Бора–Зоммерфельда. В результате получено простое и явное приближение для энергий слабосвязанных состояний такой частицы.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2018

Pupyshev V. V. P4-2018-61

Bohr–Zommerfeld Quatization Rule in the Case of Decreasing Power Potential

We study the finite three-dimensional movement of a quantum particle in the field of the potential $V(r) = -V_0 r^{-\alpha}$ with the parameters $V_0 > 0$ and $\alpha \in (0, 2)$. We analyse the asymptotic equation which is equivalent to the Bohr–Zommerfeld quantization rule. As a result, we derive a simple and explicit approximation for the energies of weakly bound states of this particle.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2018

ВВЕДЕНИЕ

Для начала перечислим основные предположения. Пусть в трехмерном пространстве $\mathcal{R}^3$ стандартным образом [1] определена сферическая система координат $S_3(r,\theta,\varphi)$ с начальной точкой O. Предположим, что квантовая частица обладает массой m, полной энергией E и в системе $S_3(r,\theta,\varphi)$ имеет радиус-вектор $\mathbf{r}$. Будем считать точку O неподвижным силовым центром, воздействующим на квантовую частицу посредством притягивающего центрального дальнодействующего потенциала

$$V(r) = -V_0\, r^{-\alpha}, \quad V_0 > 0, \quad \alpha \in (0,2). \tag{1}$$

Трехмерное рассеяние квантовой частицы в поле потенциала типа (1) до сих пор не исследовано в полном объеме. За исключением кулоновского случая ($\alpha = 1$) точные решения задачи рассеяния и задачи на связанные состояния квантовой частицы в таком поле неизвестны. В работе [2] при условиях $\alpha \in (1,2)$ и $V_0 < 0$ или $V_0 > 0$ впервые найдены два первых слагаемых низкоэнергетических асимптотик парциальных фаз трехмерного рассеяния. Старшее слагаемое амплитуды трехмерного рассеяния при тех же условиях впервые получено в работе [3]. Авторы работ [2, 3] использовали метод построения асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром перед старшей производной [4].

Этот же метод применяется в настоящей работе для альтернативного доказательства правила квантования Бора–Зоммерфельда [1] и вывода простого приближения энергий слабосвязанных состояний квантовой частицы в поле медленно убывающего потенциала (1).

1. ИСХОДНАЯ РАДИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА НА СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ

По определению (1) степенной потенциал зависит только от расстояния r между квантовой частицей и силовым центром O и поэтому принадлежит классу сферически-симметричных потенциалов. Как известно [1], в случае потенциалов такого типа переменные r, θ и φ разделяются. Поэтому состояния $|E, \ell, m_\ell\rangle$ квантовой частицы характеризуются тремя сохраняющимися квантовыми числами: полной энергией E, угловым моментом $\ell = 0, 1, \dots$ и магнитным квантовым числом $m_\ell = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell$. По той же причине трехмерное уравнение Шредингера для полной волновой функции квантовой частицы сводится к счетной ($\ell = 0, 1, \dots$) совокупности радиальных уравнений Шредингера для радиальных волновых функций $\tilde{u}_\ell(r, E)$, не зависящих от квантового числа m_ℓ.

Волновая функция $u_\ell(r, E)$ связанного состояния $|E, \ell, m_\ell\rangle$, $E < 0$, квантовой частицы подчиняется радиальному уравнению Шредингера

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left[\partial_r^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] + V_0 \frac{1}{r^\alpha} + E \right\} \tilde{u}_\ell(r, E) = 0, \quad r > 0, \tag{2}$$

с условием

$$\tilde{u}_\ell(r, E) = O(r^{\ell+1}), \quad r \to 0, \tag{3}$$

и условием

$$\tilde{u}_\ell(r, E) = o(\rho^{-1/2}), \quad \rho = kr \to \infty, \quad k \equiv \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2} E}. \tag{4}$$

Сформулированная выше краевая задача (2)–(4) содержит константу Планка $\hbar$ и является исходной для наших исследований одномерной задачей на отрицательные собственные значения $E = E_{n\ell} < 0$. Согласно курсу квантовой механики [1], каждое такое значение является энергией связанного состояния $|E_{n\ell}, \ell, m_\ell\rangle$ квантовой частицы, число n таких связанных состояний равно бесконечности, при увеличении этого числа все энергии $E_{n\ell}$, монотонно возрастая, сходятся к нулю слева:

$$E_{n\ell} > E_{n+1,\ell}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad E_{n\ell} \to 0-, \quad n \to \infty.$$

Следовательно, состояние с $|E_{n\ell}, \ell, m_\ell\rangle$ с номером $n = 0$ является основным, а при достаточно большом значении номера n энергия связи $B_{n,\ell} = -E_{n\ell}$ состояния $|E_{n\ell}, \ell, m_\ell\rangle$ квантовой частицы намного меньше энергии связи $B_{0\ell} = -E_{0\ell}$ ее основного состояния. Поэтому все связанные состояния $|E_{n\ell}, \ell, m_\ell\rangle$ квантовой частицы с большим ($n \gg 1$) номером n называются слабосвязанными.

В рассматриваемом случае степенного потенциала (1) для энергии $E_{n\ell}$ любого ($n = 0, 1, \dots$) связанного состояния с ненулевым угловым моментом ℓ нетрудно получить простую и явную оценку снизу. Для вывода такой оценки воспользуемся известным в квантовой механике [1] правилом: если убывающий в пределе $r \to \infty$ потенциал $U(r)$ имеет единственный локальный минимум в некоторой точке $r_u < \infty$ и его значение $U(r_u)$ в этой точке отрицательное, то энергия E любого связанного состояния квантовой частицы в поле такого потенциала больше этого значения: $E > U(r_u)$.

Уравнение (2) интерпретируем как радиальное уравнение Шредингера для квантовой частицы, движущейся на полуоси $r > 0$ в поле эффективного потенциала

$$U(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{V_0}{r^\alpha}.$$

В случае $\ell = 0$ потенциал $U(r)$ неограниченно убывает в пределе $r \to 0$ и монотонно возрастает на всей полуоси $r > 0$. Следовательно, потенциал $U(r)$ имеет единственный минимум в точке $r = r_u = 0$, но в этой точке $U(r_u) = -\infty$. Поэтому оценка $E > U(r_u)$ вырождается в малоинформативное неравенство $E > -\infty$.

В случае $\ell \geq 1$ потенциал $U(r)$ обращается в нуль в одной точке $r = r_0$,

$$r_0 = \left[\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\ell(\ell+1)}{V_0}\right]^{1/(2-\alpha)},$$

в области $r < r_0$ является отталкивающим $(U > 0)$, а в области $r > r_0$ — притягивающим $(U < 0)$ потенциалом. В том же случае потенциал $U(r)$ имеет единственный локальный минимум и в точке $r = r_u$,

$$r_u = \left[\frac{\hbar^2}{m}\,\frac{\ell(\ell+1)}{\alpha V_0}\right]^{1/(2-\alpha)}, \quad \ell \geq 1,$$

достигает своего минимального значения $U(r_u)$. Следовательно, для энергии $E_{n\ell}$ любого связанного состояния $|E_{n\ell}, \ell, m_\ell\rangle$ квантовой частицы верна оценка снизу

$$E_{n\ell} > U(r_u) = -\frac{2-\alpha}{2}\left[\frac{m}{\hbar^2}\,\frac{\alpha V_0^{2/\alpha}}{\ell(\ell+1)}\right]^{\alpha/(2-\alpha)} V_0, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad \ell \geq 1.$$

Вследствие этой оценки энергия связи $B_{0\ell} = -E_{0\ell}$ основного связанного состояния квантовой частицы уменьшается, если уменьшается параметр V_0 потенциала (1) или же возрастает квантовое число ℓ.

2. ОБЕЗРАЗМЕРЕННАЯ РАДИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА НА СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ

Сведем исходную задачу Шредингера (2)–(4) к обезразмеренной краевой задаче, адаптированной для исследования известным асимптотическим методом [4], который кратко излагается в разд. 3 и используется в разд. 4.

Параметр ν и удобную единицу измерения r_α расстояния r определим формулами

$$\nu \equiv \frac{2-\alpha}{\alpha}, \quad r_\alpha = \left(\frac{\hbar^2}{2mV_0}\right)^{1/(2-\alpha)}.$$

Введем безразмерные аргументы q, x и ρ следующим образом:

$$q \equiv k = r_\alpha \sqrt{\frac{2m}{h^2}(-E)}, \quad x \equiv q^{2/\alpha}\,\frac{r}{r_\alpha}, \quad \rho \equiv kr = q^{-\nu}x.$$

Далее будем использовать подстановку

$$r = q^{-2/\alpha}\,x\,r_\alpha, \quad \tilde{u}_\ell(r,E) = u_\ell(x,q), \quad s = q^\nu\sqrt{\ell(\ell+1)}$$

и представление отрицательной полной энергии

$$E = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar q}{r_\alpha}\right)^2 = -E_\alpha\, q^2, \quad E_\alpha \equiv \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{\alpha/(\alpha-2)} V_0^{2/(2-\alpha)}. \tag{5}$$

Этой подстановкой сведем исходную краевую задачу (2)–(4) к уравнению

$$\left[\,q^{2\nu}\,\partial_x^2 + p^2(x,s)\,\right]\,u_\ell(x,q) = 0, \quad x > 0, \tag{6}$$

в котором по определению $s = q^\nu\sqrt{\ell(\ell+1)}$,

$$p^2(x,s) = \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha - \left(\frac{s}{x}\right)^2 - 1, \tag{7}$$

а искомая функция $u_\ell(x,q)$ удовлетворяет условию

$$u_\ell(x,q) = O\left(x^{\ell+1}\right), \quad q^{2/\alpha}x \to 0, \tag{8}$$

и условию

$$u_\ell(x,q) = o(\rho^{-1/2}), \quad \rho = q^{-\nu}x \to \infty. \tag{9}$$

Стоит отметить, что согласно формулам (5) размерная величина E_α имеет смысл единицы измерения энергии E связанного состояния $|E_{n\ell},\ell,m_\ell\rangle$, а малым значениям энергии связи $B_{n\ell} = -E_{n\ell}$ отвечают малые значения $q_{n\ell} = \sqrt{B_{n\ell}/E_\alpha}$ переменной q. Поэтому слабосвязанным состоянием считаем состояние $|E_{n\ell},\ell,m_\ell\rangle$ с $q = q_{n\ell} \ll 1$.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ И ПРАВИЛО КВАНТОВАНИЯ БОРА–ЗОММЕРФЕЛЬДА

В рассматриваемом случае $q \ll 1$ уравнение (6) является уравнением второго порядка с малым параметром $q^{2\nu}$ перед старшей производной. Приближенные решения уравнений такого типа можно найти известным асимптотическим методом [4]. Напомним основные этапы реализации этого метода на примере нашей краевой задачи (6)–(9) в случае, когда уравнение $p^2(x,s)=0$ на полуоси $x \geq 0$ имеет два простых корня $x_1(s)$ и $x_2(s)$, таких что $x_1(s) < x_2(s)$.

На первом этапе строятся два линейно независимых решения уравнения (6), которые представляются в виде

$$u^{\pm}(x,q) = \frac{1}{\sqrt{p(x,s)}} \exp\left\{ \pm \frac{\imath}{q^{\nu}} \int\limits_{v(s)}^{x} p(t,s)\,dt + \sum_{j=1}^{\infty} (q^{\nu})^k \int\limits_{v(s)}^{x} \omega_j(t,s)\,dt \right\}. \tag{10}$$

В этом представлении $q^{\nu} \to 0$, нижний предел $v(s)$ обоих интегралов выбирается из дополнительных условий, а все функции $\omega_j(t,s)$, $j = 1,2,\ldots$, удовлетворяют известным рекуррентным по номеру j уравнениям. Вычисление таких функций — довольно сложная задача, поэтому вместо решений (10) используются их асимптотики

$$u^{\pm}(x,q) = \frac{1}{\sqrt{p(x,s)}} \exp\left\{ \pm \frac{\imath}{q^{\nu}} \int\limits_{b(s)}^{x} p(t,s)\,dt + O(q^{\nu}) \right\}, \quad q^{\nu} \to 0. \tag{11}$$

Второй этап сводится к учету поправки Лангера. Для этого произведение $\ell(\ell+1)$ заменяется квадратом суммы $\ell + 1/2$. После такой замены величина s становится равной произведению $q^{\nu}(\ell + 1/2)$.

Третий этап заключается в построении приближения искомой волновой функции $u_{\ell}(x,q)$ в виде трех линейных комбинаций двух функций (11). На интервале $0 \leq x < x_1(s)$, на отрезке $x_1 \leq x \leq x_2(s)$ и на полупрямой $x > x_2(s)$ используются линейные комбинации с заранее неизвестными коэффициентами, а нижний предел $v(s)$ интеграла в формулах (11) определяется соответствующими равенствами $v(s)=0$, $v(s)=x_1(s)$ или $v(s)=x_2(s)$. Все коэффициенты находятся из граничных условий и условия непрерывности приближения функции $u_{\ell}(x,q)$ в точках $x = x_1(s)$ и $x = x_2(s)$. Последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда малый параметр q^{ν} является корнем асимптотического уравнения

$$\frac{1}{q^{\nu}}\, I(s) = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty. \tag{12}$$

В этом уравнении n — большое целое число, $s = q^\nu\,(\ell + 1/2)$ и по определению

$$I(s) = \int\limits_{x_1(s)}^{x_2(s)} p(x, s)\, dx. \tag{13}$$

Согласно формулам (5) каждому $(n \gg 1,\ \ell = 0, 1, \dots)$ корню $q = q^\nu_{n\ell}$ уравнения (12) отвечает энергия $E = E_{n\ell} = -E_\alpha\, q^2_{n\ell}$ слабосвязанного состояния $|E_{n\ell}, \ell, m_\ell\rangle$.

Теперь в уравнении (12) отбросим остаточный член $O(1/n)$, но сохраним условие $n \gg 1$. Затем, положив $x = q^{2/\alpha}(r/r_\alpha)$ и $q = \sqrt{E/E_\alpha}$, перейдем к размерным переменным r и E, символами r_1 и r_2 обозначим простые нули функции $E - W(r)$, в которой потенциал $W(r)$ определен формулой

$$W(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{(\ell + 1/2)^2}{r^2} - \frac{V_0}{r^\alpha}.$$

В итоге получим уравнение для искомой энергии $E = E_{n\ell}$ связанного состояния $|E_{n\ell}, \ell, m_\ell\rangle$ с данными квантовыми числами $n \gg 1$ и ℓ. Представим это уравнение в виде уравнения

$$\frac{1}{\hbar}\int\limits_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m\,[\,E - W(r)\,]}\, dr = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \gg 1. \tag{14}$$

Такое уравнение давно известно как правило квантования Бора–Зоммерфельда. В курсе квантовой механики [1] это правило доказано классическим методом ВКБ. В этом методе линейно независимые решения $u^\pm(r, E)$ исходного радиального уравнения Шредингера (2) строятся в виде экспоненциальных функций

$$u^\pm(r, E) = \exp\left[\pm\frac{\imath}{\hbar} S(r, E)\right], \quad S(r, E) = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n\, S_n(r, E).$$

Предложенный выше вывод правила Бора–Зоммерфльда (14) из асимптотического уравнения (12) с малым параметром q^ν является альтернативным известному доказательству [1] этого правила классическим методом ВКБ. Вследствие равенства $E_{n\ell} = -E_\alpha q^2_{n\ell}$ имеется взаимно однозначное соответствие между корнями $q^\nu_{n\ell}$ и $E_{n\ell}$ уравнений (12) и (14). Следовательно, эти уравнения эквивалентны друг другу.

Стоит отметить, что обезразмеривающей подстановкой $r = q^{-2/\alpha}\, x\, r_\alpha$, $E = -E_\alpha\, q^2$ правило квантования Бора–Зоммерфельда (14) сводится к асимптотическому уравнению (12) с отброшенным остаточным членом $O(1/n)$.

Поэтому такое уравнение является обезразмеренным правилом квантования Бора–Зоммерфельда в рассматриваемом случае убывающего степенного потенциала (1).

4. АНАЛИЗ АСИМПТОТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Исследуем асимптотическое уравнение (12). Предположим, что s является неотрицательной переменной, физические значения которой равны $q^{\nu}(\ell + 1/2)$, $\ell = 0, 1, \ldots$

Сначала выявим условие, при котором уравнение $p^2(x, s) = 0$ имеет два простых вещественных корня $x_1(s)$ и $x_2(s)$. Для этого перепишем уравнение $p^2(x, s) = 0$ в виде уравнения

$$x^{2-\alpha} - x^2 = s^2, \quad x \geq 0, \quad s \geq 0, \quad \alpha \in (0, 2). \tag{15}$$

Такое уравнение имеет корни тогда и только тогда, когда его правая часть s^2 не превышает максимального значения левой части. Эту часть считаем функцией $f(x) \equiv x^{2-\alpha} - x^2$ переменной x. Функция $f(x)$ обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 1$, является положительной на интервале $0 < x < 1$ и отрицательной в области $x > 1$. Только в одной точке $x = x_0$,

$$x_0 = \left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^{1/\alpha},$$

производная $\partial_x f(x)$ функции $f(x)$ обращается в нуль, поэтому именно в этой точке функция $f(x)$ достигает своего максимального значения, равного числу $s_0^2 = (\alpha/2)^{2/\alpha}\,\nu^{\nu}$. Функция $f(x)$ монотонно возрастает на отрезке $0 \leq x \leq x_0$ и монотонно убывает на полуинтервале $x_0 < x \leq 1$. Вследствие перечисленных выше свойств функции $f(x)$ уравнение (15), а значит, и исходное уравнение $p^2(x, s) = 0$ имеет два простых корня $x_1(s)$ и $x_2(s)$ тогда и только тогда, когда величина s^2 меньше максимального значения s_0^2 функции $f(x)$. Запишем это условие в виде следующего ограничения на допустимые физические значения переменной s:

$$s = q^{\nu}(\ell + 1/2) < s_0, \quad s_0 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/\alpha} \nu^{\nu/2}. \tag{16}$$

Для полноты отметим, что при условии $s^2 = s_0^2$ исследуемое уравнение (15) имеет один, но вырожденный корень x_0. Укажем некоторые очевидные свойства корней $x_1(s)$ и $x_2(s)$, обусловленные уравнением (15). Оба таких корня являются непрерывными функциями переменной s на отрезке $0 \leq s \leq s_0$. В пределе $s \to 0$ корень $x_1(s)$ сходится к нулю, а корень $x_2(s)$ к единице. В пределе $s \to s_0$ корни $x_1(s)$ и $x_2(s)$ сходятся к вырожденном корню x_0.

Теперь выявим основные свойства интеграла $I(s)$, определенного формулой (13). Оба предела $x_1(s)$ и $x_2(s)$ интеграла $I(s)$ являются функциями переменной s и корнями уравнения $p^2(x,s)=0$. Поэтому для производной $I'(s)=\partial_s I(s)$ такого интеграла верно представление

$$I'(s) = -s \int\limits_{x_1(s)}^{x_2(s)} \frac{dx}{x^2}\frac{1}{p(x,s)}, \quad 0 \le s < s_0. \tag{17}$$

Вследствие этого представления производная $I'(s)$ всегда отрицательная. Поэтому интеграл $I(s)$ монотонно убывает при возрастании его аргумента s на отрезке $[0,s_0]$. В случае $s \to s_0$ оба предела $x_1(s)$ и $x_2(s)$ интеграла $I(s)$ сходятся к вырожденному корню x_0 уравнения $p^2(x,s)=0$, и поэтому в точке $s=s_0$ интеграл $I(s)$ обращается в нуль.

Выявим важное следствие монотонного убывания интеграла $I(s)$. Для этого сначала поделим обе части асимптотического уравнения (12) на сумму $\ell+1/2$, а затем умножим на s. Таким образом получим следующее уравнение относительно неизвестного s:

$$I(s) = \pi\frac{2n+1}{2\ell+1}\,s + O\left(\frac{2s}{n(2\ell+1)}\right), \quad n\to\infty, \quad 0 \le s \le s_0.$$

Левая часть $I(s)$ этого уравнения монотонно убывает. Поэтому при выбранных значениях чисел n и ℓ имеется только один, причем простой корень $s_{n\ell}$. Следовательно, при тех же значениях чисел n и ℓ исходное уравнение (12) также имеет один простой корень

$$q^{\nu}_{n\ell} = \frac{2s_{n\ell}}{2\ell+1}.$$

Перейдем к вычислению интеграла $I(s)$ и его производной $\partial_s I(s)$ в точке $s=0$.

Согласно определению (7) функция $p(x,s)$ содержит дробь $(s/x)^2$. Если в представлении (13) интеграла $I(s)$ положить $s\to 0$, то его нижний предел $x_1(s)$ устремится к нулю и переменная интегрирования x вблизи этого предела окажется малой. В результате в дроби $(s/x)^2$ возникнет неопределенность типа $0/0$. Поэтому значение интеграла $I(s)$ в точке $s=0$ нельзя найти предельным переходом $s\to 0$ в обсужденном представлении (13). Вследствие той же неопределенности значение производной $I'(s)$ при $s=0$ нельзя вычислить, устремив аргумент s к нулю в представлении (17).

Следовательно, необходимо из исходных представлений (13) и (17) вывести другие интегральные представления, адаптированные для вычисления функций $I(s)$ и $I'(s)$ в точке $s=0$.

Приступим к выводу таких представлений. Сначала подстановкой

$$x = \frac{s^{2/(2-\alpha)}}{y(s)} \tag{18}$$

сведем уравнение (15) к уравнению

$$y^\alpha(s) - y^2(s) = s^{2/\nu}. \tag{19}$$

При условии $0 \le s < s_0$, где число s_0 определено формулой (16), это уравнение имеет два простых корня $y_1(s)$ и $y_2(s)$. Положим для определенности $y_1(s) < y_2(s)$. В пределе $s \to 0$ корень $y_1(s)$ сходится к нулю как функция $s^{2/(2-\alpha)}$, а корень $y_2(s)$ стремится к единице:

$$y_1(s) \to s^{2/(2-\alpha)}, \qquad y_2(s) \to 1, \quad s \to 0. \tag{20}$$

Так как уравнение (15) заменой (18) свелось к уравнению (19), то существует однозначная связь между корнями $x_j(s)$ и $y_j(s)$, $j = 1, 2$, этих уравнений. Действительно, если в правой части равенства (18) заменить функцию $y(s)$ корнем $y_1(s)$ или корнем $y_2(s)$ уравнения (19), то левая часть этого же равенства будет корнем $x_2(s)$ или корнем $x_1(s)$ уравнения (15). Используя указанную связь, подстановку

$$x = \frac{s^{2/\nu}}{z\, y_1(s)}$$

и известное правило интегрирования по частям, сведем интеграл (13) к интегралу

$$I(s) = \frac{s}{2} \int\limits_1^{a(s)} \frac{\alpha z^{\alpha-2}\, y_1^{\alpha-2}(s) - 2}{\sqrt{1 - z^2 - y_1^{\alpha-2}(s)(1 - z^\alpha)}}\, dz, \quad a(s) = \frac{y_2(s)}{y_1(s)}, \quad 0 \le s \le s_0. \tag{21}$$

Аналогичным способом, но с помощью подстановки

$$x = \frac{s^{2/\nu}}{z\, y_2(s)}$$

и без интегрирования по частям из интеграла (17) получим интеграл

$$I'(s) = \int\limits_1^{b(s)} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2 - \, y_2^{\alpha-2}(s)\,(1 - z^\alpha)}}, \quad b(s) = \frac{y_1(s)}{y_2(s)}, \quad 0 \le s \le s_0. \tag{22}$$

Теперь, приняв во внимание соотношения (20), перейдем в полученных представлениях (21) и (22) к пределу $s \to 0$, а затем выразим искомые значения интеграла $I(s)$ и его производной $I'(s)$ в точке $s = 0$ через табличные интегралы [5]:

$$I(0) = \frac{\alpha}{2} \int\limits_1^{\infty} \frac{z^{2-\alpha}\, dz}{\sqrt{1 - z^{\alpha}}} = \frac{1}{2}\, B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad I'(0) = -\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^{\alpha} - z^2}} = -\frac{\pi}{2-\alpha}. \tag{23}$$

Первый из них содержит бета-функцию $B(\nu/2, 1/2)$.

5. ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ЭНЕРГИЙ СЛАБОСВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Найдем решение $q^{\nu}_{n\ell}$ асимптотического уравнения (12) в линейном по переменной q^{ν} приближении интеграла $I(s)$. Заметим, что из представления (22) первой производной $I'(s)$ этого интеграла следует непрерывность производной второго порядка $I''(s) = \partial^2_s I(s)$ на интервале $0 < s < s_0$. Поэтому при малых значениях аргумента s функцию $I(s)$ можно представить в виде ряда Маклорена с отстаточным слагаемым в форме Лагранжа:

$$I(s) \approx I(0) + s\, I'(0) + \frac{s^2}{2}\, I''(\xi s), \quad s \ll 1, \quad \xi \in (0, 1).$$

Из такого представления для всех малых физических значений $q^{\nu}\,(\ell + 1/2)$ аргумента s следует линейное по переменной q^{ν} приближение

$$I(s) \approx I(0) + q^{\nu}\,(\ell + 1/2)\, I'(0), \quad q^{\nu}\,(\ell + 1/2) \ll 1. \tag{24}$$

В этом приближении уравнение (12) при данных n и ℓ имеет один корень

$$q^{\nu}_{n\ell} \approx \left[\frac{I(0)}{n + 1/2 - (\ell + 1/2)\, I'(0)}\right], \quad n \gg 1. \tag{25}$$

Для такого корня достаточное условие $q^{\nu}_{n\ell}\,(\ell + 1/2) \ll 1$ применимости использованного приближения (24) выполняется тогда и только тогда, когда $\ell \ll n$.

Теперь в приближении (25) заменим величины $I(0)$ и $I'(0)$ правыми частями соответствующих равенств (23), а затем воспользуемся представлением (5) энергии $E = E_{n\ell}$ через число $q = q_{n\ell}$. В результате для энергии $E_{n\ell}$ слабосвязанного состояния $|E_{n\ell}, \ell, m_{\ell}\rangle$ квантовой частицы в поле потенциала (1) получим явное и довольно простое приближение

$$E_{n\ell} \approx -E_{\alpha} \left\{\frac{1}{2\pi}\, B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right) \frac{1}{n + 1/2 + (\ell + 1/2)/(2 - \alpha)}\right\}^{2/\nu}. \tag{26}$$

Перечислим все условия, достаточные для применимости этого приближения: число α принадлежит интервалу $(0,2)$, номер n слабосвязанного состояния $|E_{n\ell},\ell,m_\ell\rangle$ является большим целым числом, а угловой момент ℓ может принимать любые целые значения, ограниченные сверху неравенством $\ell \ll n$.

Сделаем два замечания.

В кулоновском случае ($\alpha = 1$) приближение (26) становится известным точным представлением [1] энергии $E_{n\ell}$ связанного состояния $|E_{n\ell},\ell,m_\ell\rangle$ квантовой частицы с любыми целыми числами n и ℓ:

$$E_{n\ell} = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}\frac{1}{(n+\ell+1)^2}, \quad n = 0,1,\ldots, \quad \ell = 0,1,\ldots.$$

В силу выявленной выше эквивалентности асимптотического уравнения (12) и правила квантования Бора–Зоммерфельда (14) приближение (26) является следствием этого правила.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты нашей работы. Предложен и математически обоснован новый способ вычисления энергий слабосвязанных состояний квантовой частицы в поле убывающего степенного потенциала (1). В этом способе ключевым является асимптотическое уравнение (12), эквивалентное правилу квантования Бора–Зоммерфельда и содержащее интеграл $I(s)$. Для этого интеграла и его производной $I'(s)$ выведены удобные интегральные представления (21) и (22). Используя такие представления, удалось найти явное приближение (26) для энергий слабосвязанных состояний квантовой частицы для случая конечных значений ее углового момента. Это приближение является физически интересным следствием правила квантования Бора–Зоммерфельда для случая убывающего степенного потенциала (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Т. III. М.: Физматлит, 2008.
2. *Yafaev D. R.* // Commun. Math. Phys. 1982. V. 85. P. 177.
3. *Квицинский А. А.* // ТМФ. 1984. Т. 59. С. 472.
4. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Т. 1: Элементарные функции. М.: Наука, 1981.

Получено 21 ноября 2018 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 03.12.2018.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,75. Уч.-изд. л. 0,91. Тираж 245 экз. Заказ № 59561.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/